

Orbite v $-k/r$ potencialu

Poišči enačbe orbite $r(\varphi)$ za Keplerjev potencial $V(r) = -k/r$, $k > 0$.

Rezultat: $r(\varphi) = p/(1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0))$, $p = p_\varphi^2/(km)$, $\varepsilon = \sqrt{1 + 2Hp_\varphi^2/(mk^2)}$, kjer je H celotna energija in p_φ velikost vrtilne količine.

Postopek: Iz enačbe za ohranitev energije $H = m\dot{r}^2/2 + p_\varphi^2/(2mr^2) - k/r$ izrazi \dot{r}^2 . Zamenjaj odvod po času z odvodom po φ : $\frac{d}{dt} = p_\varphi^2/(mr^2) \frac{d}{d\varphi}$ in vpelji novo spremenljivko $u = 1/r$. Odvajaj enačbo po φ in dobiš $\frac{du}{d\varphi}(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - km/p_\varphi^2) = 0$. Rešitev je $u(\varphi) = km/p_\varphi^2 - B \cos(\varphi - \varphi_0)$. Konstanto B določi iz energijske enačbe v točki $\varphi = \varphi_0$, kjer je $\dot{r}|_{\varphi_0} = \frac{du}{d\varphi}|_{\varphi_0} = 0$