

VRTEČE–SE DRSALIŠČE

Alen Horvat in Bor Kavčič

21. marec 2012

Naloga obravnava posebno drsališče, ki ga dobimo tako, da z vodo napolnjen bazenček enakomerno vrtimo okrog navpične osi s kotno hitrostjo ω in počasi zamrzujemo. Zanima nas, kako na takem drsališču vidi gibanje hokejskega paka opazovalec v inercialnem in neinercialnem sistemu.

OBLIKA DRSALIŠČA

Najprej moramo izračunati obliko drsališča (označimo jo z) kot funkcijo x -a in y -a. Zaradi simetrije je dovolj, da najdemo obliko drsališča le v preseku. Za lažji izračun si pomagajmo s sliko 1. Kot je razvidno, na infinitizimalni del vode delujeta sila gravitacije in centripetalna sila, ki je posledica vrtenja drsališča. Rezultanta obeh sil tvori kot α z navpičnico. Tangens kota α je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{F_g} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}. \quad (1)$$

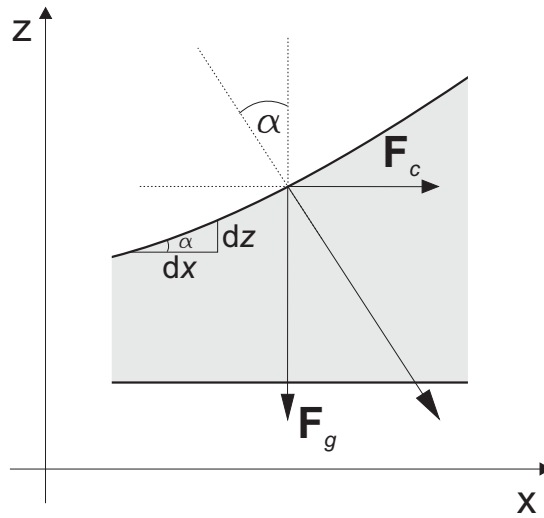
Poleg tega vidimo, da velja $\operatorname{tg} \alpha = dz/dx$ in iz tega sledi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}. \quad (2)$$

Po integraciji dobimo funkcijsko odvisnost $z(x)$, ki nam pove obliko drsališča

$$z = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 x^2}{g}. \quad (3)$$

Kot vidimo, je oblika drsališča parabolična.



Slika 1: Sile, ki delujejo na del vode pri vrtenju drsališča.

GIBANJE HOKEJSKEGA PAKA

Vpeljimo koordinatni sistem (x, y, z) , ki je fiksiran glede na zemljo in (x', y', z') , ki se vrti skupaj z drsališčem. Postavitev koordinatnih sistemov je prikazana na sliki 2. Sili, ki delujeta na pak sta sila gravitacije mg , kjer je m masa drsalca, ter sila podlage F_p . Komponente sil v nevrtečem-se sistemu so

$$F_x = m\ddot{x} = -F_p \sin \alpha \cos \phi, \quad (4)$$

$$F_y = m\ddot{y} = -F_p \sin \alpha \sin \phi, \quad (5)$$

$$F_z = m\ddot{z} = F_p \cos \alpha - mg. \quad (6)$$

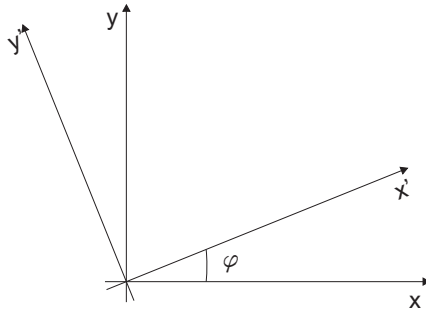
Negativen predznak pri F_x, F_y je posledica tega, da je F_p nagnjena proti središču. Zaradi majhne kotne hitrosti, pri kateri smo zamrznili drsališče, je ukrivljenost drsališča majhna in posledično lahko računamo s približkom $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$. Iz enakega naslova računamo s približkom $F_p \approx mg$, kjer velja $\alpha \approx \omega^2 r / g$. Upoštevajoč te približke ter $r \cos \phi = x$ in $r \sin \phi = y$ dobimo diferencialni enačbi za harmonski oscilator

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \quad \ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (7)$$

Ustrezni rešitvi lahko kar uganemo

$$x = A' \sin \omega t + B' \cos \omega t \quad y = C' \sin \omega t + D' \cos \omega t. \quad (8)$$

Ekvivalentni rešitvi sta tudi



Slika 2: Postavitev koordinatnih sistemov (mirujočega (x, y) in vrtečega (x', y')). Koordinatni osi z in z' sovpadata.

$$x = A \sin \omega t \quad y = B \cos (\omega t + \delta). \quad (9)$$

Konstante določimo iz začetnih pogojev. Kot je razvidno, rešitve v mirujočem sistemu so v splošnem elipse. Sedaj nas zanimajo še rešitve v vrtečem-se sistemu. Le-te dobimo z ustrezno transformacijo (računali bomo za $\delta = 0$, v splošnem je δ poljuben). Transformacijo koordinat zapišemo s pomočjo slike 2 in dobimo

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t, \quad (10)$$

oziroma obratna transformacija

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \quad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t. \quad (11)$$

Da dobimo rešitve v vrtečem-se sistemu, vstavimo rešitvi x, y iz (9) v enačbi (10) in dobimo

$$x' = A \cos \omega t \sin \omega t + B \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2}(A + B) \sin 2\omega t, \quad (12)$$

$$y' = -A \sin \omega t \sin \omega t + B \cos \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2}(A + B) \cos 2\omega t + \frac{1}{2}(B - A). \quad (13)$$

Na sliki 3 so ilustrirane rešitve, ki smo jih dobili.

Nalogo lahko rešimo tudi najprej v vrtečem-se sistemu (x', y', z') in nato rešitve pretransformiramo v mirujoč sistem. K enačbi (10) dodajmo še $z = z'$. Defnirajmo radijvektorja $\mathbf{r} = (x, y, z)$ in $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, ki kažeta od izhosišča do paka (prvi v mirujočem in drugi v vrtečem-se sistemu). Da dobimo ustrezne gibalne enačbe, moramo zapisati Newtonov zakon. Odvajajmo vektor \mathbf{r}' po času. Ne smemo pozabiti, da so tudi bazni vektorji tega sistema časovno odvisni. Odvajamo lahko po komponentah, ali pa se

spomnimo, da lahko odvod vrtečega-se sistema po času lahko zapišemo kot $d/dt = d/dt|_{rel} + \omega \times [1]$. Po dvakratnem odvajanju dobimo že znano zvezo

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{a}_{rel} + 2\omega \times \mathbf{v}_{rel} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}'). \quad (14)$$

Sedaj moramo zapisati še sile v vrtečem-se sistemu, ki delujejo na pak. Ker imamo idealno gladek led trenja ni, ostaneta nam le sila gravitacije ter sila podlage. Kot smo že omenili, je kot α med normalo na ploskev in navpičnico majhen, zato lahko gibanje v smeri z zanemarimo in pišemo $\mathbf{r} = (x, y)$ ter $\mathbf{r}' = (x', y')$, prav tako lahko F_p aproksimiramo z mg . Zapišimo sedaj Newtonov zakon

$$-\frac{F_p}{m} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} \sin \alpha = \mathbf{a}_{rel} + 2\omega \times \mathbf{v}_{rel} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}'), \quad (15)$$

$\sin \alpha \approx \alpha \approx \omega^2 r/g$, ω kaže v smeri \mathbf{z}' in $\mathbf{z}' \times (\mathbf{z}' \times \mathbf{r}') = -\mathbf{r}'$. To upoštevamo v zgornji enačbi in dobimo

$$-g \frac{\omega^2 r}{g} \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = -\omega^2 \mathbf{r}' = \mathbf{a}_{rel} + 2\omega \times \mathbf{v}_{rel} - \omega^2 \mathbf{r}', \quad (16)$$

od koder sledita diferencialni enačbi

$$\ddot{x}' - 2\omega \dot{y}' = 0 \quad \ddot{y}' + 2\omega \dot{x}' = 0. \quad (17)$$

Vpeljemo $\gamma' = x' + iy'$, drugo enačbo v (17) pomnožimo z i , enačbi seštejemo in dobimo

$$\ddot{\gamma}' + 2i\omega \dot{\gamma}' = 0. \quad (18)$$

To enačbo reši nastavek $e^{\lambda t}$. Ustrezna rešitev je

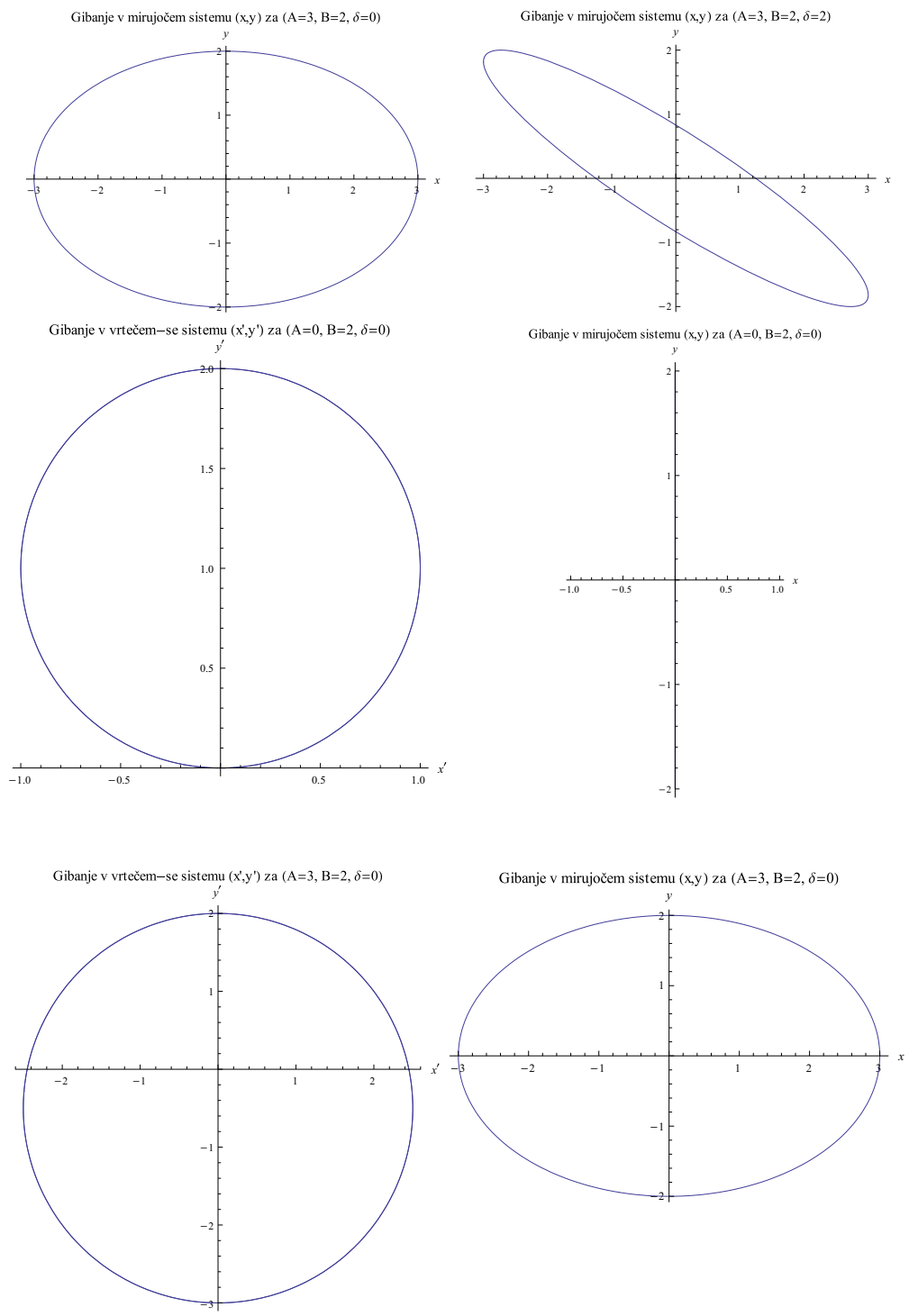
$$\gamma' = a + b e^{-2i\omega t}, \quad (19)$$

oziroma

$$x' = a + b \cos 2\omega t \quad y' = b \sin 2\omega t. \quad (20)$$

Ustrezni transformirani rešitvi sovpadata z rešitvami (8) oziroma (9), kar lahko preveri bralec sam. Pomembno je videti le, da v vrtečem-se sistemu vidimo gibanje paka z dvojno frekvenco kroženja drsališča.

Na sliki 3 vidimo rešitve (9) gibanja paka za različne vrednosti konstant A , B in faznega zamika δ . Prvi dve sliki ilustrirata gibanje paka v mirujočem sistemu. Vidimo, da se pak giblje po elipsi s središčem v izhodišču. Naslednja slika nam prikazuje gibanje v vrtečem-se sistemu, kjer gibanje paka opisuje premaknjeno krožnico. Temu ustreza nihanje paka v smeri y v mirujočem sistemu. Zadnji dve sliki pa prikazujeta splošnejše gibanje v vrtečem in mirujočem sistemu.



Slika 3: Rešitve za različne vrednosti konstant A, B in δ .

Literatura

- [1] P. Prelovšek, Klasična Mehanika (skripta), 2011.