Klasifikacija lokalnih ekstremov para torzijsko sklopnjenih matematičnih nihal

Martin Ulaga

FMF, 2015-06-12

Klasifikacija

Osišči dveh matematičnih nihal povezuje žička, ki se torzijsko deformira in deluje z navorom. Zapišemo potencial in kinetično energijo sistema:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 ({\dot{\phi}_1}^2 + {\dot{\phi}_2}^2)$$

$$V = -mgl(\cos\phi_1 + \cos\phi_2) + \frac{1}{2} mgl\alpha(\phi_1 - \phi_2)^2$$

Pogoj za stacionarne točke je:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0, \qquad i = 1, 2$$

Za vsako vrednost indeksa dobimo eno enačbo, skupaj dve.

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_1} = mgl(\sin\phi_1 + \alpha(\phi_1 - \phi_2)) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2} = mgl(\sin\phi_2 - \alpha(\phi_1 - \phi_2)) = 0, \qquad (2)$$

Če enačbi (1) in (2) seštejemo, dobimo prvi pogoj:

$$\sin\phi_1 + \sin\phi_2 = 0\,, \qquad (1) + (2)$$

Iz tega dobimo dve rešitvi:

$$\phi_1 = -\phi_2 + 2\pi n, \qquad n \in N, \qquad (a)$$

$$\phi_1 = \pi + \phi_2 + 2\pi n, \qquad n \in N, \qquad (b)$$

Če (1) in (2) odštejemo, dobimo:

$$\sin\phi_1 - \sin\phi_2 + 2\alpha(\phi_1 - \phi_2) = 0\,, \qquad (1) - (2)$$

Prva rešitev je simetričen zasuk nihal, druga pa predstavlja rešitve, kjer nihali oklepata kot π. Rešitev je lahko v splošnem različno mnogo, vendar bodo zaradi vzmeti realizirane samo nekatere. Očitno rešitev $\phi_1 = \phi_2 = 0$ smo obdelali na vajah. Obstajajo še druge stacionarne točke. Osredotočil se bom samo na tiste, kjer je $n = 0$.

Rešitev (b) je samo ena. Nastopi, ko navor žičke uravnovesi navor sile teže. Pri katerem kotu nastopi, je odvisno samo od konstante α. Če vzmeti ni, je to navpična lega. Rešitev (b) vstavimo v (1)-(2).

$$2\sin\phi_1 = -2\alpha\pi$$

Ali gre za stabilno ali labilno lego, ugotovimo iz **Hessove matrike** (matrike drugih odvodov), ki je oblike

$$Hess(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 \phi_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_1\partial\phi_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_1\partial\phi_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial^2\phi_2} \end{bmatrix} = mgl\begin{bmatrix} \cos\phi_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \cos\phi_2 + \alpha \end{bmatrix}$$

Točka je maksimum, če sta obe lastni vrednosti negativni, in minimum, če sta pozitivni. Vstavimo pogoj (b):

$$Hess_b = mgl\begin{bmatrix} \cos\phi + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \cos(\phi - \pi) + \alpha \end{bmatrix}$$

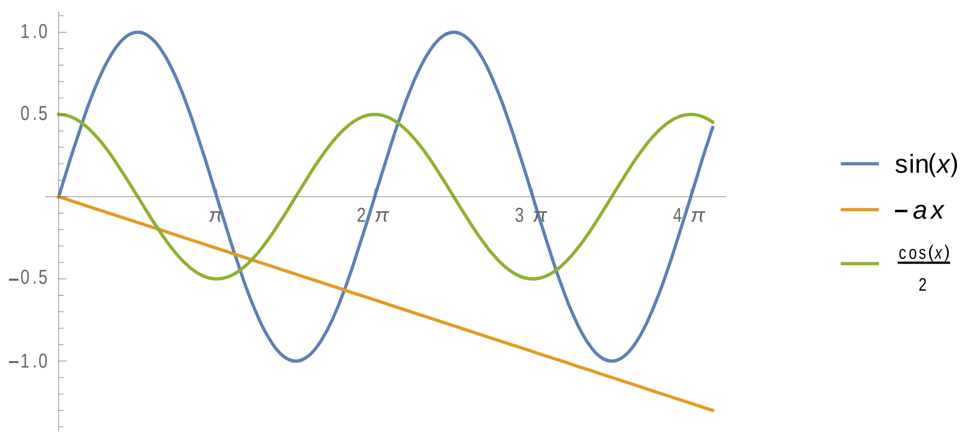
$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \frac{\sqrt{2\alpha^2 + 1 - \cos\phi}}{\sqrt{2}}$$

Lastni vrednosti sta različno predznačeni, ker je $1 - cos\phi$ med 0 in 2, torej je drugi člen vedno večji od prvega po absolitni vrednosti. Rešitev (b) torej ne predstavlja stabilne lege.

Rešitev (a) vstavimo v potencial V. Iz pogoja za ekstrem sledi:

$$\sin\phi = -\alpha\phi$$

To so vse stacionarne točke. Na grafu sta narisani obe strani dobljenega pogoja za izbiro a=0.1. Presečišča grafov so stacionarne točke. Označen je še $\frac{1}{2}\cos\phi$ (glej naslednjo stran).



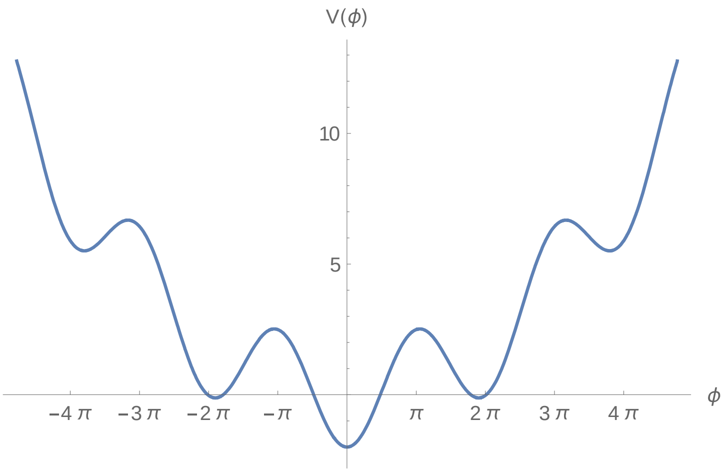
Hessova matrika je v tem primeru:

$$Hess_a = \begin{bmatrix} \cos\phi + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \cos\phi + \alpha \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \cos\phi + \alpha \pm \alpha$$

Lastni vrednosti sta enako predznačeni, če je $\cos\phi < -2\alpha$ (maksimum) ali $\cos\phi > 0$ (minimum). V tem primeru dobimo za nek ϕ minimum in nek drug ϕ maksimum. Iz grafa na prejšnji strani je možno razbrati, da gre za maksimum pri manjšem kotu in minimum pri večjem. Ti rešitvi se vidita tudi na grafu potenciala. Spet je a=0.1.

$$V(\phi) = mgl(\alpha\phi^2 - 2\cos\phi)$$



Majhna nihanja okoli rešitve (a)

Označimo

$$\phi_1 = \phi + \epsilon$$

$$\phi_2 = -\phi + \delta$$

Vstavimo v Lagrangevo funkcijo L=T-V in razvijemo za $\epsilon, \delta \ll 1$. $\phi = konst.$

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\epsilon}^2 + \dot{\delta}^2) + mgl\left[\cos\phi\left\{2 - \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{2}\delta^2\right\} - \sin\phi(\epsilon - \delta) + \alpha\left\{2\phi^2 + \phi(\epsilon - \delta) + \frac{1}{2}(\epsilon - \delta)^2\right\}\right]$$

Rešimo Lagrange-Eulerjevi enačbi za ϵ in δ. Pišemo $\Omega^2 = \frac{g}{l}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2$$

$$\ddot{\epsilon} + \Omega^2(\cos\phi + \alpha)\epsilon - \Omega^2\alpha\delta = -\Omega^2(\sin\phi + \alpha\phi)$$

$$\ddot{\delta} + \Omega^2(\cos\phi + \alpha)\delta - \Omega^2\alpha\epsilon = -\Omega^2(\sin\phi + \alpha\phi)$$

Ker smo v ekstremu, za katerega je pogoj $\sin\phi = -\alpha\phi$, je desna stran enaka 0.

Pišemo $\psi = (\epsilon, \delta)$,$\psi = \vec{a}e^{iwt}$. Dobimo homogen sistem.

$$\Omega^2 \begin{pmatrix} \cos\phi + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \cos\phi + \alpha \end{pmatrix} \psi - w^2\psi = 0$$

Rešitev je

$$(w^2)_{1,2} = \Omega^2(\cos\phi + \alpha \pm \alpha)$$

Ta rešitev preide v znano rešitev okoli globalnega minimuma, če vstavimo $\phi = 0$.