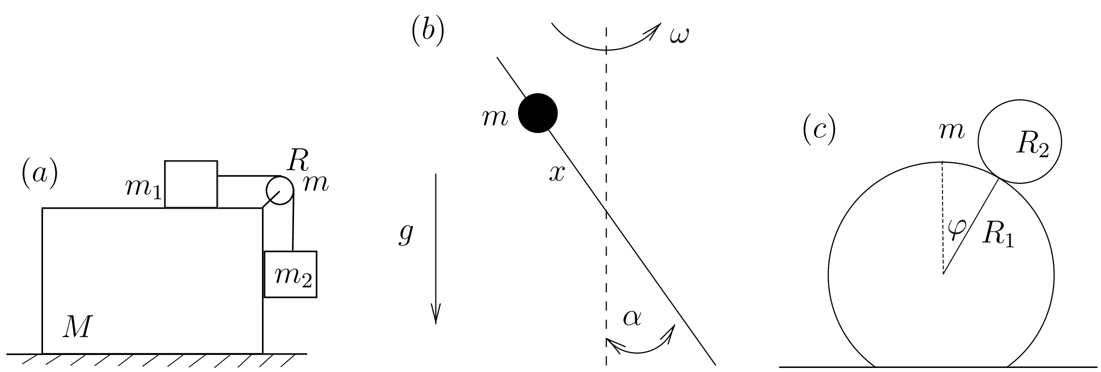
1. Kolokvij iz klasične mehanike, 6.4.2018

1. Na premičnem kvadru z maso M se nahaja utež 1 z maso m_1 in na robu kvadra je vrtljivo vpet škripec z maso m in radijem R (vztrajnostni moment $J = mR^2/2$). Ob navpični stranici kvadra pod škripcem visi utež 2 z maso m_2, ki je z vrvico preko škripca navezana na utež 1. Vrvica potuje po škripcu brez zdrsavanja. Utež 2 je pritrjena k stranici kvadra tako, da se v navpični smeri prosto giblje. Zapiši Lagrangeovo funkcijo sistema, iz nje izpelji enačbe gibanja in poišči ohranjene količine (poleg energije). Kako se giblje kvader, če je ob $t = 0$ celotni sistem miroval?

2. Na vodoravni plošči se nahaja utež z maso m. Utež je navezana na vrvico, katero vlečemo s skozi majhno luknjico v plošči tako, da se njena dolžina na plošči spreminja kot $l(t) = l_0 - v_r t$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo, iz nje izpelji enačbo gibanja in poišči ohranjeno količino. Kako se bo utež gibala, če je bila ob $t = 0$ oddaljena za l_0 od luknjice in imela kotno hitrost v_φ?

3. Na ravno vodilo nagnjeno za fiksni kot α glede na navpično os nadenemo utež z maso m, ki po vodilu prosto drsi (x je koordinata vzdolž vodila, izhodišče naj bo na osi), kot kaže slika. Vodilo se vrti okrog navpične osi s frekvenco ω. Zapiši Lagrangeovo funkcijo, izpelji enačbe gibanja in jih reši. Denimo, da se utež ob trenutku $t = 0$ nahaja pri $x = 0$ in miruje glede na vodilo. Zapiši $x(t)$ za kasnejše čase!

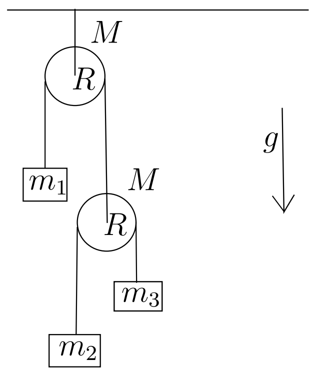
4. Valj z radijem R_2 in maso m (vztrajnostni moment $J = mR_2^2/2$) postavimo na vrh vzpetine oblike valja z radijem R_1 in ga malenkost izmaknemo iz vršne lege, tako da se zakotali po klancu navzdol. Pri katerem kotu φ se bo odlepil od klanca? Predpostavi, da valj ne zdrsuje.



Slika 1: (a) Skica 1. naloge, (b) skica 3. naloge in (c) skica 4. naloge.

1. Kolokvij iz klasične mehanike, 5.4.2019

1. Obravnavaj sistem škripcev, ki je prikazan na sliki. Zgornji škripec je pritrjen na fiksni višini. Škripca imata masi M in radija R in se prosto vrtita brez trenja okrog njunih osi. Vrv ne zdrsuje s škripcev. Na konce vrvi so pritrjene uteži z masami m_1, m_2 in m_3. Zapiši Lagrangeovo funkcijo, gibalne enačbe in izračunaj, kako se giblje utež z maso m_1, če je sistem ob $t = 0$ miroval.



2. Utež prosto drsi po plošči, ki je za kot α nagnjena glede na vodoravno lego in se enakomerno vrti okrog navpične osi s kotno hitrostjo ω. Zapiši enačbe gibanja za utež v vrtečem sistemu v katerem plošča miruje! Enačbe gibanja poenostavi za majhne α, tako da ohraniš le člene, ki so linearni v α. Poenostavljene enačbe zapiši z uvedbo kompleksne pomožne spremenljivke in jih reši! Opiši gibanje uteži ob kasnejših časih, če jo ob $t = 0$ postavimo na ploščo v os vrtenja!

3. Na ploščo, ki se vrti okoli z osi s kotno hitrostjo ω, je pritrjeno logaritemsko spiralno vodilo oblike $r = ae^{k\varphi}$ (r, φ sta polarni koordinati), po katerem se delec z maso m giblje brez trenja. Gibanje delca obravnavaj v neinercialnem sistemu, ki se vrti s spiralo. Zapiši Lagrangeovo funkcijo, izpelji enačbe gibanja in izračunaj odvisnost kota od časa, če je delec ob $t = 0$ miroval glede na spiralo pri $\varphi(0) = 0$.

Nekaj integralov:

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\mathrm{arctanh}\frac{x}{a} + C$

$\int dx \tanh ax = \frac{1}{a}\log[\cosh(ax)] + C$