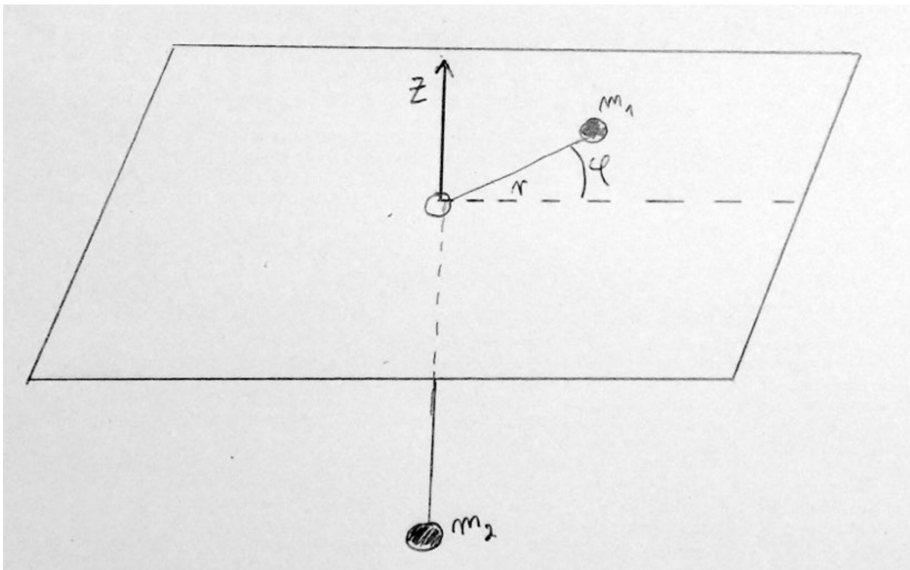
Perturbacije kroženja

Vid Pavlica

29. marec 2015

1 Uvod

Obravnavamo uteži povezani z lahko vrvico, ki poteka skozi luknjo v razsežni ravnini.



Slika 1: skica problema

2 Reševanje enačb sistema

Najprej zapišemo vez sistema (povezavo uteži preko lahke vrvice) in Lagrangeovo funkcijo:

$$l = r - z \quad (\Rightarrow \dot{r} = \dot{z}) \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 \tag{2}$$

$$V = m_2 g z \tag{3}$$

enačba (2) ustreza kinetični energiji sistema, enačba (3) pa potencialni energiji.

Lagrangiana brez konstantnih členov zapišemo kot:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1 r^2\dot{\phi}^2 - m_2 g r$$

V enačbah se ϕ ne pojavlja eksplicitno, kar nam pove, da je ϕ ciklična koordinata. Posplošeni moment:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_1 r^2 \dot{\phi} = konst. \tag{4}$$

Odvajamo lagrangeovo funkcijo po koordinati r in $\dot{r}$.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial L}{\partial r} = (m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1\dot{\phi}^2 r + m_2 g = 0 \tag{5}$$

Z uporabo enačbe (4) lahko zapišemo:

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - \frac{p_\phi^2}{m_1 r^3} + m_2 g = 0 \tag{6}$$

za stacionarno gibanje $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ se enačba poenostavi:

$$\frac{p_\phi^2}{m_1 r_0^3} = \frac{m_1^2 r_o^4 \omega_\phi^2}{m_1 r_0^3} = m_2 g \tag{7}$$

$$\omega_\phi^2 = \frac{m_2 g}{m_1 r_0} \tag{8}$$

Obravnavati želimo gibanje mase, če jo rahlo izmaknemo iz krožnice r_0. Ob pogoju, da so odmiki majhni lahko enačbo (6) prepišemo:

$$r = r_o + \delta; \quad (m_1 + m_2)\ddot{\delta} - \frac{p_\phi^2}{m_1 r_0^3 (1 + \frac{\delta}{r_0})^3} + m_2 g = 0 \tag{9}$$

ker so odmiki δ majhni razvijemo imenovalec drugega člena $x << 1$; $(1 + x)^{-3} = 1 - 3x + ...$

$$(m_1 + m_2)\ddot{\delta} - \frac{p_\phi^2}{m_1 r_0^3}(1 - 3\frac{\delta}{r_0}) + m_2 g = 0 \tag{10}$$

iz enačbe (7) prepoznamo $\frac{p_\phi^2}{m_1 r_0^3} = m_2 g$ in tako dobimo enačbo nihanja okoli stacionarnega radija r_0:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\delta} + 3 m_2 g \frac{\delta}{r_0} = 0 \tag{11}$$

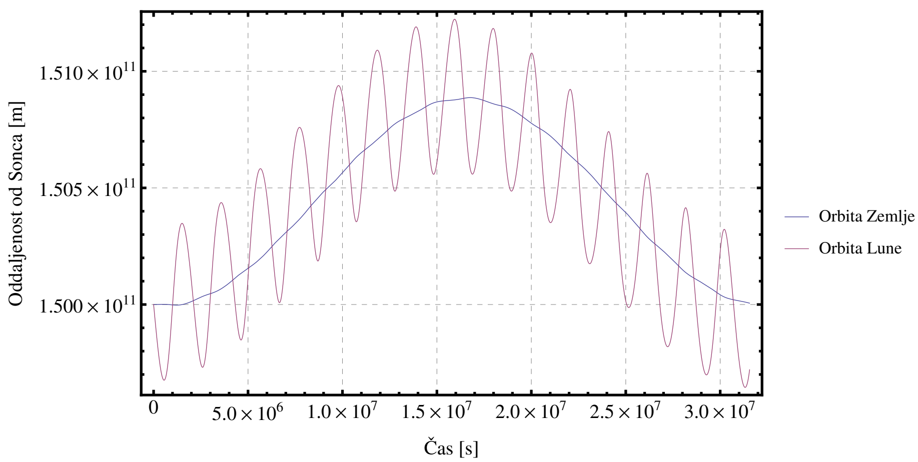
iz katere hitro preberemo frekvenco osciliranja okoli r_0:

$$\omega_{per}^2 = \frac{3 m_2 g}{m_1 + m_2} \tag{12}$$

razmerje frekvenc je tako:

$$\frac{\omega_{per}^2}{\omega_\phi^2} = \frac{3 m_1}{m_1 + m_2} \tag{13}$$

Podobne oblike rešitev danega problema dobimo pri reševanju kroženja Zemlje - Lune okoli sonca. Orbiti Lune in orbita Zemlje sta ekvivalenta danemu problemu, na sliki dve sta predstavljeni numerični rešitvi za kroženje okoli sonca (reševal sem v Mathematici).



Slika 2: Kroženje sistema Zemlja - Luna okoli sonca

Analogno našemu sistemu, predstavlja vez vrvice gravitacijska sila sonca, konstanto gibanja pa vrtilna količina.