CENTRALNI POTENCIAL – RAVNINSKI PROBLEM

~~Po~~ Za problem dveh teles v centralnem potencialu poišči $\vartheta(\varphi)$ in nato pokaži, da gre za ravninsko gibanje.

Lagrangean v sfernih koordinatah:

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

, μ reducirana masa

Ker ni odvisen od φ, je to ciklična koordinata, pripada ji posplošen impulz, ki konstanten:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \mu r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = \text{konst}$$

Oziroma:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2\sin^2\vartheta}$$

Euler - Lagrangeove enačbe za ϑ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\vartheta}\right) = \mu r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$

Ker želimo dobiti $\vartheta(\varphi)$ in NE $\vartheta(t)$, naredimo predelavo odvodov:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

Dobimo:

$$\cancel{\dot{\varphi}}\,\frac{d}{d\varphi}\left(\mu r^2\dot{\vartheta}\right) = p_\varphi\,\mu r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^{\cancel{2}}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\mu r^2\dot{\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right) = p_\varphi\cot\vartheta$$

Leva stran: $\frac{d}{d\varphi}\left(\mu r^2\dot{\varphi}\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{p_\varphi}{\sin^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right) = -p_\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d}{d\varphi}\cot\vartheta\right)$

p_φ konst

upoštevamo $\frac{d}{d\varphi}\cot\vartheta = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\varphi}$

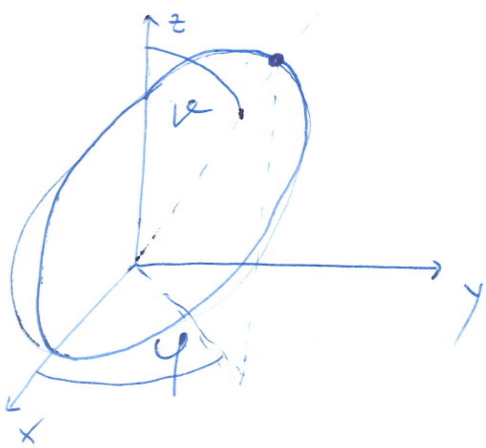
Imamo torej:

$$-\cancel{p_\varphi}\frac{d^2}{d\varphi^2}\cot\vartheta = \cancel{p_\varphi}\cot\vartheta$$

Oziroma $\frac{d^2}{d\varphi^2}\cot\vartheta + \cot\vartheta = 0$

Rešitev je $\cot\vartheta = A\cos(\varphi - \varphi_0)$; A, φ_0 iz začetnih pogojev.

Pokažimo še, da je to ravninsko gibanje!



Če je to ravninsko gibanje (recimo neka nagnjena elipsa), potem obstaja nek konst. vektor $\hat{n}$, ki je vedno pravokoten na pozicijo:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}(\varphi) = 0 \quad \text{za } \forall \varphi$$

$\rightarrow$ $\hat{n}$ je pač normala na ravnino gibanja.

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$$
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Sferične koordinate:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z = r\cos\vartheta$$

$$n_x = \cos\varphi_0\sin\vartheta_0$$
$$n_y = \sin\varphi_0\sin\vartheta_0$$
$$n_z = \cos\vartheta_0$$

nek poljuben normiran vektor, konst

$$\hat{n}\cdot\vec{r} = n_x r\cos\varphi\sin\vartheta + n_y r\sin\varphi\sin\vartheta + n_z r\cos\vartheta = 0 \quad / : r\cos\vartheta$$
$$n_x\tan\vartheta\cos\varphi + n_y\sin\varphi\tan\vartheta + n_z = 0 \quad / -n_z \, , \; : \tan\vartheta$$
$$n_x\cos\varphi + n_y\sin\varphi = -n_z\cot\vartheta$$
$$\cos\varphi_0\sin\vartheta_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\vartheta_0\sin\varphi = -\cos\vartheta_0\cot\vartheta$$
$$\underbrace{\cos\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\varphi} = -\cot\vartheta_0\cot\vartheta$$
$$\cos(\varphi - \varphi_0) = -\cot\vartheta_0\cot\vartheta$$

Naše gibanje $\vartheta(\varphi)$ ustreza tej enačbi, torej je res ravninsko gibanje. Začetni pogoji določajo φ_0, ϑ_0 in s tem ravnino gibanja.