MODERNA FIZIKA 1

VAJE

2022 – 2023

Miha Nemevšek

KONTAKT miha.nemevsek@ijs.si

INFORMACIJE predmeti.fmf.uni-lj.si/modfiz1

→ literatura, snov in predavanja, datumi izpitov, obvestila, rezultati (dogovor s predstavnikom)

SKRIPTI Naloge iz Fizike II

Rešene naloge iz Moderne Fizike

REŽIM IZPITOV 3 izpitni roki

1.a (Dec)

1.b (Jan)

2. (Maj)

3. (August)

4 naloge, 3 so 100 %

POSEBNA TEORIJA RELATIVNOSTI (PTR)

POSTULATI

#1) PROSTOR $\vec{x}$ in čas ct sta povezana preko LINEARNE transformacije.

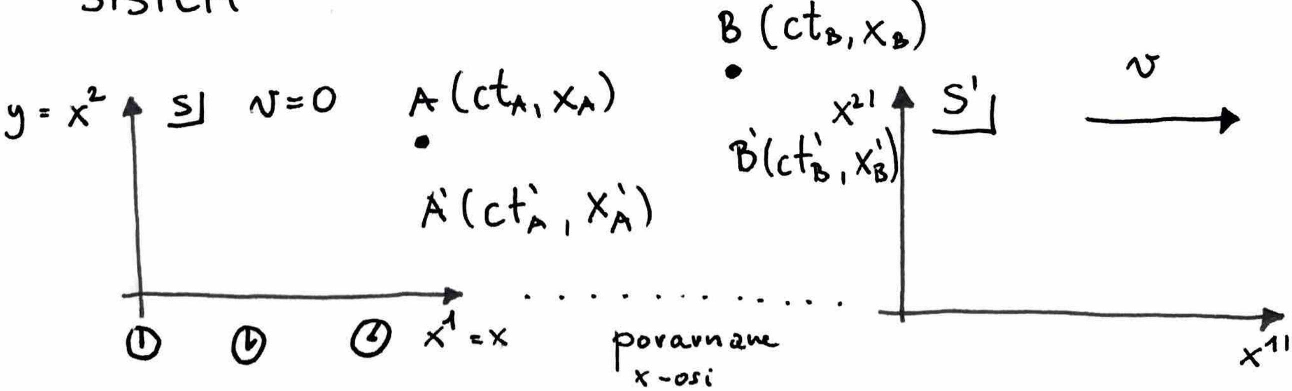
$$[\vec{x}] = [ct] = m \;, \qquad c \sim 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

[prostorske koordinate] in [čas] merimo v enakih enotah, če t pomnožimo s c, ki je konstanta za vse opazovalce.

DOGODEK $\quad x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3) \;, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \;, \quad ct = x^0$

četverec, ki ima časovno koordinato in prostorske koordinate x^i, $i = 1, 2, 3$

SISTEM



Opazovalec v S je na miru in meri svoje koordinate prostor-časa x^μ, ter z njimi označuje različne dogodke $(A, B, \ldots)$ z x^μ_A, x^μ_B, etd.

Opazovalec v S' ima svoj koordinatni sistem, za katerega privzamemo poravnane x osi $x^1 = x^{1'}$ in poravnane časa $ct = ct'$ v izhodišču, tako da

$$x^\mu_O = (0, \vec{0}) \quad , \quad x^\mu_{O'} = (0, \vec{0}).$$

Opazovalca se strinjata o realnosti dogodkov, a ker se premikata, sosledje dogodkov ni nujno isto.

Formalno linearno transformacijo zapišemo z:

LORENTZOVO TRANSFORMACIJO

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu}$$

koordinate v S

koordinate v S'

povezava med S in S', linearna transformacija, odvisna od v.

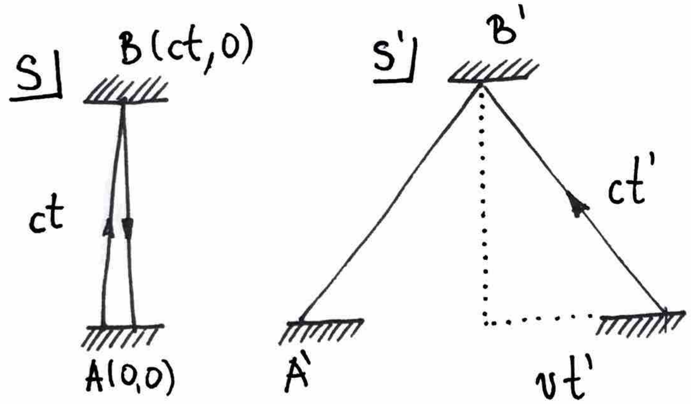
POSTULAT #2) Hitrost svetlobe je za vse inercialne opazovalce enaka in znaša $c \sim 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. S to konstanto lahko normiramo vse hitrosti $\beta = \frac{v}{c}$.

V limiti $\beta \to 0$ dobimo Galilejevo transformacijo, v limit $\beta \to 1$ pa ultrarelativistično limito, ko $m \simeq 0$.

Vsi brezmasni delci potujejo s hitrostjo c, torej $\beta = 1$ (fotoni, gravitoni).

Iz teh postulatov sledita PODALJŠANJE ČASA in SKRČENJE DOLŽIN.

PODALJŠANJE ČASA lahko razumemo <u>geometrično</u> ali <u>algebraično</u> z uporabo LT.



Pitagorov izrek

$$(ct')^2 = (ct)^2 + (vt')^2, \quad / : c^2$$

$$t^2 = (1-\beta^2)\, t'^2,$$

$$\Downarrow$$

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, ct = \gamma c t,$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\beta^2 & , \beta \sim 0 \xrightarrow{\text{Ne-rel.}} \gamma = 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\underbrace{(1-\varepsilon)^2}_{1-2\varepsilon}}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} & , \beta \sim 1-\varepsilon \xrightarrow{\text{Ultra-rel.}} \gamma \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \to \infty. \end{cases}$$

$$t' = \gamma t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{podaljšanje časa}}}{>} t \simeq \begin{cases} t & , \beta \sim 0 \\ \gg t & , \beta \lesssim 1 \end{cases}$$

Do enakega časa (rezultata) pridemo z LT. ↗

LORENTZOVA TRANSFORMACIJA (LT)

za izpeljavo glej škatlo v skripti in predavanja

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}' = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta & & \\ -\beta & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Vzemimo dva dogodka v S, $A(0,0)$ in $B(ct,0)$, in jih vstavimo direktno v LT:

$$A'\left(ct'_A = \gamma(\underbrace{ct_A}_{=0} - \beta \underbrace{x_A}_{=0}) = 0 \ , \ x'_A = \gamma(x_A - \beta c t_A) = 0 \right)$$

$A'(0,0)$, (spomnimo, to je izbira izhodišča).

$$B'\left(ct'_B = \gamma(\underbrace{ct_B}_{=ct} - \beta \underbrace{x_B}_{=0}) = \gamma ct \ , \ x'_B = \gamma(\underbrace{x_B}_{=0} - \beta \underbrace{ct_B}_{=ct}) = -\gamma\beta ct \right)$$

$$B'(\gamma ct, -\gamma\beta ct)$$

Razlika časovnih koordinat je $c\Delta t' = c(t'_B - t'_A) = ct' = \gamma ct$

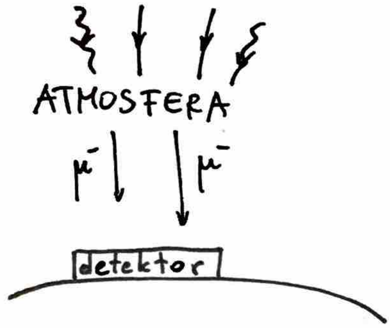
oziroma $t' = \gamma t$. Krajevne koordinate so drugačne (ta

čas bo zabeležila štoparica, ki jo ima S' pri $x' = -\gamma\beta c$

a ne štoparice (ure v S' tečejo enako).

① RAZPAD MIONOV V LETU $\tau_\mu = 2.2\,\mu s$

razpadni čas izmerjen v S za mione v mirovanju



$\beta = \frac{v}{c} = 0.994$, zelo blizu UR (ultra-relativistične) limite,

$= 1-\varepsilon = 1-0.006$ lahko napišemo kot $\beta = 1-\varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$

$\varepsilon = 0.006$

Iz β lahko izračunamo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{0{,}012}_{2\varepsilon}}} \simeq \frac{100}{\sqrt{121}} = \frac{10}{11} \sim 9$,

eksakto je $\gamma = 9{,}14$ in je $\gamma \gg 1$.

Iz podaljšanja časa, dobimo $t' = \gamma t$, oziroma

$$\tau'_\mu = \gamma \tau_\mu \cong 9 \times 2{,}2\,\mu s \simeq 20\,\mu s \quad (20{,}11\,\mu s)$$

V tem času bodo mioni v S prepotovali razdaljo

$$l = v \cdot \tau'_\mu = \underbrace{\beta}_{1} c \gamma \tau_\mu \sim 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\, 2 \cdot 10^{-5}\, s \simeq 6\,km$$
(6014 m)

Število dogodkov sledi iz eksponentne porazdelitve, to so medsebojno neodvisni dogodki.

$$N = N_0\, e^{-t/\tau'}$$

← razpadni čas izmerjen v S, podaljšan

N_0 → začetno število dogodkov

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau'}} = N_0 e^{-\frac{vt}{v\tau'}}$$

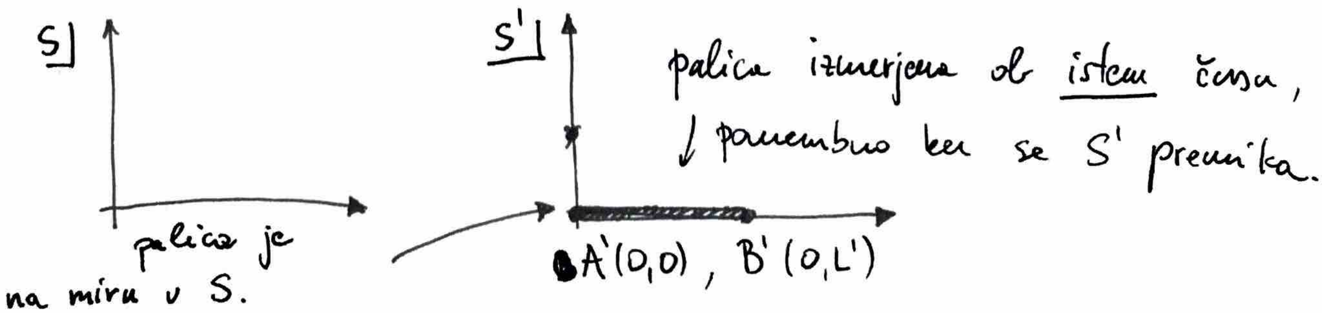
$$\frac{vt}{v\tau'} \cong \frac{h}{c\tau'} = \frac{12\,\cancel{\text{km}}}{36\,\cancel{\text{km}}} \simeq \frac{1}{3}$$

$$N = N_0 e^{-1/3} \simeq 568 \underbrace{\left(1-1/3\right)}_{\approx\, 0{,}7} \simeq 400 \quad (400.6)$$

Brez podaljšanja bi bil τ' za faktor $9 = \gamma$ krajši,

$$N_{brez} = N_0 e^{-9/3} = 568 \underbrace{e^{-3}}_{\approx\, \frac{1}{25}} \simeq 25 \quad (23.3)$$

Poleg podaljšanja časa, pride tudi do drugega pojava, tj. SKRČENJE DOLŽIN. Mogoče najbolj transparentna izpeljava je preko LT. Vzemimo palico, ki ima v sistemu, ki se premika dolžino L' in označimo kraja palice z $A'(0,0)$ in $B'(0,L')$



Sedaj lahko z ~~inverzno~~ ILT $\beta \to -\beta$ gremo iz $S' \xrightarrow{ILT} S$.

Obratna LT
$$ct = \gamma\,(ct' + \beta x')$$
$\beta \to -\beta$
$$x = \gamma\,(x' + \beta c t')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

Sedaj, podobno kot prej, vstavimo $t'_{A,B}$ in $x'_{A,B}$ in dobimo:

$$A'(0,0) \longrightarrow A(0,0)$$

$$B'(0,L') \longrightarrow B\left(\gamma(0+\beta L') = \gamma\beta L',\ \gamma(L'+0) = \gamma L'\right)$$

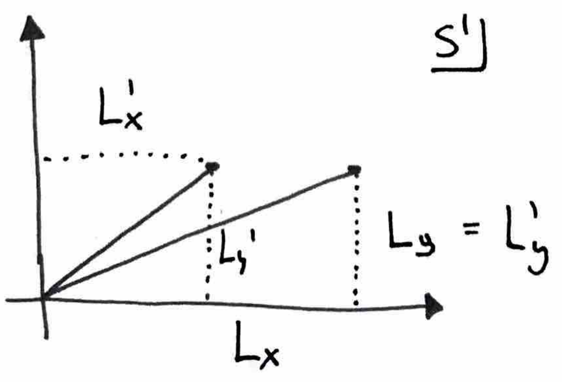
Opazovalec v sistemu S torej vidi $A(0,0)$ in $B(\gamma\beta L', \underbrace{\gamma L'}_{=L})$

Ta dogodka se zgodita ob različnih časih, a to ni važno, ker je palica v S na miru.

$$L' = \frac{L}{\gamma}\ ,\ \gamma > 1 \Rightarrow \text{SKRČENJE DOLŽIN}$$

Skrčenje se zgodi le v smeri gibanja, ostale koordinate ostanejo nespremenjene: $L'_y = L_y$, $L'_z = L_z$,

S] S']



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{L_y}{L_x}\ ,\ \operatorname{tg}\alpha' = \frac{L'_y}{L'_x}\ ,$$

$$L'_y = L_y\ ,\ L'_x = \frac{L_x}{\gamma}\ ,$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha' = \gamma\,\frac{L_y}{L_x} = \gamma\,\operatorname{tg}\alpha .$$

Koti se povečajo: $\operatorname{tg}\alpha' = \gamma \operatorname{tg}\alpha$.

② Palica pod kotom

$$\alpha' = 30^\circ, \quad \mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{1}{\sqrt{3}} = \gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{0{,}6}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = 0{,}8, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{1}{0{,}6} \qquad \Downarrow$$

$$\alpha = 19{,}1^\circ < \alpha' \text{ okv}$$

Vemo da je $L = 1\ \mathrm{m}$, zanima nas $L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2}$

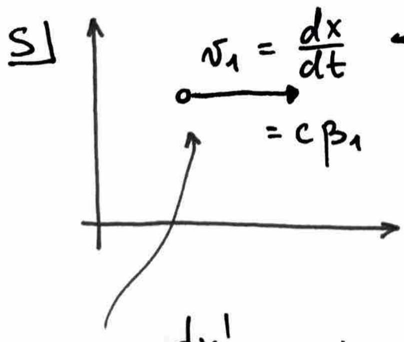
$$L_x = L\cos\alpha, \quad L_x' = \frac{L}{\gamma}\cos\alpha = L'\cos\alpha'$$

$$L_y = L\sin\alpha, \quad L_y' = L'\sin\alpha'$$

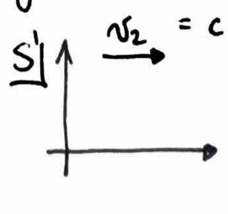
$$L' = L\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{\gamma}\right)^2 + \sin^2\alpha}$$

$$= 0{,}66\,\mathrm{m}.$$

RELATIVISTIČNO SEŠTEVANJE HITROSTI



← to je hitrost delca, ki jo izmerimo v S.



Sistem S' se oddaljuje s hitrostjo v_2.

$v_3 = \frac{dx'}{dt'}$ = hitrost istega delca, ki jo izmerimo v S'.

$$= \frac{c\, d(\gamma(x - \beta_2 c\,dt))}{c\, d(\gamma(t - \frac{\beta_2}{c}dx))} = c\,\frac{dx - \beta_2 c\,dt}{dt - \frac{\beta_2}{c}dx} \begin{matrix} /:dt \\ /:dt \end{matrix} = c\,\frac{v_1 - \beta_2 c}{1 - \beta_2\beta_1},$$

ALI : $\beta_3 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{1 - \beta_1\beta_2}$, če se približuje : $\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$.

(3) $v_1 = -v_2 = 0{,}99c$, se približuje. Klasično bi dobili

$$v_3 = v_1 + v_2 = 2 \times 0{,}99c > c \qquad \xrightarrow{v_1} \quad \xleftarrow{v_2}$$

V PTR dobimo: $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}99 = 1 - 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}01$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{2 \cdot 0{,}99}{1 + (0{,}99)^2} = \frac{2(1-0{,}01)}{2(1-0{,}01) + 0{,}01^2}$$

$$\simeq \frac{2}{2 + 10^{-4}} = \frac{1}{1 + 5 \cdot 10^{-5}} \sim 1 - 5 \cdot 10^{-5} = 0{,}99995 .$$

REŠEVANJE Z DOGODKI

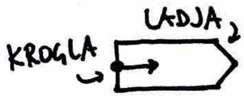
(4) $L = 100\,m$

$\beta = 0{,}5$

$v_k = 0{,}9c$

$t_{KL} = ?$

S|



se izstreli

$A(0,0)$

$B(ct_z, v_k t_z)$

S'|

krogla zadane sprednji del

$A'(0,0)$

$B'(ct_L, L)$

V lastnem sistemu ladje je dolžina L, čas ko krogla zadane zid je t_L. V sistemu S je čas t_z,

LADJA

razdalja pa je $v_k t_z = c\beta_k t_z$. Z ILT dobimo:

$$\left.\begin{aligned} ct_z &= \gamma\,(ct_L + \beta L) \\ v_k t_z &= \gamma\,(L + \beta ct_L) \end{aligned}\right) : \quad \Rightarrow \quad v_k = \frac{L + \beta ct_L}{ct_L + \beta L} ,$$

$$\Downarrow$$

$$ct_L = L\,\frac{1 - \beta\beta_k}{\beta_k - \beta} .$$

Alternativno lahko nalogo rešimo 'direktno' v sistemu ladje. Najprej določimo hitrost krogle v ladji s transformacijo hitrosti.

$$\beta_k' = \frac{\beta_k - \beta}{1 - \beta\beta_k} \quad \text{ali} \quad v_k' = \frac{v_k - v}{1 - v_k v / c^2}$$

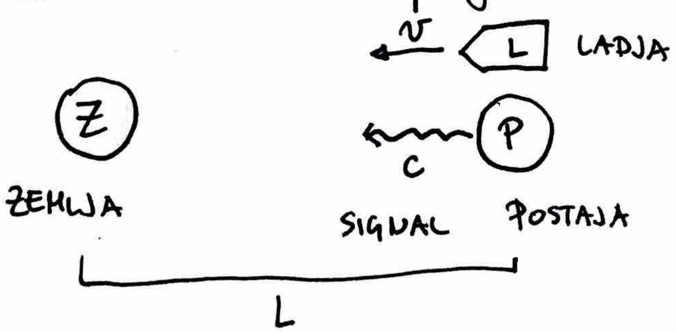
potem dobimo

$$t_{kL} = \frac{L}{v_k'} = \frac{L}{c}\,\frac{1 - \beta\beta_k}{\beta_k - \beta} = \frac{100\,\cancel{m}\,(1 - 0{,}45)}{0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\cancel{m}}{s}}$$

$$= 0{,}46\,\mu s$$

DOBIMO ISTI REZULTAT KOT Z DOGODK

(5) Podobno kot prej lahko rešimo direktno ali z dogodki.



$\beta = 0{,}6$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}36}} = \frac{1}{0{,}8}$$

$t_s = 1250\,s$

$t_z = ?$

$t_L = ?$

DIREKTNO: $L = c t_s$; signal prepotuje razdaljo L s hitrostjo c v času t_s

$$t_z = \frac{L}{v} = \frac{c t_s}{v} = \frac{1250\,s}{0{,}6} \sim 2000\,s$$; čas potovanja ladje izmerjen v S je L/v.

$$t_L = \frac{t_z}{\gamma} = 0{,}8 \cdot 2000\,s = 1600\,s$$; podaljšanje časa $t' = \gamma t$

merjeno v S na Zemlji — ura na ladji

REŠEVANJE Z DOGODKI

$$\begin{array}{ll} S] & A \ldots \text{ ladja začne s potjo } (0, \underset{}{\overset{ct_s}{\overset{\shortparallel}{L}}}) \\ & B \ldots \text{ ladja pride do zemlje } (ct_z, \underset{L-\beta c t_z}{\underset{\shortparallel}{0}}) \end{array}$$

Sedaj s standardno LT transformiramo v S'.

$$S'] \quad A' \left(ct_{1L} = \gamma (0 + \beta \overset{ct_z}{\overset{\shortparallel}{L}}), \gamma L \right)$$

$$B' \left(ct_{2L} = \gamma (ct_z - 0), \ \gamma (0 + \beta c t_z) \right)$$

$$\Delta t = t_L = t_{2L} - t_{1L} = \gamma t_z (1 - \beta^2) = \frac{t_z}{\gamma}.$$

Dobimo enak rezultat kot z direktnim računom.