Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Oddelek za fiziko

Seminar - 3. letnik

Interpretacija kvantne mehanike z vzporednimi svetovi

Avtor: Marko Medenjak
Mentor: prof. dr. Anton Ramšak

Ljubljana, 2012

Povzetek

V seminarju je predstavljena Everettova[1] interpretacija kvantne mehanike. V seminarju strnemo daljšo verzijo Everettove disertacije[2] in Everettovo interpretacijo navajamo kot eno od možnih rešitev "paradoksa", na katerega naletimo pri standardni interpretaciji. S pomočjo vpeljave relativne valovne funkcije smo najprej raziskali pojem meritve in nato še "subjektivno" izkušnjo posameznega opazovalca. Konec je posvečen procesu ojačitve in obravnavi konkretne meritve v okviru teorije univerzalne valovne funkcije.

[1] *Hugh Everett III*
[2] *Daljša verzija Everettove disertacije, imenovana The Theory of Universal Wavefunction je vsebovana v viru [1]. Krajša verzija je bila objavljena prej, vir [2].*

1 Uvod

"There was a time when the newspapers said that only twelve men understood the theory of relativity. I do not believe there ever was such a time. There might have been a time when only one man did, because he was the only guy who caught on, before he wrote his paper. But after people read the paper, a lot of people understood the theory of relativity in some way or other, certainly more than twelve. On the other hand, I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics." R. P. Feynman[3].

Zgoraj navedeni Feynmanov citat oriše glavni motiv za razvoj alternativnih interpretacij kvantne mehanike. Standardna interpretacija, ki v kvantni mehaniki vidi samo matematični model za računsko napoved rezultatov meritev, se ne spušča v fizikalno realnost obstoja valovne funkcije. Kljub konzerativnosti pa predstavi osnovni model, do postulatov katerega mora privesti katerakoli interpretacija kvantne mehanike, če naj velja za mogoč opis fizikalne realnosti. Tudi pri Everettovi interpretaciji je cilj vpeti postulate v širšo sliko in se na ta način izogniti nekaterim protislovnim rezultatom, do katerih pripelje standardna interpretacija. Da se izognemo kolapsu valovne funkcije, predpostavimo obstoj univerzalne valovne funkcije, ki opisuje stanje celotnega vesolja in se vedno in povsod razvija unitarno. V okviru predpostavke poskušamo opisati fenomen meritve. S predpostavko o obstoju univerzalne valovne funkcije izbrišemo mejo med mikroskopskim in makroskopskim[3], ki jo začrta večina ostalih interpretacij in obenem povrnemo deterministični razvoj stanja sistema na vseh nivojih. Interpretacija na vsakem koraku sledi matematičnemu formalizmu kvantne mehanike.

2 Težava standardne interpretacije

Standardna interpretacija pravi, da sistem lahko opišemo z valovno funkcijo, ki se spreminja deterministično skladno z:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{2.1}$$

dokler ne opravimo meritve. Ko opravimo meritev opazljivke A, pride do takojšnje spremembe merjenega sistema. Pri spremembi najdemo sistem v enem od lastnih stanj operatorja A z verjetnostjo, ki jo podajajo koeficijenti razvoja $|c_n|^2$ valovne funkcije po lastni bazi Ψ_n operatorja A.

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n \tag{2.2}$$

Sedaj lahko poskušamo obravnavati sistem prvega opazovalca O1 in sistema M, ki ga prvi opazovalec meri. To stanje spremlja drugi opazovalec O2. Drugi opazovalec pozna stanje (valovno funkcijo) skupnega sistema opazovalca O1 in sistema M. Njuno stanje zapiše z Ψ^{O1+M}. Običajno ne začrtamo natančne meje, do katere lahko sistem še opišemo z valovno funkcijo. Dokler drugi opazovalec ne opravi meritve, se valovna funkcija Ψ^{O1+M} razvija skladno z (2.1), ne glede na to ali opazovalec O1 izvede meritev sistema M[1]. Recimo, da je opazovalec O1 opravil meritev stanja M-ja, nato pa je še opazovalec O2 opravil meritev stanja O1+M. Opazovalec O2 lahko z gotovostjo trdi, da je prišlo do kolapsa stanja M[4] šele po lastni meritvi, s čimer pa se opazovalec O1 ne bo strinjal. Sistem M je bil v očeh opazovalca O1 v točno določenem stanju in meritev zunanjega opazovalca na njegov rezultat ni vplivala. [1][5]
Vidimo, da standardna interpretacija v danem primeru privede do protislovja, ki ga je mogoče rešiti na več načinov. Poleg predstavljenega paradoksa se poraja tudi vprašanje, kakšen naj bi bil fizikalni mehanizem kolapsa valovne funkcije. Ena od najpogostejših predpostavk je, da je kvantno mehanski opis omejen na mikroskopske sisteme. Tu se zastavlja vprašanje, zakaj bi veljal za makroskopske sisteme drugačen fizikalni opis kot za mikroskopske in zakaj se ne bi dalo zapisati valovne funkcije makroskopskega sistema, ki je sestavljena iz več mikroskopskih sistemov. Trditev, da je mehanski opis omejen na mikroskopske sisteme

[3] Schrödingerjeva enačba velja vedno in povsod.

[4] Tudi stanje O1 ni bilo določeno dokler ni opravil meritve O2.

[5] Valovna funkcija, ki jo spremlja O2, ni napovedala možnega obstoja le enega rezultata (tistega, ki ga je izmeril O1), saj bi bil proces kolapsa za O1 v tem primeru determinističen. [1]

bi držala, če kvantno mehanski opis ne bi bil zadosten niti za mikroskopski sistem, ali pa če bi prišlo do nekakšenga fizikalnega procesa, ki bi povzročil drugačno naravo makroskopskega sistema. Možnosti so tudi obstoj zgolj enega opazovalca ali obstoj skritih spremenljivk ter tudi predpostavka, da je kvantni opis pravilen ne glede na velikost sistema, ki se v vseh situacijah in na vseh krajih spreminja deterministično skladno z (2.1)[6]. S slednjo možnostjo se bomo ukvarjali v seminarju. Iz opisa izpustimo aksiom Kopenhagenske interpretacije o kolapsu valovne funkcije. [1]

3 Univerzalna valovna funkcija

Univerzalna valovna funkcija predstavlja fizikalni objekt, ki opisuje stanje vesolja in ni zgolj matematični opis. Zanima nas, če je v okvirih danega modela možno reproducirati fizikalni svet, ki ga zaznavamo. V tem poglavju se bomo posvetili obravnavi meritve in poskušali opisati lastnosti meritve. V naslednjem poglavju se bomo posvetili obravnavi opazovalcev.

3.1 Relativna valovna funkcija

Relativna stanja nas zanimajo zato, ker lahko preko njih opišemo stanje sistema in njemu relativno stanje opazovalca ter obratno. Sistem v kvantni mehaniki predstavimo z vektorji v Hilbertovem prostoru[1]. Hilbertov prostor je definiran kot prostor vseh funkcij v L^2, ki ima definiran skalarni produkt.

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_V \psi_1^*(\vec{r})\cdot\psi_2(\vec{r})d^3\vec{r} \tag{3.1}$$

Funkcijo ψ lahko predstavimo z vektorjem $|\psi\rangle$ v Hilbertovem prostoru .
Opazljivke v Hilbertovem prostoru opišemo s hermitskimi operatorji, katerih glavna lastnost so realne lastne vrednosti in ortogonalni lastni vektorji.
Če imamo dva sistema S_1 in S_2, ki ju oba opišemo s pripadajočima Hilbertovima prostoroma H_1 in H_2, potem skupni sistem $S = S_1 + S_2$ opišemo v hilbertovem prostoru, ki je direktni produkt danih dveh $H{=}H_1{\otimes}H_2$ [2]. Stanje sistema v prostoru H opišemo z vektorjem $|\psi^S\rangle = \sum_{ij} a_{ij}|\phi_i\nu_j\rangle$, kjer je $|\phi_i\rangle$ baza za H_1 in $|\nu_j\rangle$ baza za H_2 [2].
Vsako valovno funkcijo ψ^S lahko zapišemo kot vsoto členov ortonormirane baze $|\phi_i\rangle$ sistema S_1, ki jim pripišemo relativne vektorje $|\psi\rangle_{rel}^{\phi_j}$ v sistemu S_2, ki pa niso nujno ortogonalni.

$$|\psi\rangle^S = \sum_{i,j} b_{ij}|\nu_j\rangle|\phi_i\rangle = \sum_i 1/N_i|\psi\rangle_{rel}^{\phi_i}|\phi_i\rangle \tag{3.2}$$

$|\psi\rangle_{rel}^{\phi_j}$ daje pogojno pričakovano vrednost stanja sistema S_2, v dani bazi. [1]

$$|\psi\rangle_{rel}^{\phi_i} = N_i\sum_j b_{ij}|\nu_j\rangle \tag{3.3}$$

N_i je konstanta, ki normira relativno valovno funkcijo. Stanji podsistemov, v splošnem nista neodvisni eno od drugega. Določenemu stanju enega podsistema ustreza relativno stanje drugega podsistema. [2]

3.2 Meritev

V okviru teorije unvierzalne valovne funkcije, izvajanje meritev enega podsistema na drugega opišemo z interakcijo med sistemoma[1]. Ta interakcija mora zadoščati še dvema dodatnima zahtevama. Prva zahteva, da lahko določeno interakcijo med sistemoma klasificiramo kot meritev ene količine v opazovanem sistemu z drugo količino v merilnem sistemu, je da gre kanonična korelacija med podsistemoma s časom, h maksimumu. Za vpeljavo in definicijo informacije in korelacije glej 7.1. Potrebno je še zagotoviti, da se marginalna informacija opazovanega sistema ne zmanjšuje, kar pomeni da stanja sistema, ki ga merimo ne zmotimo, ker je to pogoj, da je meritev ponovljiva.[7] Sistem z nekoreliranima podsistemoma lahko zapišemo kot produkt stanj podsistemov $|\psi\rangle^S = |\psi\rangle^O|\psi\rangle^M$, kjer ustreza $|\psi\rangle^O$ opazovanemu sistemu, $|\psi\rangle^M$ pa merilnemu. Interakcijo med sistemoma opišemo s Hamiltonianom H. Takoj, ko sistema interagirata, stanja njunega skupnega sistema ni več mogoče zapisati kot produkt stanj podsistemov, ampak zgolj kot superpozicijo produktov, saj postaneta

[6] Lahko tudi v skladu z relativistično kvantno mehaniko...
[7] Drugi opazovalec, ki opravlja isto meritev, mora imeti enake pogoje kot prvi, če je drugi opazovalec s prvim nekoreliran.

sistema korelirana. Stanje sistema O postane odvisno od stanja M in obratno. Povezavo med sistemoma lahko enolično ovrednotimo s kanonično korelacijo. [1]

Primer meritve:[8]

Merilni aparat in opazovani sistem naj bosta na začetku neodvisna.

$$\psi^S(0,r,q) = \psi^O(q)\psi^M(r) \tag{3.4}$$

Tu sta r in q edini koordinati.
Interakcijo med njima opišemo s Hamiltonianom:[9]

$$H = -i\hbar q\frac{\partial}{\partial r} \tag{3.5}$$

Člen $-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$ je enak operatorju gibalne količine, ki deluje na merilni sistem, če je r kar prostorska koordinata. q ima todaj enote hitrosti in lahko rečemo, da je stanje opazovanega sistema porazdeljeno po hitrosti. Lahko si predstavljamo, da stanji opisujeta dva delca. Predpostavka je sicer nefizikalna[10], vendar primer pripomore h jasnosti obravnave.
Rešitev (2.1) je v danem primeru:

$$\psi^S(t,r,q) = \psi^O(q)\psi^M(r-qt) \tag{3.6}$$

[2], [1]
Vidimo, da pride do premika vektorja stanja merilnega sistema v Hilbertovem prostoru v odvisnosti od količine opazovanega sistema. V primeru, da je r prostorska koordinata je Hamiltonian, preko katerega sta sistema interagirala, dovedel merilnemu sistemu gibalno količino[11], ki je povzročila premik stanja merilnega delca sorazmerno s hitrostjo opazovanega delca. Časovni razvoj funkcije je mogoče zapisati tudi kot:

$$\psi^S(t,r,q) = \int \psi^O(q)\delta(r-r')\psi^M(r'-qt)dr' \tag{3.7}$$

Glede na lastno funkcijo stanja koordinate merilnega sistema, vpeljemo relativno funkcijo stanja:

$$\psi^{r'}_{rel}(t,q) = N_{r'}\psi^O(q)\psi^M(r'-qt) \tag{3.8}$$

Dana valovna funkcija nam pove, kakšno stanje opazovanega delca ustreza stanju, kjer je merilni delec na točno določenem kraju. Funkcija ni povsem ostra, saj istemu kraju lahko ustrezajo stanja opazovalnega delca z različno hitrostjo, ker merilni delec na začetku ni imel točno določene lege. Tu je $1/N_r$ normalizacijska konstanta relativne funkcije pri določenem r':

$$(\frac{1}{N_{r'}})^2 = \int \psi^{O*}(q)\psi^O(q)\psi^M(r'-qt)\psi^{M*}(r'-qt)dq \tag{3.9}$$

Funkcijo lahko zapišemo tudi kot:

$$\psi^S(t,r,q) = \int 1/N_{r'}\psi^{r'}_{rel}(t,q)\delta(r-r')dr' \tag{3.10}$$

Funkcija $\psi^{r'}_{rel}(t,q)$ je lastna funkcija stanja $q = r'/t$, če je čas interakcije dolg ali če je ψ^M dovolj ostra, saj je v tem primeru $\psi^{r'}_{rel}(t,q)$ skoraj $\delta(q-r'/t)$[12]. [2], [1]
Za natančnejšo obravnavo glej poglavje 7.2.
V konkretnem primeru si lahko predstavljamo, da po dolgem času[13] ni več pomembno, kje se je nahajal delec na začetku, ampak je njegova lega veliko bolj odvisna od hitrosti opazovanega delca, ki je preko interakcije povzročila njegov premik. Daljši kot je čas, bolj natančno ustreza posamezni legi tudi točno določena hitrost.

[8] To je primer, ki ga je obravnaval že Von Neumann in ga je Everett obdelal v okviru univerzalne valovne funkcije v viru [1], [2].

[9] Masa objektov je dovolj velika, da lahko zanemarimo kinetični člen.

[10] Predpostavka je nefizikalna, ker smo predpostavili, da je stanje enega sistema porazdeljeno le po koordinati, drugega pa le po hitrosti. Kot vemo, je valovna funkcija obeh delcev odvisna tako od gibalne količine, kot tudi od lege. Težava nastopi, ker pri predstavljenem primeru zahtevamo, da je hitrost merilnega delca na začetku 0 in bi zaradi tega morela predstavljati krajevni del valovne funkcije ravni val, če naj bo zadoščeno principu nedoločenosti. Ravnega vala ne moremo normirati in relativna funkcija se v takem primeru tudi ne bi s časom približevala δ.

[11] Drugi delec, fizikalno ne poseduje gibalne količine, vendar je vpliv interakcije identičen omenjenemu.

[12] Po obliki je to res, vendar mora biti $|\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{r'}_{rel}(t,q)|^2 = 1$.

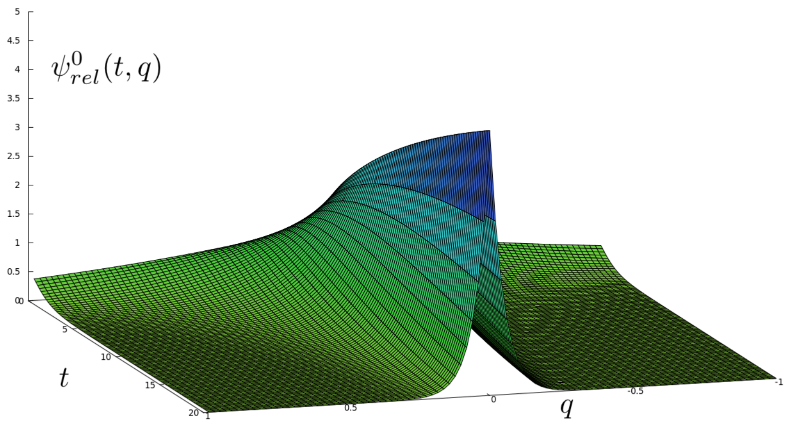
[13] Glede na začetno "razmazanost" lege merilnega sistema

Ko imamo na začetku povsem ostro določeno lego merilnega sistema, ustreza premik lege delca ravno $q \cdot t$. Tako dobimo superpozicijo leg merilnih sistemov, ki ustrezajo različnim izmerjenim hitrostim opazovanega sistema. Za primer spreminjanja relativne funkcije vzemimo, da je odvisnost obeh funkcij od svoje koordinate na začetku:

$$f(x) = e^{-|x|} \tag{3.11}$$

Opazujemo spreminjanje relativne funkcije pri opazovalcu z lastnim stanjem koordinate $r' = 0$. Predpostavimo, da v enačbi (3.29) nastopa brezdimenzijski čas. Relativna funkcija pri danih pogojih zavzame naslednjo obliko:

$$\psi^0_{rel}(t, q) = \sqrt{(1 + t)} \cdot \exp(-|q|(1 + t)) \tag{3.12}$$



Kot je razvidno iz grafa, se s časom relativna valovna funkcija res spreminja v $\sqrt{\delta(q - r'/t)}$[14].
Različnim legam opazovanega sistema ustrezajo natančno določene hitrosti merilnega sistema. Če predpostavimo da je proces enak zgoraj opisanemu pri vsaki meritvi in završemo kolaps valovne funkcije, ostaja zgolj še vprašanje, zakaj izmerimo le eno od lastnih vrednosti opazovanega sistema in zakaj prav to. Če na začetku nismo imeli opazovanega sistema v lastnem stanju opazovane količine, se končno stanje sistema nahaja v superpoziciji produktnih stanj podsistemov. Za obravnavo sistema v okviru korelacije in informacije glej poglavje 7.2.[15]

4 Obravnava opazovalcev

Odgovor na vprašanje, zakaj izmerimo le eno od lastnih vrednosti, je v okviru teorije univerzalne valovne funkcije povsem preprost in do njega pridemo brez dodatne predpostavke. Iz obravnavanega primera je razvidno, da različnim vrednostim opazovalnega sistema ustrezajo različne vrednosti merilnega sistema. Za nobeno vrednost merilnega sistema ne moremo trditi, da je bolj realna od druge. Prišlo je do razcepa stanja merilnega sistema ali opazovalca. Opazovalec je še vedno del istega fizikalnega sistema, vendar pa obstaja več stanj opazovalca. V tem poglavju želimo pokazati, da se naša interpretacija sklada z našimi opažanji, ki so omejena le na en element superpozicije, kljub temu da opazovalci v različnih členih superpozicije zaznajo različna stanja opazovanega sistema.

4.1 1 opazovalec

Glavni lastnosti "dobrega" opazovalca sta, da si opazovalec svoja opažanja zapomni in da se stanje opazovalca različno spremeni za vsako lastno stanje, ki ga izmeri. "Dobrega" opazovalca opazljivke A definiramo tako, da se stanje opazovalca z interakcijo, pri začetno stanje sistema

$$|\psi\rangle^S = |\phi_i\rangle|\psi\rangle^O_{[...]} \tag{4.1}$$

[14] Kvadrat valovne funkcije je normiran.

[15] Pri obravnavi meritev v okviru dekoherence, se vključi v obravnavo tudi okolica in zato opazovani ter merilni sistem nista več izolirana[4].

kjer so $|\phi_i\rangle$ lastni vektorji opazljivke A, $|\psi\rangle^{O}_{[...]}$ pa stanje opazovalca pred meritvijo opazljivke, spremeni v stanje

$$|\psi\rangle^{S'} = |\phi_i\rangle|\psi\rangle^{O'}_{[...,\alpha_i]} \tag{4.2}$$

kjer količina α_i karakterizira lastnost opazljivke A (npr. lastna vrednost). $_{[...]}$ karakterizira spominsko sosledje opazovalca. V spremembi spominske sekvence, je zajeta sprememba stanja opazovalca, ki se zgodi pri prej opisanem procesu meritve. [2]
Zaradi linearnosti Schrödingerjeve enačbe se

$$|\psi\rangle^{S} = |\phi\rangle|\psi\rangle^{O}_{[...]} \tag{4.3}$$

po meritvi spremeni v

$$|\psi\rangle^{S'} = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi\rangle^{O'}_{[...,\alpha_i]} \tag{4.4}$$

[2]. Zgornji rezultat sledi iz definicije (4.2) in dejstva, da če poznamo reštev Schrödingerjeve enačbe, za vsak člen superpozicije, potem je rešitev za vsoto členov, vsota rešitev za posamezen člen. $|\phi\rangle$ je začetno stanje merjenega sistema, ki ni nujno lastno $a_i = \langle\phi_i|\phi\rangle$. Skladno z obravnavanim primerom meritve vidimo, da je prišlo pri procesu do tega, da različnim vrednostim opazljivke A ustrezajo opazovalci, ki so te različne vrednosti izmerili. V procesu je prišlo do razcepa stanja opazovalca v superpozicijo njegovih stanj. Vsakemu členu superpozicije ustrezajo opazovalci, ki so zaznali različne lastne vrednosti. Opazovalec se torej nahaja v različnih stanjih, ki so nepovezana (prihodnji razvoj enega ne vpliva na prihodni razvoja drugega), delijo si le skupno preteklost. Kljub meritvi v okviru teorije ni prišlo do kolapsa, ampak se je valovna funkcija ob vseh časih razvijala skladno s Schrödingerjevo enačbo, enako kot pri obravnavanem primeru meritve. [2]
Začetno stanje je lahko sestavljeno iz več sistemov

$$|\psi\rangle^{S'} = |\phi\rangle|\nu\rangle|\psi\rangle^{O'}_{[...]} \tag{4.5}$$

Recimo, da opazovalec spet opravi meritev opazljivke A. Stanje sistema po meritvi opišemo z

$$|\psi\rangle^{S'} = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\nu\rangle|\psi\rangle^{O'}_{[...\alpha_i]} \tag{4.6}$$

Stanje drugega sistema in vsa stanja opazovalcev bodo neodvisna, kljub izvedeni meritvi stanja prvega sistema. Če opazovalec opravi še meritev drugega sistema, stanje skupnega sistema preide v

$$|\psi\rangle^{S''} = \sum_{ij} a_i b_j|\phi_i\rangle|\nu_j\rangle|\psi\rangle^{O''}_{[...\alpha_i,\beta_j]} \tag{4.7}$$

kjer je $b_j = \langle\nu_j|\nu\rangle$. Posamezno stanje opazovalca se je torej ponovno razcepilo. [1][16]
Dosedanje ugotovitve lahko strnemo v dve pravili:

1. pravilo: Meritev opazljivke A sistema S_1 spremeni začetno stanje

$$|\psi\rangle^{S1}|\psi\rangle^{S2}...|\psi\rangle^{O}_{[...]} \rightarrow \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi\rangle^{S2}...|\psi\rangle^{O}_{[...,\alpha_i]} \tag{4.8}$$

   kjer je $a_i = \langle\phi_i|\psi^{S1}\rangle$ in so $|\phi_i\rangle$ lastni vektorji opazljivke, ki jo želimo izmeriti.

2. pravilo: Pravilo 1 se lahko uporabi za vsak člen superpozicije posebej. [1], [2]

"Kolaps" valovne funkcije

Recimo, da opazovalec ponovi meritev. Začetno stanje lahko v tem primeru zapišemo kot

$$|\psi\rangle^{S} = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi\rangle^{O}_{[...,\alpha_i]} \tag{4.9}$$

Relativno valovno funkcijo, ki ustreza različnim stanjem opazovalca, lahko spet razvijemo po lastnih stanjih opazljivke, ki jo ta opazuje. Če meri opazovalec spet isto opazljivko, bo za ponovni razvoj veljalo:

[16] Obstajajo tudi teorije, ki predpostavljajo, da sta že na začetku obstajala dva opazovalca in sta se ob meritvi le ločila, vendar tak pristop ne razloži, zakaj je prvi zaznal eno vrednost, drugi pa drugo. Taka teorija ni deterministična.

$$b_{ij} = \langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij} \tag{4.10}$$

Tako, da dobimo po ponovljeni meritvi valovno funkcijo skupnega sistema, ki vsebuje le opazovalce, ki so obakrat izmerili isto lastno vrednost opazovanega sistema, saj so koeficijenti pred vsemi ostalimi 0.

$$|\psi\rangle^{S'} = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi\rangle^{O'}_{[...,\alpha_i,\alpha_i]} \tag{4.11}$$

Vidimo, da bo po meritvi ostal sistem za vsakega opazovalca posebej v lastnem stanju, ki ga je ta izmeril že ob prvi meritvi. Vsakemu opazovalcu se bo torej zdelo, da je prišlo do kolapsa valovne funkcije ter, da obstaja zgolj stanje opazovanega sistema, ki ga je sam izmeril.[1]
Če med dvema meritvama A-ja na istem sistemu opravimo meritev druge količine, ki z A-jem ne komutira, po drugi meritvi funkcija ni več v lastnem stanju prve količine:

$$|\psi\rangle^S = |\psi\rangle^{S1}|\psi\rangle^O_{[...]} \tag{4.12}$$

$$|\psi\rangle^{S'} = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi\rangle^O_{[...,\alpha_i]} \tag{4.13}$$

$$|\psi\rangle^{S''} = \sum_{ij} a_i\langle\nu_j|\phi_i\rangle|\nu_j\rangle|\psi\rangle^O_{[...,\alpha_i,\beta_j]} \tag{4.14}$$

Iz tega sledi, da v okviru teorije princip nedoločenosti ni kršen. [1]

Naključja rezultatov
Predpostavimo, da imamo več enakih sistemov, na katerih izvajamo meritev opazljivke A. Skupni sistem pred meritvijo opišemo z

$$|\psi\rangle^S = |\psi\rangle^{S1}|\psi\rangle^{S2}...|\psi\rangle^{Sn}|\psi\rangle^O_{[...]} \tag{4.15}$$

Meritve opravljamo na sistemih v vrstnem redu, ki se sklada z njihovimi indeksi. Ko opravimo prvo meritev dobimo:

$$|\psi\rangle^{S'} = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi\rangle^{S2}...|\psi\rangle^{Sn}|\psi\rangle^O_{[...\alpha_i]} \tag{4.16}$$

Po opravljeni n-ti meritvi, bo sistem v stanju:

$$|\psi\rangle^{S^{(n)}} = \sum_{ij..z} a_i a_j...a_z|\phi_i\rangle|\phi_j\rangle...|\phi_z\rangle...|\psi\rangle^{Sn}|\psi\rangle^O_{[...\alpha_i,\alpha_j,...,\alpha_z]} \tag{4.17}$$

Mera posameznega stanja sistema, ki ustreza opazovalcu, ki je izmeril določeno sekvenco meritev, je

$$M_{ij...z} = (a_i a_j...a_z)^*(a_i a_j...a_z) = (a_i^* a_i)(a_j^* a_j)...(a_z^* a_z) = M_i M_j...M_z \tag{4.18}$$

.[1] Izraz ustreza verjetnosti, da se bo opazovalec nahajal v določenem stanju.[17] Vidimo, da se bo "povprečnemu" opazovalcu zdelo, da je proces merjenja naključen. Seveda obstajajo tudi rešitve, kjer so vse izmerjene vrednosti enake. Če pa izvzamemo iz vektorja $|\psi\rangle^{S^n}$ vsa stanja, ki v prvem redu niso slučajna[18] in tak vektor zapišemo z $|\psi\rangle^{S^n}_\epsilon$ velja

$$\lim_{n\to\infty} ||\psi\rangle^{S^n} - |\psi\rangle^{S^n}_\epsilon| = 0 \tag{4.19}$$

[5]. Vidimo torej, da bodo po neskončnem številu opravljenih meritev skoraj vsi opazovalci opazili slučajne rezultate skladno z Bornovim pravilom, za stanjem valovne funkcije opazovanega sistema. Iz teorije univerzalne valovne funkcije izhaja tudi slučajnost naših izmerkov.
Kolaps valovne funkcije je ireverzibilen pojav, zato se zastavlja vprašanje, kako je ireverzibilnost zajeta v okviru teorije univerzalne valovne funkcije. Teorija univerzalne valovne funkcije je ireverzibilna za opazovalca, ki je zajet v sistemu in katerega stanja predstavimo z ortogonalnimi vektorji v Hilbertovem prostoru, saj prihodnji razvoj enega člena superpozicije ni odvisem od razvoja drugega člena. Za vsak opazovaca, ki je zajet v enem od členov superpozicije je prišlo do ireverzibilne spremembe in navideznega zmanjšanja informacije. [1]

[17] Everett pripiše stanjem mero in prek osnovnih lastnosti izpelje izraz. Povprečni opazovalc je definiran tudi v tem kontekstu, saj v limiti, ko gre število meritev v neskončnost, lahko obravnavamo skoraj vsakega opazovalca (skoraj vsak so vsi, ki nimajo mere 0). Everett govori o meri in ne verjetnosti, ki sta si matematično ekvivalentni [1], zaradi obravnave sistema iz perspektive univerzalne valovne funkcije in ne posameznega opazovalca, ker vsa stanja opazovalca obstajajo.

[18] To so tista stanja opazovalca, ki ne izmerijo stanj skladno z Bornovim pravilom. Za natančno definicijo glej [5]

4.2 Več opazovalcev

Teorijo univerzalne funkcije bomo ponazorili na primeru merjenja spinov dveh elektronov, ki ju merita dva različna opazovalca. Primer je na podoben način obravnavan v [6].[19] Naj bosta elektrona na začetku v singletnem stanju $|\psi\rangle^S = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. Stanje $|\uparrow\rangle$ je stanje delca s spinom $+\hbar/2$ v z smeri, $|\downarrow\rangle$ pa stanje s spinom $-\hbar/2$. Za kasnejšo obravnavo zapišimo še kako se izrazijo lastne funkcije x komponente spina s pomočjo z komponent. $|\rightarrow\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ ima lastno vrednost $-\hbar/2$, $|\leftarrow\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ pa ustreza lastni vrednosti $+\hbar/2$. Delca odletita narazen (kar ne vpliva na spinski del valovne funkcije) in stanje enega najprej izmeri prvi opazovalec, nato pa stanje drugega še drugi opazovalec. Opazovalca sta na začetku v stanju $|O_1\rangle_{[...]}$ in $|O_2\rangle_{[...]}$. Skupna valovna na začetku je $|\psi\rangle = |\psi\rangle^S|O_1\rangle_{[...]}|O_2\rangle_{[...]}$.
Recimo, da najprej opazovalec 1 izmeri spin v z smeri, temu pa sledi, še meritev opazovalca 2 v isti smeri.

$$|\psi\rangle' = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\downarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\uparrow]} - |\downarrow\uparrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\downarrow]})|O_2\rangle_{[...]} \tag{4.20}$$

$$|\psi\rangle'' = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\downarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\uparrow]}|O_2\rangle_{[...,\downarrow]} - |\downarrow\uparrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\downarrow]}|O_2\rangle_{[...,\uparrow]}) \tag{4.21}$$

Vidimo, da sta pri meritvah posledično postala oba opazovalca korelirana in bi se strinjala glede rezultatov. Korelacija bi lahko potekala tudi preko drugega kanala in bi eden od njiju šele kasneje opravil meritev (npr. prvi opazovalec drugemu pove, kaj je izmeril, pri čemer bi bil končni rezultat isti).
Sedaj se lotimo obravnave splošnejšega primera, pri katerem opazovalca ne merita spina v istih smereh. Predpostavimo, da drugi opazovalec meri komponento spina pravokotno glede na smer meritve prvega (v smeri x). Po meritvi prvega opazovalca je valovna funkcija enaka (4.20). Po drugi meritvi dobimo:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle'' = 1/2(-|\uparrow\rightarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\uparrow]}|O_2\rangle_{[...,\rightarrow]} - |\downarrow\leftarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\downarrow]}|O_2\rangle_{[...,\leftarrow]}+\\ +|\uparrow\leftarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\uparrow]}|O_2\rangle_{[...,\leftarrow]} - |\downarrow\rightarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\downarrow]}|O_2\rangle_{[...,\rightarrow]})\end{aligned} \tag{4.22}$$

[6]
Začetno stanje se je po meritvi razklopilo v dve stanji prvega in dve stanji drugega opazovalca. V očeh vsakega od opazovalcev se nahaja drugi opazovalec še vedno v superpoziciji dveh stanj.

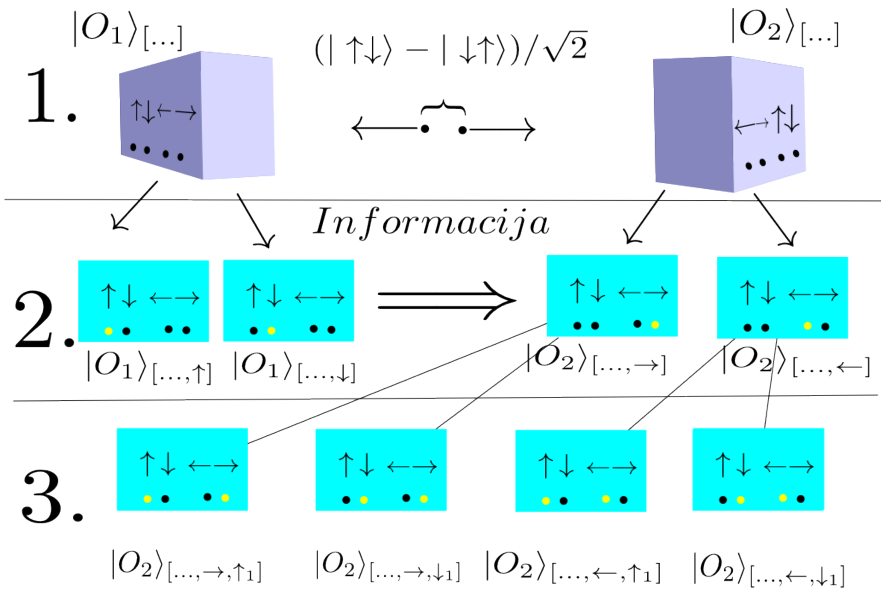
$$\begin{aligned}|\psi\rangle'' = 1/2|O_1\rangle_{[...,\uparrow]}(-|\uparrow\rightarrow\rangle|O_2\rangle_{[...,\rightarrow]} + |\uparrow\leftarrow\rangle|O_2\rangle_{[...,\leftarrow]})-\\ -1/2|O_1\rangle_{[...,\downarrow]}(|\downarrow\leftarrow\rangle|O_2\rangle_{[...,\leftarrow]} + |\downarrow\rightarrow\rangle|O_2\rangle_{[...,\rightarrow]})\end{aligned} \tag{4.23}$$

[6]
Enako lahko postopamo za drugega opazovalca. Če si oba opazovalca meritve tudi sporočita se njuno stanje razklopi na štiri elemente.

$$\begin{aligned}|\psi\rangle'' = 1/2(-|\uparrow\rightarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\uparrow,\rightarrow_2]}|O_2\rangle_{[...,\rightarrow,\uparrow_1]} - |\downarrow\leftarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\downarrow,\leftarrow_2]}|O_2\rangle_{[...,\leftarrow,\downarrow_1]}+\\ +|\uparrow\leftarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\uparrow,\leftarrow_2]}|O_2\rangle_{[...,\leftarrow,\uparrow_1]} - |\downarrow\rightarrow\rangle|O_1\rangle_{[...,\downarrow,\rightarrow_2]}|O_2\rangle_{[...,\rightarrow,\downarrow_1]})\end{aligned} \tag{4.24}$$

Indeks pri zaporedju pridobljenih informacij ponazarja informacijo, ki jo je eden opazovalec prejel od drugega. Shemo meritve in členjenje stanj opazovalca lahko tudi grafično ponazorimo. Pri spodnjem prikazu predstavlja prižgana lučka izmerjeno vrednost oziroma člen, ki se pojavi v spominski sekvenci opazovalca. Zaradi preglednosti so pri 3. točki zapisana le stanja drugega opazovalca, ki pa seveda enolično zrcalijo tudi stanje prvega opazovalca.

[19] To je ena od različic eksperimenta Einstein, Podolski in Rosen (EPR), s katerim so hoteli pokazati nepopolnost kvantno mehanskega opisa sveta, saj naj bi bila kvantna mehanika nelokalna (takojšenj vpliv spremembe prvega delca na drugega neglede na oddaljenost). [3]



Poleg načina uporabe interpretacije za več opazovalcev vidimo tudi, da interpretacija na preprost način razreši EPR paradoks. Razcep stanja vsakega od opazovalnih sistemov se je po prvi meritvi zgodil lokalno, pri drugi pa se tudi ni mogel zgoditi v krajšem času kot svetloba pripotuje od enega opazovalca do drugega. Pri tej interpretaciji tudi ni težav s tem, da elementi teorije ne bi imeli pravega fizikalnega pomena, kar je bila druga kritika, ki jo je izpostavila trojica EPR.

5 Primer meritve z Geigerjevim števcem

Pri obravnavanem primeru je nakazano, kako v okviru interpretacije poteka prenos informacije o izmerku iz mikroskopskega sistema do makroskopskega opazovalca. Ojačitev dobimo zaradi metastabilnega stanja atomov plina v geigerjevem števcu, saj se pri spremembi majhnega števila atomov iz metastabilnega stanja prične verižna reakcija, ki na koncu privede do makroskopskega signala . Metastabilno stanje vzdržujemo s pomočjo močnega električnega polja. Glavna lastnost merilnih naprav je, da se skupek mikroskopskih sistemov, zaradi korelacije, obnaša kot enota in ga je mogoče kot takega tudi obravnavati. [1]
V tem primeru lahko zapišemo valovno funkcijo števca kot

$$|\psi\rangle^G = a|N\rangle + b|S\rangle \tag{5.1}$$

Tu $|N\rangle$ predstavlja nesprožen števec, $|S\rangle$ pa vsa možna produktna stanja valovnih funkcij, pri katerih pride do sprožitev Geigerjevega števca.[20] Stanje objekta, ki ga opazujemo z Geigerjevim števcem, lahko v trenutku, ko se objekt nahaja tik pred števcem, opišemo z valovno funkcijo

$$|\phi\rangle = \alpha|\phi\rangle_1 + \beta|\phi\rangle_2 \tag{5.2}$$

$|\phi\rangle_1$ predstavlja del valovne funkcije, pri kateri pot v naslednjem trenutku poteka skozi Geigerjev števec, $|\phi\rangle_2$ pa del, ki ne gre skozi in ga posledično ne sproži. [1]
Sistem je na začetku v stanju:

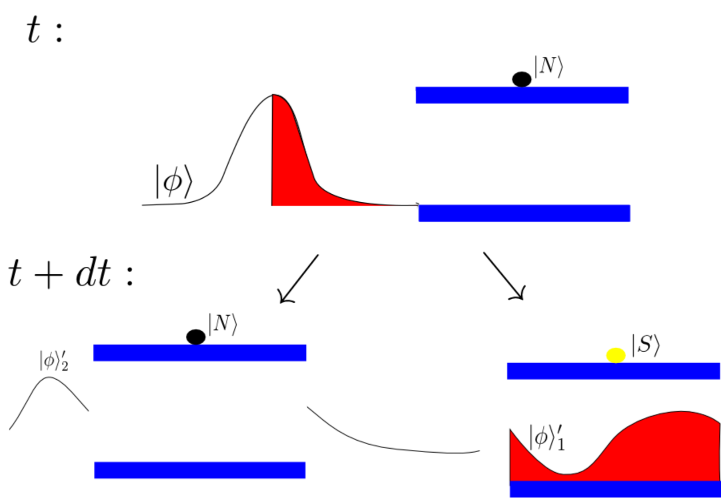
$$|\psi\rangle = (\alpha|\phi\rangle_1 + \beta|\phi\rangle_2)|N\rangle \tag{5.3}$$

$|\phi\rangle_1$ se po interakciji spremeni v $|\phi\rangle_1'$, $|\phi\rangle_2$ pa v $|\phi\rangle_2'$. Tako dobimo končno stanje sistema, ki sestoji iz:

$$|\psi\rangle' = (\alpha|\phi\rangle_1'|S\rangle + \beta|\phi\rangle_2'|N\rangle) \tag{5.4}$$

Tako je bila opravljena približna meritev lege delca. Valovna funkcija delca je lokalizirana bodisi v števcu, bodisi izven njega. Tema dvema stanjema ustrezata tudi odziva števca. [1]
Sedaj interakcijo in stanja še grafično upodobimo.

[20]Mejo nastavimo približno na polovici. Meja je dobro definirana, saj je delež delcev v metastabilnem stanju ali zelo velik ali zelo majhen. Za formalen zapis obeh stanj Geigerjevega števca glej [1].



Rdeči del pred meritvijo ustreza tistemu delu valovne funkcije, ki bo po meritvi lokaliziran v Geigerjevem števcu. Stanje merilnega sistema se je skladno z opazovanim sistemom razdelil na prvega, pri katerem relativna valovna funkcija delca zavzema ves prostor razen merilca in drugega, katerega relativna valovna funkcija delca je lokalizirana v merilcu [1].

6 Zaključek

Interpretacija temelji na univerzalni pravilnosti Schrödingerjeve enačbe in predpostavi objektivni obstoj valovne funkcije. Zaradi svoje splošnosti je priljubljena med kozmologi. Interpretacija brez težav opravi tudi s problemom nelokalnosti in z EPR paradoksom, zato predstavlja močno alternativo Kopenhagenski interpretaciji. Sama teorija je homogena in preprosta. Teorijo smo predstavili v okviru Everettove prvotne zamisli. O tem, da teorija tudi praktično ni povsem neuporabna priča dejstvo, da je bila, z nekoliko spremenjeno formulacijo, izračunana pričakovana količina temne energije, ki se zelo dobro ujema z izmerjeno vrednostjo [7].

7 Dodatek

7.1 Izpeljava $\psi_{rel}^{r'}(t,q)$ je skoraj $\delta(q-r'/t)$

Predpostavimo, da se valovno funkcijo merilnega sistema $\psi^M(r)$ da normirati. Potem mora veljati naslednje:

$$\lim_{r\to\infty}(\psi^M(r)) = 0 \tag{7.1}$$

Iz tega sledi tudi:

$$\lim_{t\to\infty}(\psi^M(r'-qt)) = 0 \tag{7.2}$$

razen, če velja $r' = qt$. Vemo, da mora veljati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^M(r'-qt)|^2 = 1 \tag{7.3}$$

Obema pogojema ustreza:

$$\psi^M(r'-qt) = \sqrt{\delta(r'-qt)} \tag{7.4}$$

Če sedaj zapišemo celotno relativno valovno funkcijo dobimo:

$$\psi_{rel}^{r'}(t,q) = N_{r'}\psi^O(q)\sqrt{\delta(r'-qt)} \tag{7.5}$$

Ker velja, da je $\sqrt{\delta(r'-qt)} = 0$ povsod razen ko je $r' = qt$ lahko zapišemo tudi:

$$\psi_{rel}^{r'}(t,q) = N_{r'}\psi^O(\frac{r'}{t})\sqrt{\delta(\frac{r'}{t}-q)/t} \tag{7.6}$$

Upoštevali smo tudi osnovno lastnost delta funkcije. α je že vsebovan v normalizacijski konstanti. Sedaj želimo izračunati še normalizacijsko konstanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{rel}^{r'}(t,q)|^2 dq = 1 \tag{7.7}$$

$$N_{r'} = \sqrt{t}/\psi^O(\frac{r'}{t}) \tag{7.8}$$

S tem smo prišli do končnega rezultata:

$$\psi_{rel}^{r'}(t,q) = \sqrt{\delta(q - r'/t)} \tag{7.9}$$

7.2 Verjetnosti, informacije in korelacije[21]

ψ^S opisuje skupno stanje sistema. $|\phi_i\rangle$ so baza hilbertovega prostora podsistema S_1, $|\nu_j\rangle$ pa je baza podsistema S_2. Razlog, da se v teoriji univerzalne funkcije uvaja pojme iz teorije verjetnosti in informacije je ta, da je preko korelacije mogoče kvantitativno obravnavati dogajanje v kvantnih podsistemih, ki med seboj interagirajo in omogoča definicijo meritve.

Verjetnost:

Verjetnostno porazdelitev za $|\psi^S\rangle$ v bazi $|\phi_i\rangle$ in $|\nu_j\rangle$ lahko v kvantni mehaniki zapišemo kot

$$P_{ij} = |\langle \phi_i \nu_j | \psi^s \rangle|^2 \tag{7.10}$$

[1] Izraz predstavlja verjetnostno porazdelitev stanja sistema sestavljenega iz dveh podsistemov. Verjetnostna porazdelitev za posamezni sistem, je povsem analogna. (Glej 2. poglavje)

Informacija:[22]

Definirajmo informacijo za kvantni sistem:

$$I = \sum_i P_i ln(P_i) = \sum_i |\langle \phi_i | \psi \rangle|^2 \ln(|\langle \phi_i | \psi \rangle|^2) \tag{7.11}$$

Informacija opisuje *'ostrino'* verjetnostne porazdelitve našega stanja v izbrani bazi. Izraz bi lahko posplošimo tudi na sestavljene kvantne sisteme. [1]

Predpostavimo, da imamo sistem z n različnimi stanji, ki jih opišemo z $|\phi_i\rangle$. Če je sistem v točno določenem stanju, je po zgornji definiciji $I = 0$, če pa je stanje sistema opisano z valovno funkcijo, kjer so vsa stanja enako verjetna, pridemo do rezultata $I = -ln(n)$. V tem primeru je informacija stanja najmanjša. Vidimo torej, da je zgornja definicija informacije skladna z našo intuicijo.

Korelacija:

Korelacija med dvema objektoma je vrednost, ki pove, kako natančno je definirano stanje enega podsistema glede na neko lastno stanje drugega podsistema, zato mora biti takšna tudi matematična formulacija. Korelacijo lahko zapišemo kot:
[23]

$$C_{A,B} = I_{AB} - I_B - I_A \tag{7.12}$$

$$C_{A,B} = \sum_{ij} P_{ij} \ln(P_{ij}/P_i \cdot P_j) \tag{7.13}$$

[1]. Če sta sistema popolnoma neodvisna, je $P_{ij} = P_i \cdot P_j$ in je korelacija 0. Ko sta sistema popolnoma povezana (kvantno prepletena) in je $P_{ij} = P_i \delta_{ij}$, znaša korelacija $C_{A,B}(\psi^S) = -\sum_i P_i ln(P_i)$. Korelacija v tem primeru doseže maksimalno vrednost. Taki korelaciji pravimo tudi kanonična korelacija sistemov S_1 in S_2 in jo označimo z C_{S_1,S_2}. V tem primeru lahko stanje skupnega sistema opišemo z valovno funkcijo naslednje oblike:

$$|\psi\rangle^S = \sum_i a_i |\phi_i\rangle |\nu_i\rangle \tag{7.14}$$

$|\phi_i\rangle in |\nu_i\rangle$, sta seta baznih vektorjev Hilbertovih prostov. [1]

[21] Danes se pogosto namesto korelacije uporablja izraz prepletenost.

[22] Kasnejši avtorji, ki se ukvarjajo predvsem s procesom dekoherence, raje kot o informaciji, govorijo o entropiji, ki je negativna vrednost informacije

[23] Za splošnejšo definicijo glej [1]

7.3 Obravnava primera v okviru korelacije in informacije:[24]

Pri obravnavi primera s stališča informacije in korelacije je potrebno (3.24) zapisati kot:

$$P(t,r,q) = \psi^{S*}(t,r,q)\psi^{S}(t,r,q) \tag{7.15}$$

Verjetnostna porazdelitev je po interakciji:

$$P(t,r,q) = P^{M}(q)P^{O}(r-qt) \tag{7.16}$$

Vrednost medsebojne povezanosti sistemov nam podaja korelacija:

$$C_{O,M} = I_{OM} - I_{O} - I_{M} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned} I_{OM}(t) &= \iint P^{M}(q)P^{O}(r-qt)ln(P^{M}(q)P^{O}(r-qt))dqdr = \\ &= \iint P^{M}(q)P^{O}(w)ln(P^{M}(q)P^{O}(w))dqdw = I_{OM}(0) \end{aligned} \tag{7.18}$$

Upoštevali smo, da je pri uvedbi novih spremenljivk Jackobijeva determinanta enaka 1. [1]
Očitno je:

$$I_{O}(t) = I_{O}(0) \tag{7.19}$$

Torej se spreminja le I_O. Po izpeljavi, ki je opisana v [1], dobimo naslednji približek:

$$I_{M}(t) \leq I_{M}(0) - \ln(t) \tag{7.20}$$

Tako lahko zapišemo:

$$C_{O,M} \geq I_{OM}(0) - 2I_{O}(0) + \ln(t) \tag{7.21}$$

Upoštevamo še, da sta bila sistema ob času 0 neodvisna, torej velja $I_{OM}(0) = I_{O}(0) + I_{M}(0)$ in tako dobimo končni rezultat:

$$C_{O,M} \geq I_{M}(0) - I_{O}(0) + \ln(t) \tag{7.22}$$

V neskončnosti korelacija divergira, kar se sklada s pogojem, da mora iti korelacija proti maksimumu, ki je v zveznih primerih ∞. [1]

8 Viri

[1] Bryce Seligman DeWitt, R. Neill Graham, eds. *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1973.
[2] Hugh Everett. *"Relative state" formulation of quantum mechanics*. Rev. Mod. Phys., 29(3):454–462, Jul 1957.
[3] Franz Schwabl. *Quantum Mechanics*. Springer, 1995.
[4] Wojciech H. Zurek. *Decoherence and Transition from Quantum to Classica*l. Physics Today, vol. 44, issue 10, pp. 36-44, 1991.
[5] Bryce S. DeWitt. *Quantum Mechanics and Reality*. Physics Today, Vol. 23 No. 9 pp. 30-35, September 1970.
[6] *The Everett FAQ* [Dostopno na daljavo]. [citirano 18. 2. 2012]. Dostopno na svetovnem spletu: <http://www.hedweb.com/everett/everett.htm>
[7] Amanda Gefter. *Touching the multiverse. New Scientist,* 2750: 28-31, 6 March 2010

[24] Povzeto po [1].