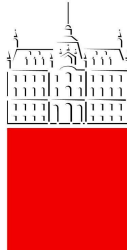


Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Seminar

Feynmanova interpretacija kvantne mehanike in primeri reševanja problemov

Avtor: Gal Lemut

Mentor: prof. dr. Anton Ramšak

31. maj 2016, Ljubljana

Povzetek

Vsi poznamo kvantno mehaniko predstavljeno s Schrödingerjevo enačbo in valovno funkcijo, vendar to ni edini način računanja v kvantnem svetu. Tudi ameriški fizik Richard Feynman je predstavil svojo formulacijo kvantne mehanike s pomočjo popotnih integralov. Ta nam sicer ne predstavlja novih rešitev, temveč le drugačen pogled na že znane probleme, kot so naprimer prosti delec, harmonski oscilator in Aharon-Bohmov pojav.

Kazalo

1	Uvod	2
2	Popotni integral	3
2.1	Riemannov integral	3
2.2	Feynmanov popotni integral	3
2.3	Produktno pravilo za seštevanje	5
3	Prosti delec	6
4	Jedro in valovna funkcija	8
4.1	Feynmanovo jedro kot integralska oblika Schrödingerjeve enačbe	8
4.2	Propagator in Evklidska strategija	10
4.3	Izpeljava klasične Schrödingerjeve enačbe	10
5	Potencial in harmonski oscilator	12
5.1	Izračun jedra in Gaussovi integrali	12
5.2	Jedro za harmonski oscilator	13
6	Aharon-Bohmov pojav	16
7	Zaključek	17
8	Dodatek: Primer za ravni val	18

1 Uvod

Že od samega začetka kvantne mehanike, je bila razlaga njenih rezultatov vedno pod vprašajem. Tako se je kvantna mehanika v začetku obravnavala na dva različna načina. Vzporedno sta se razvijali Heisenbergova matrična formulacija in Schrödingerjeva diferencialna oblika.

Približno 20 let kasneje pa je ameriški fizik Richard Feynman predstavil tudi tretjo alternativno formulacijo s pomočjo popotnega integrala. Ta je osnovana na principu klasične akcije, kjer za razliko od klasične fizike, upoštevamo vse možne poti. Kljub temu, da je ta teorija lažje povezljiva s klasično mehaniko, je zaradi kompleksnosti popotnega integrala v večini primerov uporaba Schrödingerjeve enačbe za izračun valovnih funkcij precej enostavnejša. Vseeno pa je Feynmanova interpretacija zelo pomembna za globlje razumevanje kvantne mehanike in numerično reševanje določenih problemov. V tem seminarju bom predstavil formulacijo Feynmanovih jeder in njihove osnovne značilnosti. Posvetili se bomo analitičnemu načinu reševanja problemov, kot sta prosti delec in Harmonski oscilator, ter si pogledali njune rešitve.



Slika 1: Richard Feynman.¹

2 Popotni integral

2.1 Riemannov integral

Za razumevanje popotnega integrala se najprej spomnimo Riemannove definicije integrala, pri katerem smo poizkušali izračunati ploščino pod poljubno krivuljo.

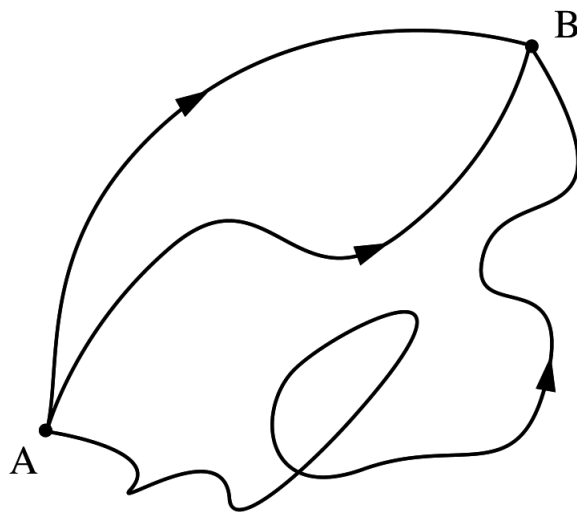
$$y = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

Pri tem smo razdelili interval $[a, b]$ na n intervalov ter vsakemu intervalu pripisali vrednost x_n , $n \in [0, N - 1]$. Tako smo definirali integral kot limito, ko gre n v neskončnost in velikost intervalov proti 0.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \quad (2)$$

2.2 Feynmanov popotni integral

Pri popotnem integralu je razmislek podoben, le da želimo sešteti vse možne poti med dvema točkama.

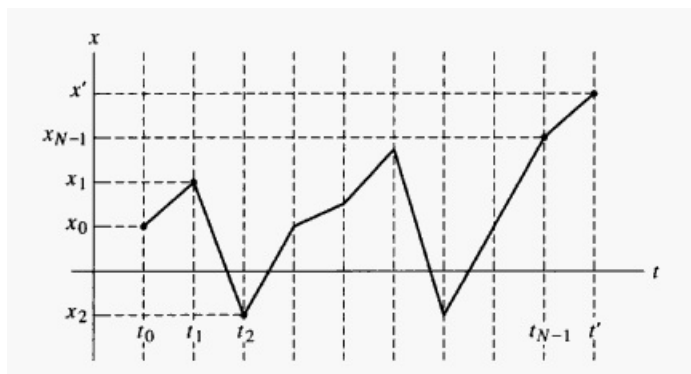


Slika 2: Primeri različnih poti med točkama A in B.²

Najprej definiramo pot med dvema točkama. Razdelimo časovni interval $[t_a, t_b]$ na N delov z dolžino ϵ in za vsak čas t_n izberemo točko x_n . Vsaka pot bo, tako tekla po neki množici

točk $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$. S tem smo zdaj definirali množico poti in lahko po njih seštevamo z integracijo po spremenljivkah x_n za $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, (N-1)\}$ v vsaki točki t_n kjer velja:^{3,4}

$$\begin{aligned} t_b - t_a &= n\epsilon & (3) \\ t_{n+1} &= t_n + \epsilon \\ t_0 &= t_a, t_{N-1} = t_b \\ x_0 &= a, x_{N-1} = b \end{aligned}$$



Slika 3: Delitev poti na intervale t_n pri pozicijah x_n ob tem času.⁵

Tako dobimo $N - 2$ -kratni integral, ker sta točki x_0 in x_{N-1} pritrjeni na poziciji a in b .

$$K(b, a) \sim \int \int \dots \int \phi[x(t)] dx_1 dx_2 \dots dx_{N-2} \quad (4)$$

Zdaj moramo N poslati v neskončnost, da dobimo res vsoto po vseh poteh. Tako kot pri Riemannovem integralu, moramo tudi tu definirati normalizacijski faktor, ki bo odvisen od ϵ , da bo ta limita sploh lahko obstajala. Faktor A pa na žalost ne moremo v splošnem definirati, vendar se za naše primere, kjer uporabljamo enačbo klasične akcije izkaže, da je ta normalizacijski faktor kar $A^{(N-1)}$ kjer za A velja:^{3,4}

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Zdaj lahko splošno definiramo popotni integral med a in b .

$$\int_a^b F_{(b,a)}[(x(t))] \mathcal{D}x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int \int \dots \int F_{(b,a)}[(x(t))] \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_{N-2}}{A} \quad (6)$$

V Feynmannovi formulaciji kvantne mehanike uporabimo popotni integral za definicijo jedra, ki nam pove verjetnostno amplitudo, da je nek delec prišel iz točke a v točko b . V izpeljavo te formule se v tem seminarju ne bomo poglobljali in jo bomo le zapisali kot:

$$\mathcal{K}(b, a) = \int_a^b e^{(\frac{i}{\hbar})S[b, a]} \mathcal{D}x \quad (7)$$

kjer $S[b, a]$ predstavlja klasično akcijo po poti med a in b .

$$S[b, a] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\dot{x}, x, t) dt \quad (8)$$

2.3 Produktno pravilo za seštevanje

Zdaj, ko imamo zapisano pravilo za izračun verjetnostne amplitude, si pogledjmo še, kako se te med seboj seštevajo. Predstavljajmo si, da imamo med začetnim časom t_a in končnim časom t_b še nek vmesni dogodek, ki se zgodi ob času t_c . Potem lahko zapišemo akcijo in jedro kot:³

$$S[b, a] = S[c, a] + S[b, c] \quad (9)$$

$$\mathcal{K}(b, a) = \int_a^b e^{(\frac{i}{\hbar})S[b, a]} \mathcal{D}x = \int_a^b e^{(\frac{i}{\hbar})(S[c, a] + S[b, c])} \mathcal{D}x \quad (10)$$

Iz tega vidimo, da lahko najprej izvedemo integracijo po poteh od a do c , nato po poteh od c do b in nazadnje še po vseh vrednostih vmesne točke c .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(b, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_c^b e^{(\frac{i}{\hbar})(S[c, a] + S[b, c])} \mathcal{D}x(t) dx_c \\ \mathcal{K}(b, a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(b, c) \mathcal{K}(c, a) \end{aligned} \quad (11)$$

Če to pravilo posplošimo za poljubno število zaporednih dogodkov dobimo:

$$\mathcal{K}(b, a) = \int \int \dots \int \mathcal{K}(b, N-1) \mathcal{K}(N-1, N-2) \dots \mathcal{K}(i, i-1) \dots \mathcal{K}(1, a) dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \quad (12)$$

Tako lahko definiramo med točkama a in b , N vmesnih točk in dobimo jedra, ločena z zelo kratkimi časovnimi intervali:

$$\mathcal{K}(n, n-1) = \int_{x_n}^{x_{n-1}} e^{(\frac{i}{\hbar})S[n, n-1]} \mathcal{D}x \quad (13)$$

$$S[n, n-1] = \epsilon \mathcal{L}\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon}, \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \frac{t_n - t_{n-1}}{2}\right) \quad (14)$$

Na ta način lahko zapišemo skupno jedro med točkama a in b kot produkt manjših jeder za n kratkih intervalov, ko limitiramo dolžino intervala $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\mathcal{K}(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{n=1}^N \mathcal{K}(n, n-1) \quad (15)$$

3 Prosti delec

No, pa si pogledjmo kako ta formalizem deluje. Vzemimo primer prostega delca z Lagrangovo funkcijo:³

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (16)$$

in definiramo akcijo za nek kratek interval med x_n in x_{n-1} kot

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\epsilon} \quad (17)$$

Tako lahko potem zapišemo definicijo jedra za prosti delec, ki ga bomo od zdaj naprej označevali s \mathcal{K}_0 .

$$\mathcal{K}_0(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right)^{(N/2)} \int \int \dots \int \exp\left\{\frac{im}{2\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\epsilon}\right\} dx_1 \dots dx_{N-1} \quad (18)$$

Tu moramo rešiti set Gaussovih integralov, katerih integracijo lahko zapišemo kot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{(x_2 - x_1)^2 + (x_1 + x_0)^2\right\} dx_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{(x_2 + x_0)^2} \quad (19)$$

Če to pomnožimo z Gaussovo funkcijo, ki vsebuje x_3 , x_2 in integriramo po x_2 nam enak postopek da rezultat:

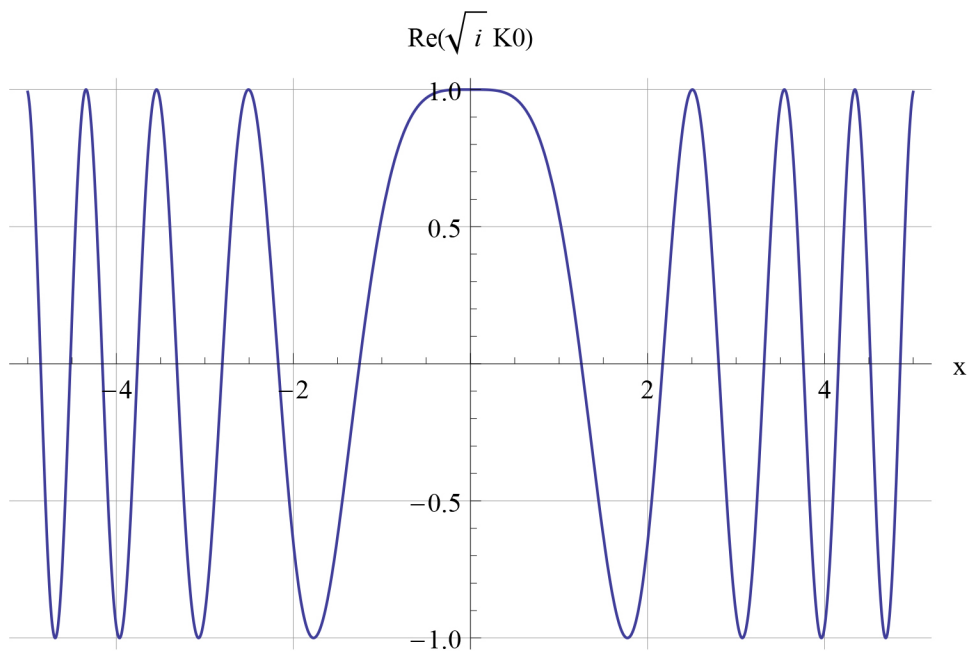
$$\sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{(x_3 + x_0)^2}$$

Ko ta postopek ponovimo $(N - 1)$ -krat z rekurzijo in upoštevamo, da velja

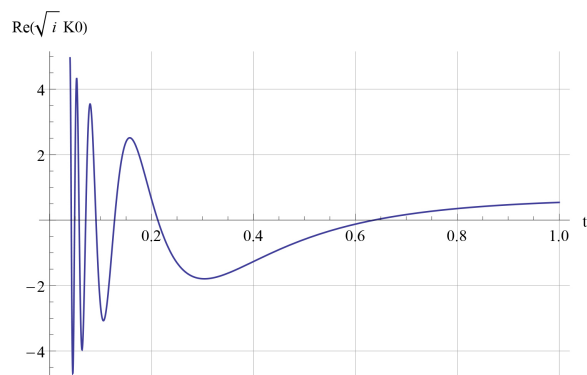
$$n\epsilon = (t_b - t_a)$$

dobimo rezultat, ki ga lahko uporabimo za izračun jedra za prosti delec, ki se potem glasi:³

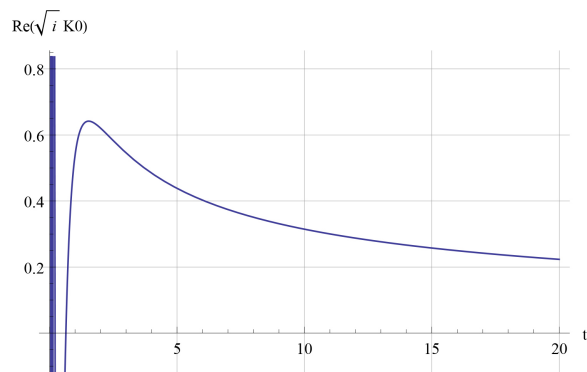
$$\mathcal{K}_0(b, a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}} \exp\left\{\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}\right\} \quad (20)$$



Slika 4: Odvisnost $\Re(\sqrt{i}\mathcal{K}_0)$ od neke relativne pozicije x pri predpostavki, da je začetna točka $x_0 = 0$



Slika 5: Odvisnost $\Re(\sqrt{i\mathcal{K}_0})$ od relativnega časa t pri predpostavki, da je ob začetni točki čas $t_0 = 0$



Slika 6: Odvisnost $\Re(\sqrt{i\mathcal{K}_0})(t)$ za daljše čase po pričakovanju upada.

4 Jedro in valovna funkcija

4.1 Feynmanovo jedro kot integralska oblika Schrödingerjeve enačbe

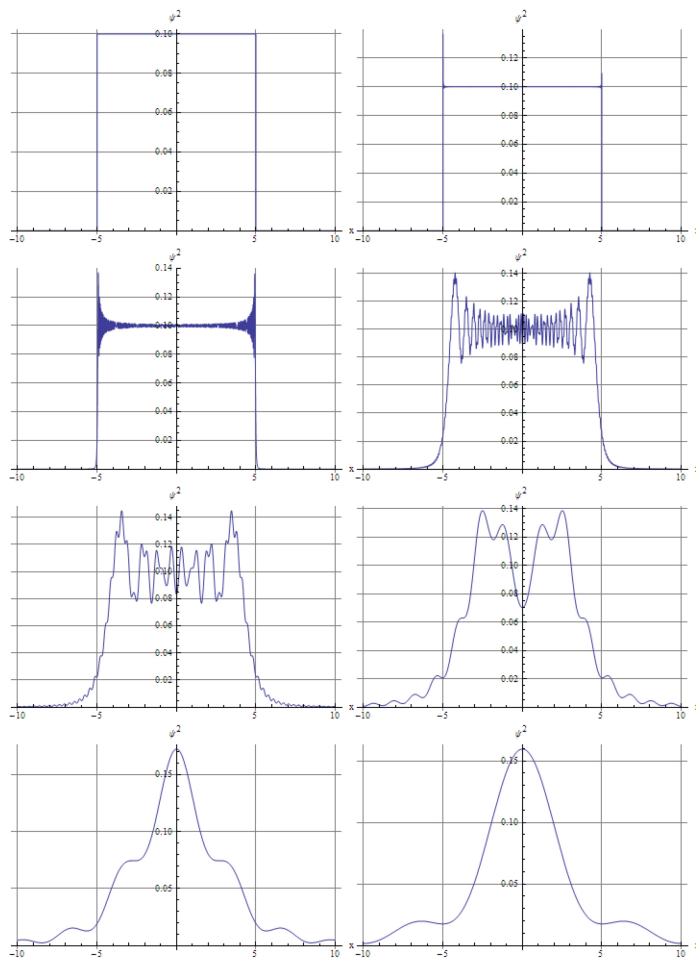
Zdaj, ko že znamo po definiciji izračunati jedro za prosti delec, pa si pogledjmo, kaj to jedro pravzaprav predstavlja in kako se povezuje z vsem bolj poznano Schrödingerjevo valovno funkcijo. Jedro smo definirali s pomočjo popotnega integrala, ki upošteva akcije vseh možnih poti. Predstavlja nam verjetnostno amplitudo, da se je naš delec, ki je bil ob času t_a v točki a , ob času t_b znašel v točki b . Schrödingerjeva valovna funkcija pa nam za razliko od Feynmanovega jedra pove verjetnostno amplitudo, da se nek delec ob času t nahaja v točki x ne glede na njegov kraj in čas izvora.

To nas pripelje do razmisleka, da če bi sešteli verjetnostne amplitude jeder, ki se ob času t_b znajdejo v točki b po vseh možnih izvornih časih t_a in točkah a , bi lahko izračunali tudi valovno

funkcijo tega delca. Tako lahko pri začetni verjetnostni gostoti $\psi(x_0, t_0)$ s pomočjo jeder zapišemo izraz za valovno funkcijo ob nekem poznejšem kraju in času.⁶

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, x_0, t, t_0) \psi(x_0, t_0) dx_0 \quad (21)$$

Jedro nam prek te enačbe predstavlja propagator valovne funkcije oziroma neke vrste integral-ski zapis Schrödingerjeve enačbe, saj lahko iz, nekega začetnega stanja s pomočjo jedra, dobimo poljubno kasnejše stanje.



Slika 7: Slika prikazuje primer propagiranja škatlaste valovne funkcije, z jedrom za prosti delec, pri različnih sledečih relativnih časih. Kot zanimivost opazimo, da je to ekvivalentno Fresnelovem uklonskem integralu za pravokotno režo. Integrala, ki se pojavita v teh dveh primerih sta matematično ekvivalentna, kar je tudi nekako smiselno saj v obeh primerih propagiramo neke vrste ravne valove z začetno škatlasto porazdelitvijo.

4.2 Propagator in Evklidska strategija

Za lažjo predstavo pomena propagatorja si lahko, podobno kot v primeru Schrödingerjeve enačbe, pomagamo z difuzijsko enačbo. Za to enačbo vemo, da nam propagator predstavlja Gaussova funkcija.⁶

$$\mathcal{P}(x, x_0, t, t_0) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} \quad (22)$$

Za difuzijsko enačbo vemo, da če naprimer vzamemo začetno porazdelitev $\Phi(x_0, t_0) = \delta(x_0)$ in uporabimo formulo [21] za propagator, lahko zapišemo stanje ob poljubnem času kar kot $\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}$.

Pri preskoku nazaj na kvantno mehaniko, se spomnimo kako lahko dobimo Schrödingerjevo enačbo iz difuzijske s substitucijama:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow it \\ D &= \frac{\hbar}{2m} \end{aligned} \quad (23)$$

Temu postopku rečemo tudi Evklidska strategija, ki pravi, da si moramo za izračun kvantnih procesov v naravi najprej predstavljati difuzijske procese in potem preiti na imaginarni čas.⁷

Zdaj lahko ta proces poizkusimo uporabiti še na propagatorju za difuzijsko enačbo in lahko takoj prepoznamo jedro za prosti delec.

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t_0)}} e^{\frac{im(x-x_0)^2}{2\hbar(t-t_0)}} = \mathcal{K}_0(x, x_0) \quad (24)$$

4.3 Izpeljava klasične Schrödingerjeve enačbe

Ko si zdaj boljše predstavljamo jedro kot propagator, lahko pogledamo še njegovo direktno povezavo s Schrödingerjevo enačbo. Vzemimo, da imamo neko začetno funkcijo $\psi(x_0, t_0)$. Za nek kasnejši čas $t_1 = t_0 + \delta$ in pozicijo $x_1 = x_0 - \epsilon$ lahko prek jedra zapišemo enačbo za ψ .⁶

$$\psi(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x_1, x_0, t_1, t_0) \psi(x_0, t_0) dx_0 \quad (25)$$

Z upoštevanjem, da sta δ in ϵ majhna zapišemo jedro kot:

$$\mathcal{K}(x_1, x_1 + \epsilon, t_0 + \delta, t_0) \approx A(\delta) e^{(\frac{i}{\hbar})(\frac{m}{2\delta}\epsilon^2 - \delta V(x_1 + \frac{\epsilon}{2}))} \quad (26)$$

in lahko razvijemo $e^{-\frac{i\delta}{\hbar}V(x_1 + \frac{\epsilon}{2})}$, $\psi(x_0, t_0)$ in $\psi(x_1, t_1)$ za majhne vrednosti ϵ in δ .

$$e^{-\frac{i\delta}{\hbar}V(x_1 + \frac{\epsilon}{2})} = 1 - \frac{i\delta}{\hbar}V(x_1) \quad (27)$$

$$\psi(x_0, t_0) = \psi(x_1 + \epsilon, t_0) = \psi(x_1, t_0) + \epsilon \frac{\partial \psi(x_1, t_0)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi(x_1, t_0)}{\partial x_1^2} \dots \quad (28)$$

Ko potem to vstavimo v enačbo [25] dobimo:

$$\psi(x_1, t_1) = A(\delta) \left[1 - \frac{i\delta}{\hbar}V(x_1) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi(x_1, t_0) + \epsilon \frac{\partial \psi(x_1, t_0)}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi(x_1, t_0)}{\partial x_1^2} \right] e^{(\frac{i}{\hbar})(\frac{m}{2\delta}\epsilon)^2} d\epsilon \quad (29)$$

Takoj lahko izločimo člen z ϵ na prvo potenco, ki bo zaradi integracije lihe funkcije po simetričnem intervalu izpadel in dobili bomo neko obliko Gaussovega integrala z rešitvjo:

$$\psi(x_1, t_1) = \psi(x_1, t_0 + \delta) = A(\delta) \sqrt{\frac{2\hbar\delta}{im}} \left[1 - \frac{i\delta}{\hbar}V(x_1) + \frac{\hbar\delta}{2mi} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] \psi(x_1, t_0) \quad (30)$$

Ker morata biti leva in desna stran enačbe enaki, ko pošljemo $\delta \rightarrow 0$, lahko zdaj končno izrazimo že prej uporabljeno vrednost normalizacijske konstante $A = (\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m})^{\frac{1}{2}}$. Enačbo lahko zdaj preuredimo in ko zaradi lepše notacije označimo $x_1 = x$ in $t_0 = t$ lahko zapišemo:

$$\frac{i\hbar(\psi(x, t + \delta) - \psi(x, t))}{\delta} = \left[V(x) - \frac{\hbar^2\delta}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi(x, t) \quad (31)$$

Ko sedaj dokončno limitiramo $\delta \rightarrow 0$, prepoznamo odvod po času kot $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i\hbar(\psi(x, t + \delta) - \psi(x, t))}{\delta}$ in dobimo za rezultat klasično Schrödingerjevo enačbo.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left[V(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi(x, t) \quad (32)$$

5 Potencial in harmonski oscilator

5.1 Izračun jedra in Gaussovi integrali

Poleg jedra za prosti delec, lahko preizkusimo to formulacijo še za druge zglede. Najpreprostejši primeri so tisti, v katerih se pojavijo spremenljivke na največ drugo potenco. Te integrale lahko klasificiramo kot Gaussove integrale in si jih bomo podrobneje ogledali.

Predstavljajmo si, da imamo v splošnem primeru neko Lagrangovo funkcijo oblike:³

$$\mathcal{L}(x) = A(t)\dot{x}^2 + B(t)\dot{x} + C(t)x^2 + D(t)x + E(t)\dot{x}x + F(t) \quad (33)$$

in zapišemo jedro kot:

$$\mathcal{K}(b, a) = \int_a^b e^{\left(\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_a}^{t_b} A(t)\dot{x}^2 + B(t)\dot{x} + C(t)x^2 + D(t)x + E(t)\dot{x}x + F(t) dt} \mathcal{D}x \quad (34)$$

Uvedemo lahko novo krivuljo $x_{kl}(t)$, ki naj predstavlja pot, ki je ekstremalna za akcijo S .

$$x(t) = x_{kl}(t) + y(t) \quad (35)$$

Poljubno pot lahko torej definiramo s krivuljo $y(t)$, ki predstavlja odstopanje od klasične poti. Če sedaj preuredimo izraz za akcijo, ga lahko zapišemo tudi kot:³

$$\begin{aligned} S(x_{kl}(t) + y(t)) &= \int_{t_a}^{t_b} A\dot{x}_{kl}^2 + B\dot{x}_{kl} + Cx_{kl}^2 + Dx_{kl} + E\dot{x}_{kl}x_{kl} \\ &+ (A\dot{y}^2 + (2A\dot{x}_{kl} + E\dot{x}_{kl})\dot{y} + Cy^2 + (2Cx_{kl} + E\dot{x}_{kl})y + E\dot{y}y) dt \end{aligned} \quad (36)$$

Ker je akcija klasične poti ekstremalna, nam po definiciji integrali s členi y in \dot{y} na prvo potenco izpadejo in dobimo:

$$S(x_{kl}(t) + y(t)) = S(x_{kl}(t)) + \int_{t_a}^{t_b} (a(t)\dot{y}^2 + b(t)y^2 + d(t)y + c(t)\dot{y}y) dt \quad (37)$$

Popotni integral pa seveda ni odvisen od klasične akcije ($S_{kl} = S(x_{kl})$) in lahko to sedaj izpostavimo in zapišemo jedro v novi obliki.

$$\mathcal{K}(b, a) = e^{\left(\frac{i}{\hbar}\right)(S_{kl})} \int_a^b e^{\left(\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_a}^{t_b} (a(t)\dot{y}^2 + b(t)y^2 + d(t)y + c(t)\dot{y}y) dt} \mathcal{D}y \quad (38)$$

Ko naše poti izražamo z odstopanjem od klasične poti, vidimo, da se vse krivulja $y(t)$ začnejo in končajo pri $y = 0$. To nam pove, da so popotni integrali v tem primeru le funkcija začetne in končne točke v času in jih lahko zapišemo v nekoliko drugačni obliki.³

$$\mathcal{K}(b, a) = e^{(\frac{i}{\hbar})(S_{kl})} \mathcal{F}(t_b - t_a) \quad (39)$$

V tej obliki je $\mathcal{F}(t_b - t_a)$ definiran kot:

$$\mathcal{F}(t_b - t_a) = \int_0^1 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_{t_a}^{t_b} (a(t)\dot{y}^2 + b(t)y^2 + d(t)y + c(t)\dot{y}y) dt} \mathcal{D}y(t_b - t_a) \quad (40)$$

5.2 Jedro za harmonski oscilator

S tem znanjem si lahko končno pogledamo primer, ko na naš delec deluje nek potencial. Osredotočili se bomo na primer vsem poznanega harmonskega oscilatorja, vendar velja podoben postopek za vse potenciale, ki sestavljajo Langrangovo funkcijo v prej zapisani obliki. Začnimo z zapisom potenciala in akcije za ta naš primer.³

$$V = -\frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (41)$$

$$S[b, a] = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 dt \quad (42)$$

Naš problem se tako razdeli, na izračun klasične akcije in funkcije $\mathcal{F}(t_b - t_a)$. Ker klasično akcijo za harmonski oscilator že poznamo iz mehanike, se bomo najprej posvetili iskanju oblike funkcije \mathcal{F} . Za bolj pregleden izračun, bomo sedaj nastavili $t_a = 0$, $t_b = T$. $\mathcal{F}(T)$ bo potem definiran kot:³

$$\mathcal{F}(T) = \int_0^1 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_0^T \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m\omega^2}{2}y^2 dt} \mathcal{D}y(t) \quad (43)$$

Tu lahko spet upoštevamo, da se naše krivulje $y(t)$ vse začnejo in končajo v točki $y = 0$ in jih zapišemo kot Fourierjevo vrsto funkcije s periodo T .

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \quad (44)$$

Ta nastavek, lahko zdaj vstavimo v enačbo za akcijo, da dobimo:

$$S[b, a] = \int_0^T \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi t}{T} \frac{m\pi}{T} a_n a_m \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right) dt \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \frac{m\omega^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right) \\
& = \frac{mT}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right]
\end{aligned}$$

Ob predpostavki, da je čas T razdeljen na N intervalov dolžine ϵ , lahko zapišemo $\mathcal{F}(T)$ kot končno število integralov po koeficientih a_n .

$$\mathcal{F}(t) = \frac{\mathcal{J}}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{imT}{2\hbar^2} \sum_{n=1}^N a_n^2 \left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right] \right\} \frac{da_1}{A} \frac{da_2}{A} \dots \frac{da_N}{A} \quad (46)$$

V tem primeru \mathcal{J} predstavlja Jakobijana, ki je neodvisen od ω , in ga bomo zato lahko kasneje poračunali. Ob pogledu na enega izmed teh integralov, ponovno prepoznamo obliko Gaussovega integrala ki ga lahko zdaj rešimo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ \frac{imT}{2\hbar^2} a_n^2 \left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \right] \right\} \frac{da_n}{A} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{\epsilon T}\right)}{\left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right)}} \quad (47)$$

Skupen rezultat lahko zapišemo kot produkt N -tih rešitev, kar je tudi v skladu z drugo formulacijo jedra iz enačbe [15].

$$\prod_{n=1}^N \left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2\right)^{-1/2} = \prod_{n=1}^N \left(\frac{n^2\pi^2}{T^2}\right)^{-1/2} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1/2} \quad (48)$$

Vse člene, ki so od ω neodvisne, lahko skupaj z Jakobijanom pospravimo v skupno konstanto C in poračunamo le zadnji produkt v limiti $N \rightarrow \infty$ oziroma $\epsilon \rightarrow 0$. Pri upoštevanju limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-1/2}$ lahko zapišemo $\mathcal{F}(T)$ kot:

$$\mathcal{F}(T) = C \left(\frac{\sin(\omega T)}{2\pi i \hbar T}\right)^{-1/2} \quad (49)$$

Za izračun konstante C upoštevamo, da mora naša rešitev pri $\omega = 0$ ustrezati rešitvi za prosti delec. Tako lahko izrazimo vrednost C in dobimo \mathcal{F} .

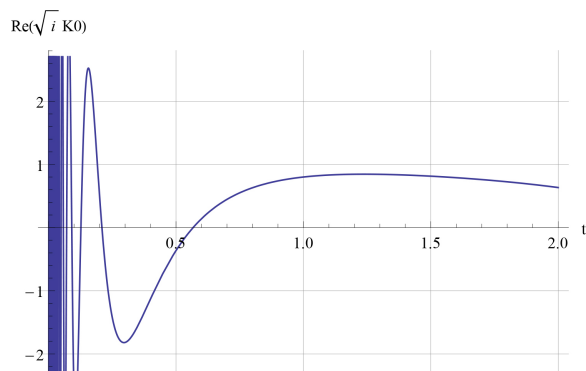
$$C = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T}\right)^{1/2} \quad (50)$$

$$\mathcal{F}(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}\right)^{1/2} \quad (51)$$

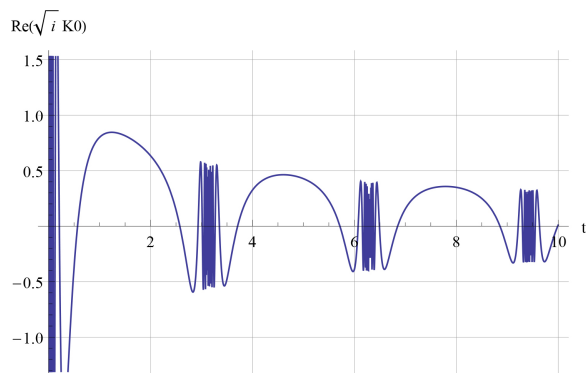
Ko zdaj rezultat združimo še z izrazom za klasično akcijo dobimo skupno rešitev jedra za harmonski oscilator.

$$S_{kl} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos\omega T - 2x_a x_b \right] \quad (52)$$

$$\mathcal{K}(b, a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega T} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2 x_a x_b \right] \right\} \quad (53)$$



Slika 8: $\Re(\sqrt{i}K)(t)$ za harmonski oscilator. Pri tem je odvisnost od x enaka kot pri prostem delcu med tem ko odvisnost od t ne upada poveča pri večjih vrednostih t .

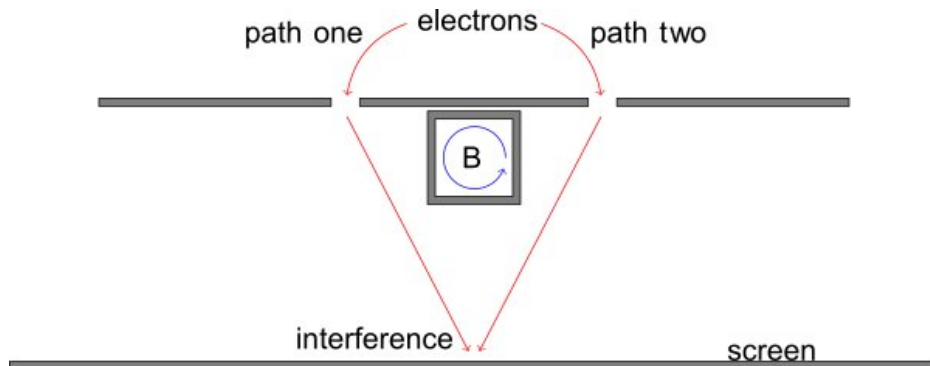


Slika 9: Pri večjih vrednostih t lahko opazimo tudi periodično, strukturo, ki nam nekako pove, da se verjetnostna amplituda, da delec, preide iz točke a v točko b ob različnih časih t začne periodično ponavljati.

6 Aharon-Bohmov pojav

Na koncu si lahko ogledamo, še primer Aharon-Bohmovega pojava, za katerega je zaradi oblike problema primerna Feynmanova obravnava s popotnimi integrali.⁸

Poizkus nastavimo podobno, kot če bi gledali interferenco med dvema režama le, da med njima postavimo tuljavo, ki nam generira magnetno polje (slika 10).



Slika 10: Skica eksperimenta za meritev Aharon-Bohmovega pojava.¹⁰

Zdaj lahko zapišemo Lagrangovo funkcijo za delec v magnetnem polju in jo razdelimo na dva dela.¹¹

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} + e\vec{A}\vec{v} - e\phi = \mathcal{L}' + e\vec{A}\vec{v} \quad (54)$$

Jedro za ta primer lahko razdelimo na dva ločena integrala in ga z upoštevanjem $\int_a^b e\vec{A}\vec{v}dt = \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}$ zapišemo kot:

$$\mathcal{K}(b, a) = \int_a^b e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^{t_b} \mathcal{L}'_1 dt + \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_1} \mathcal{D}x_1 + \int_a^b e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^{t_b} \mathcal{L}'_2 dt + \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_2} \mathcal{D}x_2 = \mathcal{K}_1 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_1} + \mathcal{K}_2 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_2} \quad (55)$$

Ko sedaj izrazimo enega izmed teh dveh eksponentov,

$$= \mathcal{K}_1 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_1} + \mathcal{K}_2 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_2} = e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_1} (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 e^{(\frac{i}{\hbar}) \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_2 - \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_1}) \quad (56)$$

in prepoznamo integral po zaključeni zanki, velja $\int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_2 - \int_a^b e\vec{A}d\vec{s}_1 = \phi_m$. Zdaj lahko zapišemo verjetnost za delec na zaslonu.

$$P = |\mathcal{K}|^2 = |\mathcal{K}_1|^2 + |\mathcal{K}_2|^2 + |\mathcal{K}_1| |\mathcal{K}_2| \cos\left(\frac{e}{\hbar} \phi_m + \delta\right) \quad (57)$$

Tu δ predstavlja fazni zamik, $\frac{e}{\hbar}\phi_m$ pa predstavlja dodaten interferenčni člen, ki nastane zaradi magnetnega polja. Ta člen nam, da maksimume vsakič, ko se magnetni pretok spremeni za en kvant. To spreminjanje intenzitete zaradi magnetega potenciala imenujemo tudi Aharon-Bohmov pojav.¹¹

$$\Delta\phi_m = \left(\frac{2\pi\hbar}{e}\right)$$

7 Zaključek

Feynmanova formulacija kvantne mehanike je matematično zelo zahtevno zasnovana. Kljub temu, da so nekatere rešitve dobro analitično rešljive, jih je brez povezave z valovno funkcijo težko interpretirati. Prav zaradi teh dveh dejstev nam v večini primerov ta formulacija ne predstavlja dobre alternative reševanju Schrödingerjeve enačbe. Kljub vsemu pa ima Feynmanova formulacija svoje prednosti. Zaradi direktne povezave z akcijo, je ta v določenih primerih bolj povezljiva s klasično mehaniko in za primere, kot je Aharon-Bohmov pojav, zaradi svoje zasnove celo bolj smiselna. Predstavlja še eno izmed pomembnih orodij za računanje v kvantnem svetu.

8 Dodatek: Primer za ravni val

Ker vemo, da so ravni valovi lastne rešitve Schrödingerjeve za prosti delec, je potrebno preveriti kaj nam vrne propagator prostega delca, pri začetnem stanju ravnega vala.

Zdaj definiramo začetni ravni val $\psi_0 = e^{i(kx_0)}$ in ga vstavimo v formulo za propagacijo s Feynmanovim jedrom.

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_0(x, x_0, t) \psi_0(x_0, t) dx_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{im(x-x_0)^2}{2\hbar t}} e^{i(kx_0)} dx_0 \quad (58)$$

Člene v eksponentu lahko seštejemo in dopolnimo vse člene, ki vsebujejo x_0 , do popolnih kvadratov. Za bolj pregleden izračun bomo definirali $a = \frac{m}{2\hbar}$.

$$\frac{ia}{t}(x_0^2 + x^2 - 2xx_0 + (\frac{kt}{a})x_0) = \frac{ia}{t}(x_0^2 + x^2 + x_0(\frac{kt}{a} - 2x)) = \frac{ia}{t}(x_0 + \frac{(\frac{kt}{a} - 2x)}{2})^2 - \frac{ia}{t}(\frac{1}{4}(\frac{kt}{a})^2 - \frac{kt}{a}x) \quad (59)$$

To lahko zdaj vstavimo v zgornjo enačbo, dodatno definiramo $b = \frac{kt}{a}$ in izpostavimo vse člene, ki ne vsebujejo x_0 iz integrala.

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{ia}{t}(\frac{b^2}{4} - bx)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ia}{t}(x_0 + \frac{(\frac{kt}{a} - 2x)}{2})^2} dx_0 \quad (60)$$

Iz izraza prepoznamo Fresnelove integrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{a(x+D)^2}{t}} = \sqrt{\frac{t\pi}{2a}}(C(x) + iS(x)) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{\frac{t\pi}{2a}}(1 + i)$ in rešimo naš integral.

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{ia}{t}(\frac{b^2}{4} - bx)} (1 + i) \sqrt{\frac{t\pi}{2a}} = \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}} e^{-\frac{ia}{t}(\frac{b^2}{4} - bx)} \quad (61)$$

Če vstavimo nazaj $a = \frac{m}{2\hbar}$ in $b = \frac{kt}{a}$ lahko poračunamo izraz v eksponentu.

$$-\frac{ia}{t}(\frac{b^2}{4} - bx) = -\frac{ia}{t}(\frac{(\frac{kt}{a})^2}{4} - \frac{kt}{a}x) = -i\frac{(\frac{k^2 t}{a})}{4} + ikx = -it\frac{k^2 \hbar}{2m} + ikx \quad (62)$$

V rezultatu lahko prepoznamo $\frac{k^2 \hbar^2}{2m} = E_{\text{prostidelec}}$ in zapišemo rešitev.

$$\psi(x, t) = \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}} e^{kx} e^{-i\frac{Et}{\hbar}} = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (63)$$

Iz te končne rešitve vidimo, da propagator prostega delca ohranja njegove lastne funkcije in dodatno vključuje še njen časovni razvoj. Rezultat je očitno v tem primeru ekvivalenten reševanju Schrödingerjeve stacionarne enačbe z upoštevanjem operatorja časovnega razvoja. $A = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$.

Literatura

- ¹ https://www.en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman, (14.5.2016).
- ² Feynman R.P. in Hibbs A.R.: *Quantum mechanics and Path Integrals*, Dover Publications, 2010.
- ³ http://wiki.physics.fsu.edu/wiki/index.php/Feynman_Path_Integrals, (10.5.2016).
- ⁴ Susič V.: *Feynman's formulation of Quantum mechanics, 2010*, dostopno na: <http://www-f1.ijs.si/~ramsak/seminarji/susic.pdf>, (10.5.2016).
- ⁵ https://www.en.wikipedia.org/wiki/Path_integral_formulation, (10.5.2016).
- ⁶ *Quantization of the Harmonic Oscillator* dostopno na: <https://math.byu.edu/~sag/QuantumFieldTheory/>, stran 497-495, (12.5.2016)
- ⁷ Zeidler E.: *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Springer Science+Business Media New York, 1995, stran 381.
- ⁸ Perepelista D.V.: *Path Integrals in Quantum Mechanics*, dostopno na: <http://web.mit.edu/dvp/www/Work/8.06/dvp-8.06-paper.pdf>, (12.5.2016).
- ⁹ Gerry C.C. in Singh V.A.: *Feynman path-integral approach to the Aharonov-Bohm effect*, Physical review D, volumen 20, stran 2550, 1979.
- ¹⁰ https://en.wikipedia.org/wiki/Aharonov-Bohm_effect, (19.5.2016).
- ¹¹ Jesenko S.: *Aharonov-Bohmov pojav, 2007*, dostopno na: <http://www.burana.ijs.si/wiki/images/0/02/Ahbohmv.pdf>, (19.5.2016)