

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Seminar - 4. letnik

Bohmova interpretacija kvantne mehanike

Avtor: Zala Lenarčič
Mentor: prof. dr. Anton Ramšak

Ljubljana, januar 2010

Povzetek

V seminarju bom predstavila alternativno interpretacijo kvantne mehanike. Najprej bom motivirala vpeljavo osnovnega elementa interpretacije, sistema: val + delec. Potem se bom posvetila lastnostim na novo vpeljanih funkcij. V drugem delu bom na primerih stacionarnega stanja, Gaussovega paketa in tuneliranja orisala računanje in razmišljanje v okvirih Bohmove interpretacije. Na koncu pa jo bom v grobem razširila še na spinski prostor.

Kazalo

1	Uvod	1
2	Sistem vala in delca	2
2.1	Enačbe gibanja za val in delec	2
2.2	Postulati	3
2.3	Lastnosti funkcij R, S	4
2.4	Lastnosti kvantnega potenciala	5
2.4.1	Odvisnost od oblike in ne od amplitude	5
2.4.2	Singularnosti	5
3	Povezava med lastnostmi delca in QM operatorji	5
4	Meritev in nedoločenost	7
5	Reprezentacija	7
6	Primeri	8
6.1	Stacionarna stanja	8
6.2	Raven val	9
6.3	Gaussov valovni paket	9
6.4	Potencialna stopnica	11
6.5	Tuneliranje skozi bariero	12
7	Spin	14
8	Zaključek	16
9	Dodatek	16
9.1	Izpeljava Hamilton-Jacobijeve enačbe	16

1 Uvod

Če bi kvantno izobraženega človeka vprašali, kaj je kvantna mehanika, bi nam najverjetneje odgovoril, da teorija pri kateri stanje opazovanega sistema opišemo z valovno funkcijo, opazljivke so hermitski operatorji in kar pomerimo so lastne funkcije teh opazljivk. Za meritev je značilno, da povzroči kolaps valovne funkcije,... In tako naprej. Vse povedano so bolj ko ne postulati Copenhagenske interpretacije kvantna mehanike [8]. Poleg te pa obstaja še cela vrsta interpretacij, ki dajo enake eksperimentalne napovedi, razlikujejo pa se po formalizmu. Različne so si po svoji naravi (deterministični, stohastični, statistični). Primeri teh alternativnih interpretacij so: veliko svetov [5], pristop z dekoherenco [9], konsistentne zgodovine [4],... Veliko od njih v svojem formalizmu naslovi problem kolapsa valovne funkcije in ena na izmed slednjih, je tudi Bohmova interpretacija [3], [1]. To, po svoji naravi kavzalno in

kot jo je Bohm poimenoval - interpretacijo skritih spremenljivk - bom predstavila v svojem seminarju.

2 Sistem vala in delca

2.1 Enačbe gibanja za val in delec

Zapišimo valovno funkcijo kot

$$\psi = Re^{iS/\hbar} \quad (1)$$

kjer je $R = R(\mathbf{x}, t)$ realna funkcija amplitude in $S = S(\mathbf{x}, t)$ realna funkcija faze. Kompleksno valovno funkcijo ψ torej predstavimo s parom realnih funkcij R in S .

Obravnavamo ψ , ki je rešitev Schrödingerjeve enačbe

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi \quad (2)$$

kjer je $V = V(\mathbf{x}, t)$ zunanji potencial. Če enačbo (1) vstavimo v enačbo (2) in ločimo realni in imaginarni del, dobimo iz realnega dela enačbo

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0 \quad (3)$$

iz imaginarnega pa

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{m} \right) = 0 \quad (4)$$

Z nekaj klasičnega znanja prepoznamo v enačbi (3), do tretjega člena natančno, Hamilton-Jacobijevo enačbo za delec z maso m v zunanjem skalarnem potencialu V . Za tak delec se Hamiltonian zapiše kot

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

iz njega pa dobimo Hamilton-Jacobijevo enačbo

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = 0 \quad (6)$$

kjer je S , Jacobijeva funkcija, rešitev te enačbe. Iz nje lahko lahko izračunamo impulz kot

$$p_i = \partial S / \partial q_i \quad (7)$$

Več o Hamilton-Jacobijevi enačbi je zapisano v Dodatku. Če primerjamo enačbo (3) in (6) opazimo, da se razlikujeta le v členu

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (8)$$

ki ga bomo poimenovali kvantni potencial, [6]. Iz realnega dela Schrödingerjeve enačbe smo torej dobili Hamilton-Jacobijevo enačbo za delec z maso m . V tem prepoznamo prvo motivacijo za vpeljavo sistema (val+delec) kot osnovnega elementa obravnave kvantne teorije. V tej obravnavi je torej ψ (za katero se uporabljajo oznake: val, pilotni val, ψ -polje) polje, ki s potencialom Q (ki ga iz njega izračunamo) vpljiva na gibanje delca. Ta delec je pač objekt, ki ga opazujemo in bi ga v običajni interpretaciji opisali samo z valovno funkcijo. Če bi torej poznali njegove začetne pogoje (pozicijo) in začetni val ψ_0 , bi lahko izračunali njegovo celotno trajektorijo. Z vpeljavo delca smo konceptualno zakorakali v Bohmovo interpretacijo.

Da je slika smiselna nas prepriča tudi enačba (4), ki jo dobimo iz imaginarnega dela Schrödingerjeve enačbe. Vendar moramo za njeno razložitev vpeljati koncept ansambla delcev. Kot že rečeno, v Bohmovi interpretaciji operiramo z delcem, ki ga usmerja ψ . Ampak, ker ne poznamo njegovih začetnih pogojev, je smiselno gledati ansambel delcev, ki nam opiše vse mogoče začetne pozicije. Začetne hitrosti dobimo iz vala. Gostoto delcev v tem ansamblu vpeljemo tako, da bo sorazmerna verjetnosti, da delec 'je' na določenem mestu. Tu pa uporabimo statistično naravo ψ , ki je njena edina lastnost v Copenhagenski interpretaciji in gostoto v ansamblu vpeljemo kot

$$\rho(\mathbf{x}, t) = R^2(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (9)$$

Če torej po enačbi (7) gibalno količino delca izračunamo kot $\mathbf{p} = \nabla S$, lahko imaginarni del Schrödingerjeve enačbe (enačba (4)) predelamo v transparentno kontinuitetno enačbo

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{R^2 \nabla S}{m} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho \mathbf{P}}{m} \right) = 0 \quad (10)$$

Če povzamemo, iz realnega dela Schrödingerjeve enačbe smo torej dobili Hamilton-Jacobijevo enačbo za delec, katerega gibanje je preko kvantnega potenciala vplivano od ψ , iz imaginarnega dela pa smo dobili kontinuitetno enačbo za ansambel teh delcev, ki je enaka enačbi za statistično verjetnost.

2.2 Postulati

Zavoljo motivacije sem že v prejšnjem poglavju pravzaprav uporabila vse 4 postulate Bohmove kvantne mehanike [6]. Ti so:

1. Fizikalni sistem je sestavljen iz vala in delca; val se skupaj z delcem propagira v prostoru in času, delec pa se premika zvezno, pod vodstvom vala.
2. Val je matematično opisan z $\psi(\mathbf{x}, t)$, ki je rešitev Schrödingerjeve enačbe.
3. Gibanje delca dobimo kot rešitev $\mathbf{x}(t)$ enačbe

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \nabla S(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \quad (11)$$

kjer je S faza od ψ , kot zapisano v enačbi (1). Rešitev je določena z začetnim pogojem $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. To je edina informacija, ki ni vključena v $\psi(\mathbf{x}, t)$ (tudi začetna hitrost je poznana, če poznamo S). Ansambel možnih gibanj dobimo z spreminjanjem \mathbf{x}_0 .

Z uporabo zgornje zveze pa lahko izpeljemo še bolj transparentno enačbo gibanja

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla(V + Q)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \quad (12)$$

kjer sta Q (kvantni potencial, definiran z enačbo (8)) in V (zunanji potencial) evaluirana na trajektoriji delca. Očitno ima ta enačba formo Newtonovega zakona, vendar se v njej skriva tudi kvantni prispevek.

Ti trije postulati že zgradijo konsistentno teorijo gibanja. Da naredimo gibanje ansambla delcev kompatibilno z rezultati kvantne mehanike postavimo še 4. postulat

4. Verjetnost, da delec v ansamblu ob času t leži med točkama \mathbf{x} in $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ je dana z

$$R^2(\mathbf{x}, t)d^3\mathbf{x}, \quad R^2 = |\psi|^2 \quad (13)$$

Ta postulat nam iz vseh možnih gibanj, dobljenih kot rezultat enačbe (11), izbere tiste, ki zadostujejo začetni porazdelitvi $R^2(\mathbf{x}, 0) = R_0^2(\mathbf{x})$

V zvezi z 4. postulatoma je potrebno komentirati, da v navadni interpretaciji $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x$ predstavlja verjetnost, da bomo delec z meritvijo 'našli' v nekem volumnu d^3x ob času t . Pri Bohmovi interpretaciji (BI) pa $R^2 d^3x$ predstavlja verjetnosti, da delec v nekem volumnu d^3x ob času t zares 'je' in če bi poznali še njegovo hitrost, bi iz tega lahko določili tudi, kje je bil prej in kje bo kasneje. Zaradi tega se govori, da je Bohmova na nek način kavzalna interpretacija. V tej kavzalni naravi je tudi njena bistvena razlika napram običajni interpretaciji. Nikakor pa je zaradi tega ne smemo razumeti kot poskus predstavitve QM kot nekakšne Newtonove fizike.

Ko jo je leta 1952 Bohm prvič predstavil [2], pa jo je poimenoval tudi kot interpretacijo s skritimi spremenljivkami, ki so v tem primeru koordinata \mathbf{x} , val ψ in vse kar iz tega izračunamo.

2.3 Lastnosti funkcij R , S

Lastnosti funkcije ψ se prenesejo tudi na R in S .

- Ker sta ψ in njen odvod zvezna, enako velja tudi za R in S in njune odvode.
- Ko $x \rightarrow \pm\infty$, gre $R \rightarrow 0$
- V vozelnih točkah $\psi = 0$ je S nedefinirana. Ker je v teh točkah tudi ∇S nedefinirana skozi ne gredo nobene trajektorije delcev.
- Ker je faza do večkratnika 2π nedoločena, je S do večkratnika h nedoločena. Nezvezni skoki funkcije S pa se lahko zgodijo v točkah kjer $\psi = 0$. Ker skozi vozelné točke trajektorije ne potekajo, nezveznih preskokov S na njih ni.

- Ker ∇S v vsaki točki zavzame samo eno vrednosti, gre skozi vsako točko prostora, za vsak čas t le ena trajektorija. Ob dveh različnih časih pa gredo lahko dve.

Omembe vredno je tudi, da lahko na Hamilton-Jacobijevo enačbo, ki smo jo dobili iz Schrödingerjeve enačbe, gledamo tudi kot na enačbo za celotno energijo delca

$$\partial S/\partial t + (\nabla S)^2/2m + Q + V = 0 \rightarrow E(\mathbf{x}(t), t) = -\partial S(\mathbf{x}, t)/\partial t|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}$$

saj v drugem členu prepoznamo kinetično energijo delca, v vsoti $(Q + V)$ pa celotno potencialno energijo.

2.4 Lastnosti kvantnega potenciala

2.4.1 Odvisnost od oblike in ne od amplitude

Definirajmo intenziteto valovne funkcije kot $I = R^2$. Če skaliramo amplitudo R z realnim a , se bo intenziteta skalirala z a^2 , kvantni potencial pa bo ostal nespremenjen

$$Q = \frac{-\hbar^2 \nabla^2(aR)}{2m} = \frac{-\hbar^2 \nabla^2 R}{2m} \quad (14)$$

Delec se torej ne bo odzval na intenziteto valovne funkcije ampak zgolj na njeno obliko.

To ima pomembno posledico, da kvantni potencial ne gre nujno proti 0, ko $|\psi| \rightarrow 0$ pri $r \rightarrow \pm\infty$, ampak lahko kaže komplicirana fluktuiranja (ki se lahko kažejo skozi interferenčne efekte [6]).

Nestabilnosti pa se lahko pojavijo tudi, če k funkciji ψ dodamo še en val z majhno amplitudi, ki je na primer posledica šibke zunanje perturbacije. To lahko sproži veliko spremembo v Q in posledično nestabilnosti v dinamiki delca.

2.4.2 Singularnosti

Že iz izraza za kvantni potencial $Q = -\frac{\nabla^2 R}{R}$ lahko vidimo, da bo za $R \rightarrow 0$ singularen. Različni primeri singularnosti različno vplivajo na gibanje delca

- $\nabla^2 R > 0$: Če je R v okolici ničle konkavna funkcija, bo $Q \rightarrow -\infty$. Zato bo delec tam zelo hiter in verjetnost, da ga tam najdem majhna.
- $\nabla^2 R < 0$: Če je R v okolici ničle konveksna funkcija, bo $Q \rightarrow \infty$. Zato bo verjetnost, da ga tam najdem spet majhna. Ampak zaradi $R \geq 0$ je ta možnost neuresničljiva.

3 Povezava med lastnostmi delca in QM operatorji

Ko smo govorili, da enačba (3) predstavlja tudi enačbo, za spreminjanje celotne energije delca, smo kar operirali s pojmi kot so njegova kinetična in potencialna energija. Lastnosti delca, kot so njegova gibalna in vrtilna količina, energija,... so vse v zvezi s klasičnimi izrazi

iz Hamilton-Jacobijeve teorije. Radi pa bi pokazali, kako so povezane s QM operatorji, ki jih običajno povezujemo z fizikalno relevantnimi količinami. V bistvu nam prav ta povezava poskrbi, da eksperimentalni rezultati ustrezajo obema interpretacijama.

Recimo, da je $\hat{A} = \hat{A}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})$ funkcija operatorjev $\hat{\mathbf{x}}$ in $\hat{\mathbf{p}}$. V koordinatni upodobitvi je njena pričakovana vrednost dana z

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^*(\mathbf{x}) [\hat{A}(\hat{\mathbf{x}}, -i\hbar\nabla)\psi](\mathbf{x}) d^3x \quad (15)$$

Ker je \hat{A} hermitski, isti rezultat dobimo tudi samo z realnim delom integranda. Ta integrand, ki ga še normiramo, bomo uvedli kot 'lokalno pričakovano vrednost' operatorja \hat{A} za stanje $|\psi\rangle$.

$$A(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left(\psi^*(\mathbf{x}, t) [\hat{A}(\hat{\mathbf{x}}, -i\hbar\nabla)\psi](\mathbf{x}, t) \right) / \psi^*(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

Dobili smo torej funkcijo kraja in časa, ki kombinira informacijo o operatorju in valovni funkciji in ima dimenzije operatorja.

Poglejmo si nekaj lokalno pričakovanih vrednosti za različne operatorje

- operator pozicije: $\hat{x}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbf{x}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$; po enačbi (16) dobimo, da je njegova lokalna pričakovana vrednost evaluirana vzdolž trajektorije delca, kar ta trajektorija.
- operator gibalne količine: $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$; zanj dobimo $\mathbf{p} = \nabla S$, kar pomeni, da je lokalno pričakovana vrednost gibalne količine polje gibalne količine za ansambel delcev; evaluirano na trajektoriji pa je kar gibalna količina delca
- celotna energije: $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + V$; po enačbi (16) je

$$E(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}^2/2m + V + (1/R)(\hat{\mathbf{p}}^2/2m)R$$

evaluirano na trajektoriji delca je prvi člen njegova kinetična energija, drugi in tretji pa klasična in kvantna potencialna energija. Lokalna pričakovana vrednost Hamiltonskega operatorja vzdolž trajektorije je torej celotna energija delca.

Iz tega lahko vidimo, da nam izraz (16) iz vala ψ generira fizikalno smiselne lastnosti ansambla delcev. Rezultati, ki jih dobimo kot lokalne pričakovane vrednosti so taki, kot jih znotraj kinematike in dinamike naše teorije pričakujemo in so definirani arbitrarno za vsa stanja, ne samo za lastne funkcije operatorjev. Z enačbo (16) lahko poiščemo lokalno pričakovane vrednosti vseh operatorjev, ki so linearne kombinacije operatorjev $\hat{\mathbf{x}}$ in $\hat{\mathbf{p}}$. Na ta način dobimo lastnosti delca v določenem stanju, v povezavi z nekim operatorjem. V tem je razlika BI napram običajni, saj lokalna pričakovana vrednost uspe vizualno predstaviti pomen operatorja na nekem stanju.

Končno pa bi radi ugotovili še kaj v BI ustreza pričakovani vrednosti operatorja - $\langle \hat{A} \rangle$ - ki je pomembna količina v običajni interpretaciji. Povprečno vrednost funkcije $A(\mathbf{x}, t)$ na celotnem ansamblu je naravno definirati kot

$$\langle A \rangle = \int R^2(\mathbf{x}, t) A(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (17)$$

kjer upoštevamo, da je gostota v ansamblu dana z $R^2(\mathbf{x}, t)$. Če rečemo, da je $A(\mathbf{x}, t)$ lokalna pričakovana vrednost za operator \hat{A} , dana z enačbo (16), potem se zgornja enačba (17) prelevi v enačbo za pričakovano vrednost operatorja \hat{A} , kot definirano v običajni interpretaciji

$$\langle \hat{A} \rangle = \int Re \psi^*(\mathbf{x})(\hat{A}\psi)(\mathbf{x})d^3x \quad (18)$$

S povprečitvijo lokalne pričakovane vrednosti operatorja prek celotnega ansambla smo tako prišli do pričakovane vrednosti operatorja, ki je identična tisti iz Copenhagenske interpretacije. Omembe vreden komentar pa je, da ni nujno, da trajektorija katerekoli delca iz ansambla ustreza pričakovani vrednosti koordinate.

4 Meritev in nedoločenost

Po Bohmu ima vsak delec iz ansambla hkrati točno določeno pozicijo in gibalno količino. Smiselno se je vprašati, ali je načelo nedoločenosti, ki v običajni interpretaciji velja za nekomutirajoče operatorje, v BI sploh spoštovano?

Odgovor se skriva v tem, kaj se v Bohmovi sliki zgodi pri meritvi. To je sicer obsežno poglavje, od katerega bom navedla le najpomembnejše zaključke. Meritev obravnava kot interakcijo med opazovanim sistemom in merilnim instrumentom. Posledica te interakcije je, da se valovna funkcija, ki opisuje sklopljen sistem in merilni instrument, razklopi v vsoto po lastnih stanjih opazljivke. Iz te skupne valovne funkcije se vidi, da so posamezna lastna stanja po meritvi krajevno ločena. V končni fazi z meritvijo koordinate določimo v katerem izmed lastnih stanj je pristal sistem.

Pomembno je, da na koncu tudi po BI izmerimo lastno stanje opazljivke. Ker ne poznamo začetnih pogojev, ne moremo vnaprej vedeti katero stanje. Ker pa sta gostota v ansamblu in njegov razvoj vpljivani od ψ , bo po končani meritvi porazdelitev izmerkov ista kot jo napoveduje običajna interpretacija.

Ker torej ne moremo hkrati izmeriti opazljivk, ki nimata skupnih lastnih stanj, je zato tudi v BI princip nedoločenosti spoštovan. Če bi vseeno teoretično sledili formalizmu postopka meritve (kot opisano v [6]), npr. opazljivke koordinate in gibalne količine hkrati, bi se izkazalo, da se sistem pri taki meritvi ne more razviti krajevno ločena lastna stanja katerekoli opazljivke.

5 Reprezentacija

Vemo, da je QM matematično formulirana tako, da so relacije kovariantne na koordinatne transformacije v Hilbertovem prostoru, ki so npr. transformacija reprezentacije in transformacija slike (Schödingerjeva, Heisenbergova). Bohmova interpretacija postulira, da bo uporabljala Schödingerjevo sliko v koordinatni reprezentaciji. Razlog za to je čisto fizikalen. QM bi namreč radi predstavili kot dinamiko delcev in polja v prostoru in času. In če bi to naredili v npr. impulzni reprezentaciji ne bi dobili fizikalno jasnih relacij. Matematično

simetrijo torej upostimo zaradi fizikalnih razlogov. Seveda tak pristop ni dan a priori in je treba preveriti, da z njim ne kršimo temeljnih principov in eksperimentalnih rezultatov. Hkrati pa ne smemo zaključiti, da kavzalna interpretacija v nekoordinatni upodobitvi ni možna [6].

Privrženci BI preferiranje koordinatne upodobitve zagovarjajo s tem, da se ne da narediti eksperimenta, ki na koncu ne bi meril koordinate, čeprav nas v bistvu zanima neka druga količina. Kot komentar na simetrizacijo upodobitev dajejo celo, da iz nje dobimo paradokse, ki se v zgolj koordinatni upodobitvi ne pojavijo.

6 Primeri

6.1 Stacionarna stanja

Vzemimo valovno funkcijo, ki je lastna funkcija Hamiltonovega operatorja

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = E\psi(\mathbf{x}, t), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V \quad (19)$$

Njen časovni razvoj je

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0(\mathbf{x})e^{-iEt/\hbar} \quad (20)$$

kjer je ψ_0 rešitev stacionarne Schrödingerjeve enačbe. Za njeno amplitudi in fazo dobimo

$$R(\mathbf{x}, t) = R_0(x) \quad (21)$$

$$S(\mathbf{x}, t) = S_0(x) - Et \quad (22)$$

Iz tega sledijo naslednje lastnosti ansambla in delcev v njem

1. Verjetnostna gostota je neodvisna od časa: $|\psi|^2 = R_0^2(\mathbf{x})$
2. Kvantni potencial Q je od časa neodvisen in zato za zunanji potencial $V \neq V(t)$ tudi celotni efektivni potencial $\partial(V + Q)/\partial t = 0$
3. Tudi hitrost delcev $v = (1/m)\nabla S_0$ je od časa neodvisna in je za realno $\psi_0(x)$ celo enaka 0. Delci so torej pri miru, čeprav bi klasično pričakovali, da se bodo gibali, saj so v zunanjem potencialu V . To se zgodi, ker kvantna sila $(-\nabla Q)$ izniči klasično $(-\nabla V)$.
4. Energija vseh delcev v ansamblu je konstantna in enaka lastni vrednosti: $-\partial S/\partial t = E$

Komentarja vredno je, da se energija ansambla ne ohranja samo v stacionarnih stanjih, ampak vedno ko $-\partial S/\partial t = \text{const} = E$. Torej za vse valovne funkcije tipa

$$\psi(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, t)e^{i(S_0(\mathbf{x}) - Et)/\hbar} \quad (23)$$

Taka rešitev ni nujno lastna vrednost in ne predstavlja energijskega nivoja. Predstavlja le energijo, ki jo imajo delci v ansamblu. In če ne ustreza energijskemu nivoju je v končni fazi po končani meritvi ne bi mogli izmeriti, saj vedno izmerimo le lastno vrednost.

6.2 Raven val

V začetnih korakih prost delec ($V = 0$) ponavadi obravnavamo kar kot raven val, saj je taka obravnava preprosta, ni pa tudi najbolj fizikalno smiselna. Njegove valovne funkcije namreč ne moremo normirati. Opišemo ga z

$$\psi(\mathbf{x}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)}, \quad \omega_k = \hbar\mathbf{k}^2/2m \quad (24)$$

iz česar izračunamo da

$$Q = 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{p} = \nabla S = \hbar\mathbf{k} \quad (26)$$

Na delce v ansamblu torej ne deluje nobena sila, saj sta oba potenciala (kvantni in zunanji) enaka 0. Trajektorije delcev v ansamblu pa so vzporedne valovnemu vektorju k in zaradi $R^2 = A^2$ postavljene enako gosto v prostoru.

6.3 Gaussov valovni paket

V običajni interpretaciji prost delec raje opišemo z valovnem paketom pri $V = 0$. Recimo, da imamo ob $t = 0$ normaliziran gaussov paket, postavljen v izhodišče, ki ga opiše valovna funkcija

$$\psi_0(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-3/4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{x}^2/4\sigma_0^2} \quad (27)$$

kjer je $\sigma_0^2 = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ širina paketa v vsaki smeri. Velja $\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \hbar\mathbf{k}$, torej se center paketa premika z začetno (grupno) hitrostjo $\mathbf{u} = \hbar\mathbf{k}/m$. Časovni razvoj $\psi(\mathbf{x}, t)$ dobimo iz Schrödingerjeve enačbe za $V = 0$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = (2\pi s_t^2)^{-3/4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}t) - (\mathbf{x} - \mathbf{u}t)^2/4\sigma_0 s_t} \quad (28)$$

kjer je $s_t = \sigma_0(1 + i\hbar t/2m\sigma_0^2)$. Iz tega lahko izrazimo fazo in amplitudo $\psi(\mathbf{x}, t)$, ki bosta relevantna za obnašanje ansambla delcev v BI. Zapisala bom kar amplitudo $R(\mathbf{x}, t)$ in gradient faze $\nabla S(\mathbf{x}, t)$

$$R(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma^2)^{-3/4} e^{-(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)^2/4\sigma^2} \quad (29)$$

$$\nabla S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{u} + (\mathbf{x} - \mathbf{u}t)\hbar^2 t/4m\sigma_0^2\sigma^2 \quad (30)$$

kjer je

$$\sigma = |s_t| = \sigma_0[1 + (\hbar t/2m\sigma_0^2)^2]^{1/2}$$

širina paketa v vsaki smeri ob času t .

Iz teh nastavkov lahko preidemo na BI. Hitrostno polje po ansamblu bo

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m} = \mathbf{u} + (\mathbf{x} - \mathbf{u}t)\hbar^2 t/4m^2\sigma_0^2\sigma^2 \quad (31)$$

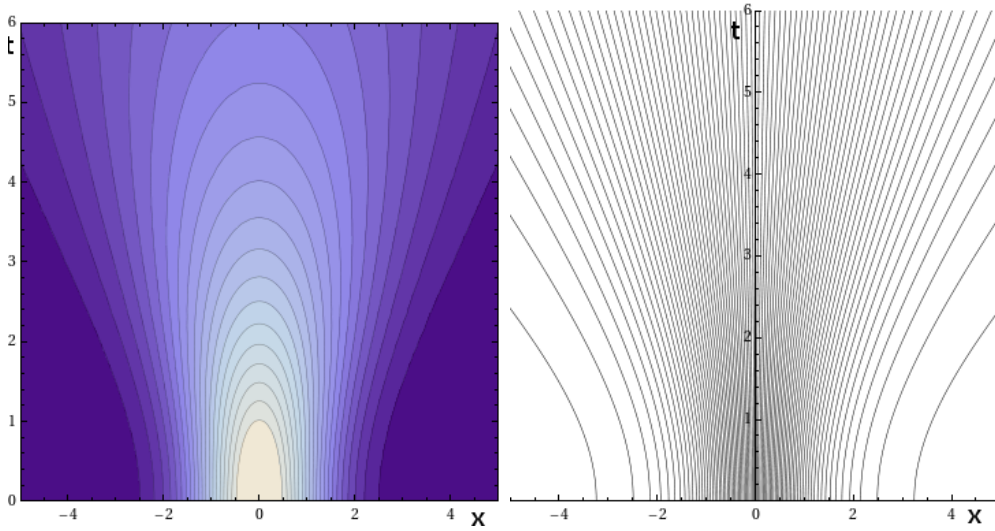
kjerkoli bo torej delec, na začetku bo imel začetno hitrost \mathbf{u} . Recimo, da imamo gibanje v 1D in $u > 0$. Potem delci na sprednji strani paketa ($x > ut$) pospešujejo in delci na zadnji

strani $x < ut$ zavirajo. V točki $x = ut$ se gibljejo enakomerno. Z integracijo hitrosti dobimo enačbo njihovih trajektorij

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}t + \mathbf{x}_0[1 + (\hbar t/2m\sigma_0^2)^2]^{1/2} \quad (32)$$

kjer je \mathbf{x}_0 začetna pozicija delca. Prvi člen opisuje, kako se giba celoten paket, drugi pa razširjanje znotraj paketa. Vidimo, da je razširjanje hiperbolično z asimptoto $\mathbf{x} = \pm \mathbf{x}_0 \hbar t/2m\sigma_0^2$. Delec v centru paketa, $x_0 = 0$, pa se giblje enakomerno.

Slika 1 prikazuje levo: projekcijo verjetnostne gostote, ki jo dobimo iz valovne funkcije $\psi(\mathbf{x}, t)$ po običajni interpretaciji in desno: trajektorije ansambla delcev, ki taki situaciji ustrezajo po BI (desno) za 1D problem pri $u = 0$.



Slika 1: Levo: projekcija verjetnostne gostote in desno: trajektorije ansambla delcev za 1D problem pri $u = 0$, [7]

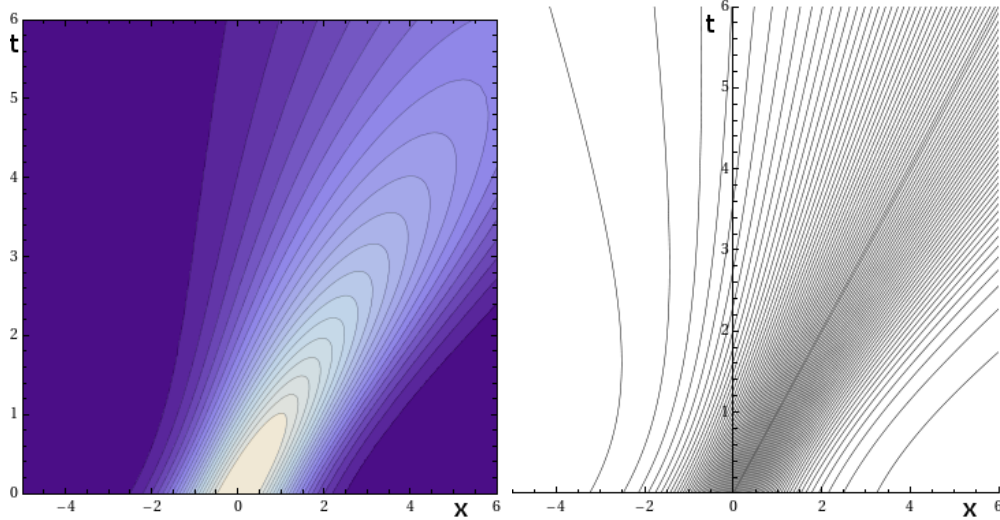
Slika 2 pa prikazuje isto za $u > 0$, kjer se celoten paket premika v desno.

Vidimo, da je gibanje delcev glede na os $x = ut$ res hiperbolično, gostota v ansamblu pa že vizualno v zvezi z verjetnostno gostoto na sosednji sliki.

Vzrok za pospeševanja in pojemanja delcev je izključno v kvantnem potencialu Q , saj $V = 0$. Iz njega izračunana kvantna sila je

$$\mathbf{F} = -\nabla Q = \frac{\hbar^2}{4m\sigma_0^4}(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) = \frac{\hbar^2}{2m\sigma_0^4} \mathbf{x}_0 \left[1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_0^2} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (33)$$

Iz zgornjega izraza se lepo vidi, da bolj ko smo na začetku stran od izhodišča, večja je sila. To je torej primer, kjer z padajočo amplitudo pilotnega vala, $|Q|$ in $|\mathbf{F}|$ v amplitudi naraščata. V limitnem primeru $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{F} \rightarrow 0$ pa gibanje postane linearno (delci se gibljejo skoraj po asimptoti).



Slika 2: Levo: projekcija verjetnostne gostote in desno: trajektorije ansambla delcev za 1D problem pri $u > 0$, [7]

6.4 Potencialna stopnica

Recimo, da imamo 1D problem z zunanjim potencialom v obliki stopnice, torej $V > 0$ za $x > 0$ in $V = 0$ sicer. Zamislimo si primer, ki bi ga v običajni interpretaciji opisali kot vpad ravnega vala z energijo E , iz leve strani. Za $E > V$ je valovna funkcija za to situacijo

$$\psi(x, t) = \begin{cases} A(e^{ikx} + ce^{-ikx})e^{-iEt/\hbar}, & \text{za } x < 0, \\ Abe^{i(k'x - Et/\hbar)}, & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

kjer sta $\hbar k = (2mE)^{1/2}$ in $\hbar k' = [(2m(E - V))]^{1/2}$ klasična momenta na obeh območjih.

Kakšni sliki to ustreza v BI si pogledamo tako, da sledimo možnim trajektorijam delca. Zgornja valovna funkcija nam sedaj služi kot pilotni val. Gibalno količino delcev pri $x > 0$ z lahkoto poračunamo kot

$$p = dS/dx = \hbar d(k'x - Et/\hbar)/dx = \hbar k' \quad (34)$$

Vsi delci imajo torej enako hitrost, kako daleč so ob določene času je odvisno le od tega, kdaj so zadeli ob stopnico. Z izračunom trajektorij za $x < 0$ je nekaj več dela, saj moramo upoštevati interferenco, ki je posledica vsote obeh členov, vendar končno za $E = 3V/2$, $\hbar = 1$, $k = 1/2$, $m = \sqrt{3}/4$ dobimo trajektorije

$$t = \begin{cases} x + \frac{1}{2} \sin x - a, & \text{za } x < 0, \\ \frac{3}{2}x - a, & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

kjer je $a = x_0 + \frac{1}{2} \sin x_0$, $x_0 \leq 0$. Vidimo, da se torej delci vedno gibljejo v smeri naraščajočega x , za $x > 0$ linearno in za $x < 0$ z nihanjem okrog ravne črte, ki predstavlja klasično

povprečje. Reflektivnost se torej nikjer ne pozna v smislu odbitja delca v drugo smer, kot bi si klasično predstavljali.

Za primer, ko $E < V$ pa je rešitev Schrödingerjeve enačbe naslednja funkcija

$$\psi(x, t) = \begin{cases} 2Ae^{i\beta/2} \cos(kx - \beta/2)e^{-iEt/\hbar}, & \text{za } x < 0, \\ A(1 + e^{i\beta})e^{-(\alpha x + iEt/\hbar)}, & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

kjer sta $\beta = 2 \tan^{-1}(-\alpha/k)$ in $\alpha = [2m(V - E)]^{1/2}$ realna. S to valovno funkcijo opišemo tuneliranje v klasično prepovedano območje $x > 0$. Obnašanje delcev po BI je za ta primer precej presenetljivo. Zaradi konstantnega krajevnega dela faze ψ pri $x < 0$ in $x > 0$ so delci na obeh straneh kar pri miru. O tem, da delci prihajajo in se odbijejo sploh ne moremo govoriti. Ravno na tem primeru se lepo vidi, da nas BI opozori, da z vpadnim in odbitim ravnim valom ne opisujemo prostega delca, ki leti proti stopnici in se od nje mogoče odbije. Za opis tega moramo uporabiti vpadni valovni paket, ne pa ravnega vala.

V smislu BI smo torej le opisali, kako se bo gibal ansambel delcev pod vodstvom zgoraj zapisanega vala, ki je tak kot je že ob času $t = 0$ in zato na delec potencialna stopnica vpljiva že od samega začetka, ne glede na to, kako daleč od nje je njegovala začetna pozicija. Zaradi tega ta delec pravzaprav sploh ni prost.

6.5 Tuneliranje skozi bariero

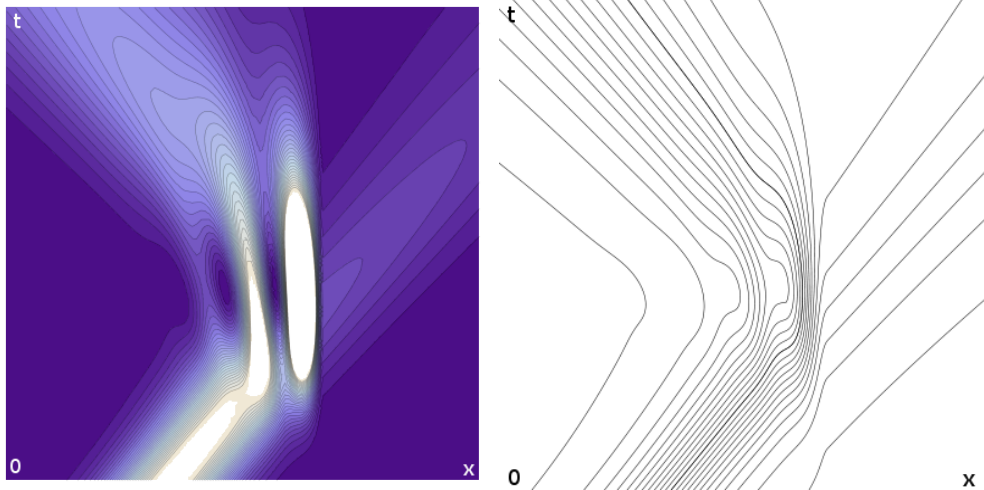
Zgornja razmišljanja lahko nadaljujemo na primeru vpada valovnega paketa na npr. kvadratno bariero. Pričakujemo, da bomo z valovnim paketom dobili bolj realistične rezultate. Recimo, da imamo gaussovski paket s povprečno energijo E , postavljen daleč od barriere. Ločimo dva primera; $E < V$, kjer je neklasičnost opažena v tem, da dobimo delce tudi na drugi strani barriere in $E > V$, kjer je neklasično to, da sploh dobimo tudi odbite delce. V obeh primerih te efekte dobimo zaradi modifikacije energije delca (ki je začetno $\approx E$) zaradi fluktuacij pilotnega vala ψ v bližini barriere.

Vemo, da je celotna energija delca

$$-\partial S/\partial t = (1/2m)(\partial S/\partial x)^2 + V + Q \quad (35)$$

evaluirano na njegovi trajektoriji. Delec torej ne vidi barriere, kot jo poda potencial V , ampak vidi celoten efektiven potencial $V + Q$, ki je torej lahko manjši ali večji kot V . Tudi kinetična energija delca, $(1/2m)(\partial S/\partial x)^2$, se lahko po trajektoriji spreminja. Ne smemo pozabiti tudi, da se njegova celotna energija ne ohranja. Za tuneliranje je torej pomembno le, da $-\partial S/\partial t \geq V + Q$. Torej se tuneliranje lahko zgodi, ker je efektiven potencial znižan; lahko pa je celo zvišan, a ima delec dovolj veliko kinetično energijo. Že iz obravnave gaussovskega paketa vemo, da se tam delci iz prednjega dela paketa pospešujejo. Podobno se lahko zgodi tudi tukaj. Celotna energija in efektiven potencial lahko postaneta celo negativna, v določeni domeni.

Projekcijo verjetnostne gostote in trajektorije delcev za vpad gaussovskega paketa na tanko bariero prikazuje slika 3. Vidimo, da le delcem iz sprednjega dela paketa uspe tunelirati, medtem ko je večina odbita. Ker prednji delci, ki tunelirajo, niso preveč vpljivani od



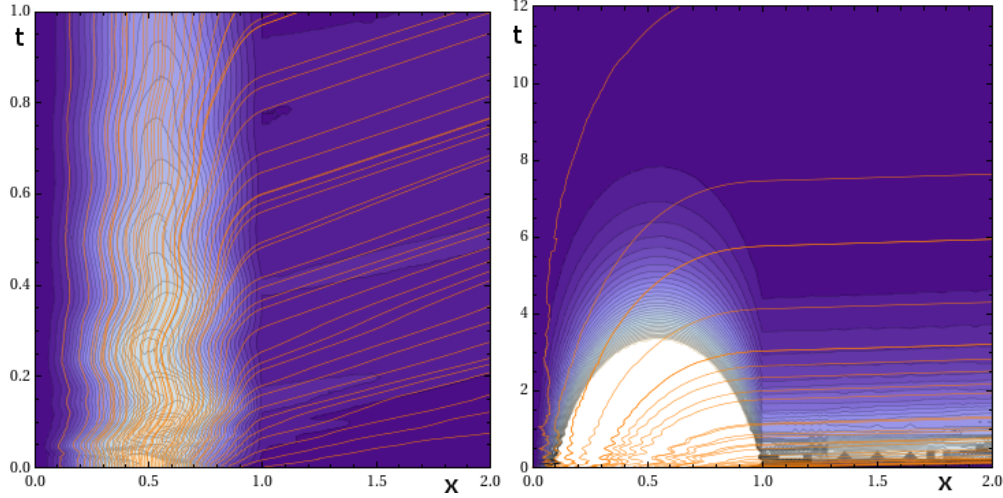
Slika 3: Levo: projekcija verjetnostne gostote in desno: trajektorije za odboj na tanki barieri z $V > E$, [7]

odbitega vala in interference, ki ga spremlja, saj je ta še v nastajanju, je njihovo gibanje precej enakomerno. To se najlepše vidi na prvem delcu, ki ima komaj zlomljeno trajektorijo. Zaradi pogoja, da se trajektorije ne sekajo, se ne more zgoditi, da bi tuneliral še kak delec s sosedoma, ki ne tunelirata. Vidimo tudi, da veliko delcev, ki so odbiti, bariere sploh nikoli ne doseže, ker jih odbije efektivna sila, ki nastane zaradi interference vpadnih in odbitih valov. Ta je zapisana v kvantnem potencialu Q . Na ta način Q raztegne vpliv V še daleč od mesta, kjer bariera sploh stoji.

Primer tuneliranja v naravi je jedrski razpad, pri katerem morajo delci premagati določeno potencialno bariero. Presenetljivo je, da je v BI podatek kdaj in če sploh delec premaga bariero določen z njegovo začetno pozicijo. Zato je ta interpretacija intuitivno primernejša kot običajna, ki tuneliranje opisuje zgolj z valovno funkcijo. Projekcijo verjetnostne gostote valovne funkcije in trajektorije za ansambel delcev, ki je znotraj jedra v osnovnem stanju, pri α -razpadu prikazuje slika 4. Tanka bariera je postavljena pri $x = 1$. Vidimo, da delec, ki ima začetno pozicijo bližje bariere prej tunelira skozi njo.

Podobno bi lahko obravnavali še odboj na stopnici ali pa paket v končni potencialni jami, kjer bi delci, ki bi imeli dovolj energije premagali skok v potencialu. Razlika napram sliki 3 bi bila v tem, da bi imeli delci na drugi strani stopnice spremenjeno hitrost. Zanimivost trajektorij v tem primeru je, da se lahko nekaj časa zadržijo znotraj stopnice, potem pa se vrnejo nazaj ven.

Ne smemo pa pozabiti, da se pri vseh zgornjih primerih vedno realizira samo ena trajektorija, za en delec, ki je popolnoma neodvisen od ostalih.



Slika 4: Projekcija verjetnostne gostote in trajektorije za α razpad pri dveh različnih časovnih skalah, levo: $t < 1$, desno: $t < 12$, [7]

7 Spin

Čeprav se zdi, da je sistemu spinov nemogoče konstruirati realističen fizikalen model, je kavzalna interpretacija uspela zajeti tudi ta aspekt.

Dinamiko spinske valovne funkcije opisuje Paulijeva enačba

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (36)$$

kjer je Hamiltonski operator

$$\hat{H} = -(\hbar^2/2m)[\nabla - (ie/\hbar c)\mathbf{A}]^2 + \mu\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} + eA_0 + V \quad (37)$$

kjer so e , m , μ naboj, masa, magnetni moment delca, A_0 , \mathbf{A} električni in magnetni potencial, \mathbf{B} magnetno polje in $\boldsymbol{\sigma}$ vektor, katerega komponentne so Paulijeve matrike. Hamiltonian je torej 2×2 matrika, $\psi(\mathbf{x}, t)$ (t.i. spinor) pa ima dve kompleksni komponenti, ki jih bomo označili z $\psi = \psi^a$, $a = 1, 2$. Kavzalna interpretacija začne s tem, da iz enačbe (36) preberemo obstoj toka

$$\mathbf{j} = (\hbar/2mi)[\psi^\dagger \nabla \psi - (\nabla \psi^\dagger) \psi] - (e/mc)\mathbf{A} \psi^\dagger \psi \quad (38)$$

ki se ohranja. Iz tega potem definiramo hitrost delcev kot $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$, kjer je $\rho = \psi^\dagger \psi$.

Komponento spinorja bomo zapisali kot

$$\psi^a = Re^{iS/\hbar} \varphi^a \quad (39)$$

Spinor bomo interpretirali s tem, da nam definira stanje rotacije v okviru treh ortogonalnih vektorjev, ki jih sam določa. V naslednjih korakih jih bomo poiskali. Iz ψ in njemu hermitskega ψ^\dagger konstruiramo realen vektor $\mathbf{S} = S_i \mathbf{e}_i$, katerega komponente so dane z

$$S_i = \psi^\dagger \sigma_i \psi \quad (40)$$

in so \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$ ortonormalni vektorji v prostoru.

Generiramo še dva vektorja, $\mathbf{M} = M_i \mathbf{e}_i$ in $\mathbf{N} = N_i \mathbf{e}_i$, s pomočjo dualnega spinorja $\bar{\psi}$, (kjer je $\bar{\psi}^1 = -\bar{\psi}^2$, $\bar{\psi}^2 = \bar{\psi}^1$) iz

$$\bar{\psi} \sigma_i \psi = M_i + i N_i \quad (41)$$

Izkaže se, da so vektorji $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{S}$ ortogonalni in definirajo set enotnih vektorjev

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{M}/\rho, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{N}/\rho, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{S}/\rho, \quad (42)$$

ki jih bomo kasneje povezali z predstavitvijo spina.

Iz QM izraza za pričakovano vrednost spinske opazljivke v stanju $\psi(\mathbf{x}, t)$

$$\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle = \langle (\hbar/2) \sigma \rangle = (\hbar/2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger \sigma \psi d^3x \quad (43)$$

vidimo, da je vektor $(\hbar/2)\mathbf{S}$ dobra definicija za spinsko gostoto, zato bomo spinsko vektorsko polje za ansambel delcev definirali kot

$$\mathbf{s} = (\hbar/2\rho)\mathbf{S} = (\hbar/2)\varphi^\dagger \sigma \varphi, \quad (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})^{1/2} = \hbar/2 \quad (44)$$

Vektor spina za posamezen delec je $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}(t), t)$ evaluiran na njegovi trajektoriji. Vidimo, da je vektor \mathbf{s} stalno vzporeden \mathbf{e}'_3 . Iz desnega dela enačbe (44) pa vidimo, da delec nikoli ne miruje. Glede na formalizem je \mathbf{s} lokalno pričakovana vrednost operatorja za spin.

Če Paulijevo enačbo (36) množimo z $(\psi^\dagger \sigma)$ in od tega odštejemo njeno hermitsko konjugiranko, dobimo enačbo, ki pove kako se \mathbf{s} časom spreminja vektorsko polje spinov

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{s} = \mathbf{T} + (2\mu/\hbar)\mathbf{B} \times \mathbf{s} \quad (45)$$

kjer je

$$\mathbf{T} = (1/m\rho)\mathbf{s} \times \partial_i(\rho \partial_i \mathbf{s}) \quad (46)$$

kvantni navor. Če \mathbf{v} identificiramo z $\dot{\mathbf{x}}$, potem precesijo, ki jo vidimo, če se vsedemo na en delec v ansamblu opisuje enačba

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = (\mathbf{T} + (2\mu/\hbar)\mathbf{B} \times \mathbf{s})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \quad (47)$$

Primer $\mathbf{T} = 0$ ustreza klasični precesiji spinskega vektorja okrog zunanjega magnetnega polja. Vidimo pa, da celo za $\mathbf{B} = 0$ in $\mu = 0$ vektor spina še vedno precesira, zaradi kvantnega navora. To se zgodi, ko je ψ superpozicija spinskih lastnih stanj. Tako prav kvantni navor T poskrbi, da po končani meritvi npr. \hat{s}_z lahko izmerimo samo dve možni vrednosti - spin gor oz. dol - ki ustrezata običajnim spinskim stanjem.

Tudi sedaj iz realne dela Paulijeve enačbe pridelamo Hamilton-Jacobijevo enačbo. Ta poleg prejšnjega kvantnega potenciala Q , ki ni odvisen od spina, vsebuje še potencial, ki je odvisen samo od spina, Q_s . Iz te enačbe, spet lahko izrazimo energijo delca in druge lastnosti. Enačba iz imaginarnega dela pa spet ustreza kontinuitetni enačbi.

Če povzamem, zgornja izvajanja so bila le hiter vpogled v kavzalno interpretacijo spina. S tem sem le na kratko predstavila dinamiko ansambla, ki je v tem primeru opisana s hitrostjo delca \mathbf{v} in njegovim spinskim vektorjem \mathbf{s} . Določena pa je z začetno pozicijo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ in začetno valovno funkcijo $\psi_0 = \psi(\mathbf{x}, t)$. Lastnost, da delci imajo spin se torej manifestira v dodatnem spinskem vektorju \mathbf{s} , ki ga lahko poračunamo za vsak delec iz ansambla. Pri tem vpeljava vektorja \mathbf{s} ni bila nenaravna, saj je v svojem bistvu le lokalna pričakovana vrednost spinskega operatorja.

Celostna teorija je narejena v [6].

8 Zaključek

V svojem seminarju sem poskušala na kratko opisati osnovne ideje Bohmove interpretacije. Veliko aspektov in razširitev je ostalo neomenjenih, kar pa ne pomeni, da v splošnem niso premišljeni. S tem mislim na podrobnejši opis spinske teorije, many-body problem in razširitev na relativistično teorijo.

Čeprav jo je Bohm že v naslovu predstavitvenega članka [2] 'A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables' predstavil kot interpretacijo skritih spremenljivk, tega skoraj nisem omenjala. Kot že rečeno so pri Bohmu skrite spremenljivke koordinata, val ψ in vse kar iz tega izračunamo, npr. lokalno pričakovane vrednosti operatorjev. Evidentno so to nelokalne skrite spremenljivke in zato ne spadajo v skupino lokalnih skritih spremenljivk, ki jih je Bell uvrstil s svojim neenačbami. Pravzaprav se da tudi v okviru BI razložiti Einstein-Podolsky-Rosen paradoks [6].

Na nek način izgleda, kot da BI z uvedbo ansambla delcev poveča komplikacije v formulaciji, ne prinese pa nič novega. Osebnost se mi zdi, da je primarna prednost BI predstavljenost. Dogajanje, o katerem se v okviru običajne interpretacije ne sprašujemo, ima tu v ozadju fizikalno realnost. Posebno pomembna se mi zdi tudi diskusija o meritvi, ki je bila v tem seminarju zelo površno omenjena, je pa v [6] zelo natančno obravnavana. V njej se jasno demistificira kolaps valovne funkcije iz Copenhagenske interpretacije. Zanimiva pa se mi zdijo tudi razmišljanja o preteklosti izmerjenega delca, ki si jih v okviru BI lahko privoščimo.

Omenila bi še, da Bohmova interpretacija je sodobna v smislu, da lahko najdemo članke, ki primerjajo in izvajajo računanje v njenem formalizmu. Končno pa spada vsaj v fizikovo splošno razgledanost.

9 Dodatek

9.1 Izpeljava Hamilton-Jacobijeve enačbe

Hamilton-Jacobijevo enačbo dobimo s pomočjo kanonične transformacije, pri kateri je novi Hamiltonian $K = K(Q, P, t)$ identično enak 0. Pri tej transformaciji naj bo $S = S(q, Q, t)$ generatrisa transformacije. Prvotne koordinate naj bodo (p, q) , nove pa (P, Q) , prvoti Hamiltonian naj bo $H(q, p, t)$, novi pa $K(Q, P, t)$. Za stari in novi set koordinat veljajo Hamiltonove

enačbe. Oba pa povezuje prav generatrisa S z enačbami

$$p_i = \partial S / \partial q_i \quad (48)$$

$$P_i = -\partial S / \partial Q_i \quad (49)$$

$$K = H + \partial S / \partial t \quad (50)$$

Za primer, kjer so nove koordinate konstantne v času ($\dot{P} = \dot{Q} = 0$), je $K = 0$ in enačba (44) se zapiše kot

$$\partial S(q, Q, t) / \partial t + H(q, \partial S(q, Q, t), t) = 0 \quad (51)$$

pri čemer smo uporabili tudi enačbo (42). Rezultat je torej Hamilton-Jacobijeva enačba, ki je diferencialna enačba 1-reda za spremenljivke q_1, \dots, q_n, t .

Literatura

- [1] David Z. Albert. Bohm's alternative to quantum mechanics. *Scientific American*, 270(5):58–67, May 1994.
- [2] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. i. *Phys. Rev.*, 85(2):166–179, Jan 1952.
- [3] David Bohm. *The Undivided Universe*. Routledge, reprint edition, 3 1995.
- [4] Fay Dowker and Adrian Kent. Properties of consistent histories. *Phys. Rev. Lett.*, 75(17):3038–3041, Oct 1995.
- [5] Hugh Everett. “relative state” formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 29(3):454–462, Jul 1957.
- [6] Peter R. Holland. *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 1995.
- [7] Anton Ramšak. neobjavljeno.
- [8] Franz Schwabl. *Quantum Mechanics*. Springer, 4th edition, 11 2007.
- [9] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75(3):715–775, May 2003.