Modeli dinamičnega vzgona letalskih kril. Prvi del.

Sašo Knez in Rudolf Podgornik
Oddelek za fiziko, Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Univerza v Ljubljani

Povzetek

Predstavila bova nekaj dvodimenzionalnih modelov dinamičnega vzgona pri letalskih krilih. Prva dva modela, bernoullijevski in newtonski, ki sta najbolj popularna pri razlagi letalskega leta, sta na žalost napačna in vodita do zaključkov, ki niso v skladu z empiričnimi dejstvi. Kljub temu često najdeta mesto celo v resni fizikalni literaturi. Pokazala bova, kako in zakaj ta dva modela dinamičnega vzgona odpovesta oziroma kdaj morda vendarle pravilno razložita principe leta.

We will present a few two-dimensional models of aerodynamic lift force. The first two models, the Bernoulli and the Newton model, being popularly invoked to explain the principles of flight, are unfortunately wrong and lead to conclusions that are not supported by empirical facts. Nevertheless they often find their way into serious scientific literature. We will show how and when these two models fail to explain the airfoil lift force, and when they nevertheless approximate the truth.

1 Uvod

Letala seveda letijo. O tem se lahko prepričamo vsak dan. Vprašanje, na katerega bova skušala odgovoriti v tem sestavku pa je, zakaj letijo, oziroma bolj specifično, kako pride do dinamičnega vzgona krila. Odgovorov na to vprašanje se da sicer v literaturi najti več [1], vendar pa žal niso vsi pravilni. Cilj tega članka je, da razblini nekatere napačne in zakoreninjene predstave o naravi dinamičnega vzgona pri letalskih krilih in postavi temelje za njegovo pravilno razumevanje. Da bodo ti temelji čimbolj jasno izrisani, se bova omejila zgolj na osnovne principe teorije kril. Poskusila bova opisati, zakaj so napačne predstave o naravi leta res narobe, in v čem se pravilen odgovor loči od napačnih. Tu ne gre za dlakocepenje. Če bi namreč veljale nekatere poenostavljene in napačne razlage leta, se hitro izkaže, da bi letala letela le v posebnih primerih, v spločnem pa bi ostala na tleh, če ne celo kaj hujšega.

Za dinamični vzgon včasih uporabljamo tudi termin **Magnusov** [1] **efekt**. Žal gre tu za nesporazum [2]. "Magnusov efekt"je namreč 110 let pred Magnusom, o njem je poročal Royal Society leta 1749, odkril Benjamin Robbins [2], ki je proučeval let topniških izstrelkov. Pri svoji razlagi dinamičnega vzgona se je Robbins sporekel z Eulerjem, ki je imel

[1]Gustav Heinrich Magnus (1802-1870). Nemški fizik in kemik, Helmholtzev učitelj, ki je med drugim raziskoval nepremočrtno gibanje topovskih projektilov za prusko artilerijo.

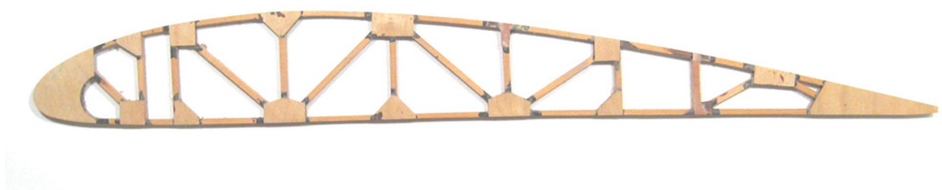
[2]Benjamin Robbins (1707 - 1751). Angleški topničar. ki je prvi predlagal topovske izstrelke s spiralastimi vtori za stabilizacijo. Leta 1742 je ugotovil, da se vrteči se topovski izstrelki ne gibljejo premočrtno, ker nanje deluje sila (dinamičnega vzgona) pravokotno na hitrost.

drugačne (napačne) razlage nepremočrtnega gibanja topovskih izstrelkov. Bolj zgodovinsko ustrezno bi bilo po Tokatyju [2] "Magnusov efekt"imenovati "Robbinsov"oziroma "Robbins - Eulerjev efekt". Toliko o zgodovini.

Druga pomembna stvar, ki se je bova lotila v teh dveh člankih pa je poskus ovrednotenja, do kod lahko teorijo leta razložimo z mahanjem rok in od kod naprej se moramo zateči k enačbam, ki jih le stežka tolmačimo z mahanjem rok. Pokazalo se bo, da se da del teorije leta povedati z intenzivnim mahanjem rok. To je tisti del, ki je povezan z Bernoullijevo enačbo. Drugi sestavni del teorije leta, in sicer hipotezo Žukovskega, pa stežka formuliramo na intuitiven način, saj na precej globokem in netrivialnem nivoju povezuje hidrodinamiko idealnih in neidealnih tekočin. Ta del teorije leta bo radovednemu laiku žal ostal le težko razumljiv.

2 Skupni temelji modelov dinamičnega vzgona krila

O tem, kaj je krilo, imamo vsi precej nazorno predstavo. Krilo je seveda trirazsežno. Ima razpon D, dolžino L ter pripadajočo površino $S = D \times L$. Če krilo prerežemo pravokotno na njegovo dolgo os dobimo **profil krila**. Konkreten primer takšnega preseka in ustrezajočega profila nam prikazuje slika (Slika 4). Lahko si predstavljamo, da je krilo



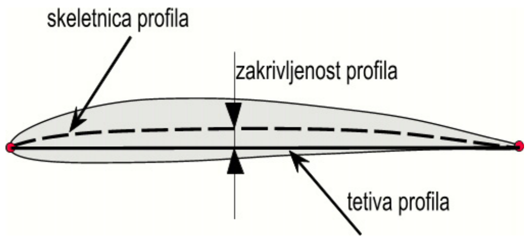
Slika 1: Presek krila pravokotno na njegovo dolgo os razodeva profil krila.

pravokotno na dan profil neskončno, oziroma, da opazujemo tok ne preblizu trupu in tudi ne preblizu konici krila, da nas ne bi skrbeli vplivi konice ali pa korena krila. Za končno veliko krilo je seveda njegov profil odvisen od tega, kje na krilu ga opazujemo, kot nazorno prikazuje slika (Slika 2). Nekaj osnovnih karakteristik konstrukcije krila pa naj opiševa s primerno skico: Slika 3. Na profilu krila definiramo tetivo profila kot daljico, ki povezuje vodilni in zadnji rob krila. Podobno definiramo še skeletnico profila kot sredinsko črto, torej črto, ki je vedno na sredi med zgornjo in spodnjo površino krila. Zakrivljenost profila je največja razdalja med tetivo in skeletnico profila.

Da se ne bi izgubila v podrobnostih bova aerodinamični vzgon krila izpeljala v primeru dvodimenzionlanega modela krila in dvodimenzionalnega toka tekočine okrog krila. Ta prib ližek nama omogoča, da se izogneva vprašanjem povezanih s končno razsežnostjo krila in trodimenzionalno naravo hitrostnega polja.

Na letalu postavimo tri telesne osi $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Velja, da je $\mathbf{x}$ v smeri vektorja hitrosti letala, medtem ko $\mathbf{y}$ kaže od korena do konice krila. $\mathbf{z}$ je pravokotna na obe in kaže navzgor. Okoli dvodimenzionalnega profila krila imamo tudi nek hitrostni profil tekočine, v tem primeru zraka (Slika 2). V limiti neskončnega krila ta hitrostni profil podaja dvodimenzionalna hitrost $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, kjer sta $v_x = v_x(x, y)$ in $v_y = v_y(x, y)$. Predpostavimo tudi, da smo počakali zadosti dolgo, tako da je tok tekočine okrog krila stacionaren in laminaren. To pomeni, da tokovnice sovpadajo s potmi delcev tekočine.

Slika 2: Profil končno velikega krila je odvisen od tega, kje na krilu ga opazujemo. Vzdolž krila se ponavadi zvezno spreminja.



Slika 3: Na skici so prikazani trije osnovni parametri krila: skeletnica, zakrivljenost in tetiva krila.

Za stacionarno laminarno gibanje idealne tekočino vemo [3], da se da Eulerjeve [3] enačbe gibanja, v katerih nastopa lokalno hitrostno polje $\mathbf{v}$, tlak p in gostota kot funkcija tlaka $\rho(p)$, idealne tekočine zapisati v obliki

$$\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla} \left(\tfrac{1}{2} v^2 + \int_0^p \frac{dp}{\rho(p)} \right). \tag{1}$$

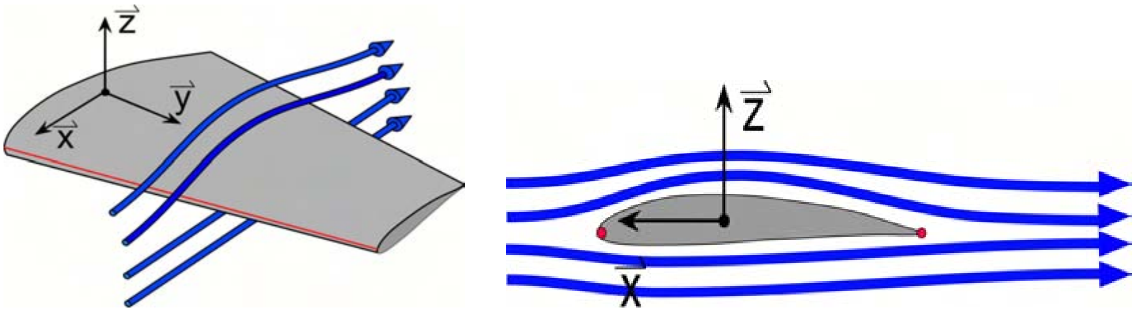
Od tod sledi, da mora biti na vsaki tokovnici in vsaki vrtinčnici izraz v oklepaju konstanten. Seveda je za vsako tokovnico in vrtinčnico ta konstanta lahko drugačna. Če imamo poleg tega opravka še z brezvrtinčnim gibanjem, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = 0$, in je hkrati tekočina nestisljiva, $\rho \neq \rho(p)$, potem odtod neposredno sledi, da mora v celotni tekočini in ne le za vsako tokovnico in vrtinčnico posebej, veljati

$$p + \tfrac{1}{2} \rho v^2 = konst. \tag{2}$$

Zgornjo enačbo ponavadi imenujemo **Bernoullijeva** [4] **enačba**. Seveda vidimo, da je v delih tekočine, kjer je hitrost večja tlak manjši, in obratno. Predpostavimo tudi, da

[3]Leonhardt Euler (1707-1783). Švicarski matematik in fizik, ki je deloval v St.Petersburgu in Berlinu. Utemeljitelj hidrodinamike. Formuliral Newtonovo mehaniko v sodobni diferencialni obliki. Kolos fizike.

[4]Daniel Bernoulli (1700-1782). Švicarski matematik in fizik, po katerem se imenuje najbolj znana



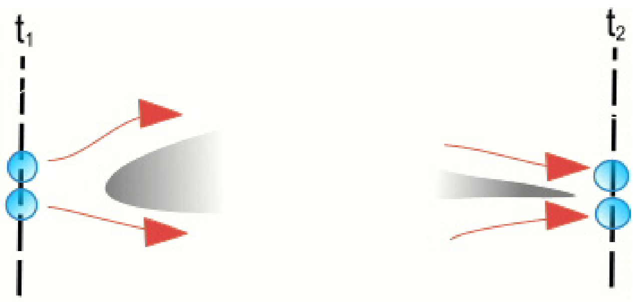
Slika 4: Levo telesne osi na krilu, desno presek krila v (x, z) ravnini oziroma dvodimenzionalni profil krila ter pripadajoči tok.

so relativne spremembe potencialne težnostne energije pri gibanju tekočine majhne (v smeri **z** je krilo vedno tanko) in jih zato lahko zanemarimo. Intuitivna interpretacija Bernoullijeve enačbe govori o gostoti tokovnic, kar meri hitrost, in tlaku. Gostejše kot so tokovnice, manjši je tlak in obratno.

Bernoullijeva enačba bo naše izhodišče pri vpeljavi dinamičnega vzgona. Če je namreč hitrost zraka nad krilom večja kot pod krilom - zaenkrat še nič nismo rekli o tem, zakaj naj bi temu bilo tako - potem bo na spodnjo stran krila deloval nadtlak, ki vodi do sile v smeri osi **z**. To silo imenujemo **dinamični vzgon krila**. Toliko je jasno. Manj jasen pa je odgovor na vprašanje, zakaj naj bi se zrak nad krilom gibal hitreje kot pod njim. Poglejmo kako na to vprašanje odgovorja najbolj popularen a žal napačen model dinamičnega vzgona krila, **bernoullijevski model** [5].

3 Bernoullijevski model

Najprej se torej posvetimo bernoullijevskemu modelu. Osnovna predpostavka bernoullijevskega modela je, da se dva delca zraka, ki ju krilo razdvoji, po prehodu krila spet združita. Eden potuje po zgornji strani krila, drugi po spodnji, medsebojno pa vedno ohranjata isto relativno lego (Slika 5). Iz Slike 5 je jasno, zakaj se v literaturi ta teorija

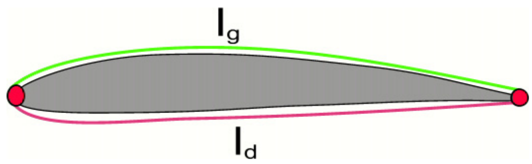


Slika 5: Skica prikazuje dva delca zraka, ki potujeta po različnih straneh krila. Ko prepotujeta krilo, sta po predpostavki spet v istem relativnem položaju kot na začetku.

enačba hidrodinamike. V tej ali podobni obliki te enačbe ni najti v nobenem Bernoullijevem delu [2]. Dejansko gre za Lagrangeov integral Eulerjevih enačb.

[5] Avtor tega modela ni Bernoulli, zato ga ne moreva imenovati Bernoullijev model. Vendar vseeno bistveno sloni na uporabi Bernoullijeve enačbe. Bernoullijevski model je zato smiselen kompromis.

pojavlja tudi pod imenom teorija daljše poti oziroma teorija enakega preletnega časa. Dolžina poti zgornjega delca je enaka dolžini površine profila od vodilnega do zadnjega roba. Podobno velja za spodnji delec. Dolžini teh dveh poti označimo z l_g za zgornjo in l_d za spodnjo pot (Slika 6). Po predpostavki sta ti dve dolžini za krilo različni: $l_g \neq l_d$.



Slika 6: Zgornji delec iz Slike 5 pri obtekanju krila opravi pot, ki je enaka zgornjemu obsegu krila. Na tej skici je ta pot označena svetleje in nosi oznako l_g. Analogno je spodnja pot l_d označena s temnejšo črto.

Da se delca tekočine na zadnjem robu krila zopet združita, morata biti preletna časa na zgornjem robu in na spodnjem robu krila enaka. Od tod pa že sledi, da sta hitrosti delcev tekočine na obeh tokovnicah, torej tik nad in tik pod krilom, različni.

Sedaj lahko zapišemo Bernoullijevi enačbi za oba delca tekočine, oziroma za tokovnici nad in pod krilom. Velja

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_g + \frac{1}{2}\rho \bar{v_g}^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{3}$$

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_d + \frac{1}{2}\rho \bar{v_d}^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2. \tag{4}$$

Enačbi 4 opisujeta zgornjo in spodnjo tokovnico v točki pred krilom, med obtekanjem krila ter za krilom. Ustrezne so tudi oznake. Tu smo predpostavili, da sta hitrosti delca tekočine nad in pod krilom konstantni in enaki $\bar{v_g}$ in $\bar{v_d}$. To je seveda zopet približek, vendar pa s tem nisva okrnila fizikalno vsebino računa. Namesto o lokalni hitrosti pač govoriva o povprečni hitrosti.

Omenila sva že osnovno predpostavko bernoullijevskega modela (Slika 5), ki pravi, da delca tekočine pot nad krilom in pod njim, l_g in l_d, preletita v istem času. Imenujmo ta preletni čas Δt. Veljati mora potemtakem, da je

$$\Delta t = \frac{l_g}{\bar{v_g}} = \frac{l_d}{\bar{v_d}}. \tag{5}$$

To enačbo malenkostno preoblikujemo v

$$\frac{\bar{v_g}}{\bar{v_d}} = \frac{l_g}{l_d} = R. \tag{6}$$

S tem smo definirali tudi razmerje dolžin zgornje in spodnje strani profila R. R določajo geometrijske karakteristike krila. Iz enačb 4 lahko zapišemo razliko tlakov nad in pod krilom. Velja

$$\Delta p = p_g - p_d = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{v_g}^2 - \bar{v_d}^2\right) = \frac{F_v}{S}. \tag{7}$$

Tukaj smo vpeljali še površino krila S in označili silo dinamičnega vzgona kot F_v. Predpostavimo še, da je sila dinamičnega vzgona vedno pravokotna na vektor hitrosti $\mathbf{v}$ nemotenega toka. Silo vzgona lahko iz enačbe 6 izrazimo tudi z razmerjem dolžin profila R in sicer

$$F_v = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{v_g}^2 - \bar{v_d}^2\right)S = \frac{1}{2}\rho\bar{v_d}^2\left(R^2 - 1\right)S. \tag{8}$$

Privzemimo še to, da je hitrost letala v enaka povprečni vrednosti hitrosti med zgornjo in spodnjo stranjo krila, kar je seveda smiselno in najinih zaključov bistveno ne spremeni. Torej

$$v = \tfrac{1}{2}(\bar{v_g} + \bar{v_d}) = \tfrac{1}{2}\bar{v_d}(R+1). \tag{9}$$

Enačba 8 skupaj z enačbo 9 je v bernoullijevskem modelu izraz za silo dinamičnega vzgona na krilo. Očitno je sorazmerna kvadratu razmerja med zgornjo in spodnjo dolžino krilo in po enačbi 9 tudi kvadratu hitrosti letala.

3.1 Paradoksi bernoullijevskega modela

Bernoullijevski model je kljub svoji navidezni elegantni logičnosti napačen. Poglejmo si nekaj najbolj očitnih neskladij med napovedmi tega modela in empiričnimi dejstvi.

3.1.1 Nestabilnost leta

Če predpostavimo vodoraven let in torej letalo ne pospešuje v vertikalni smeri, mora biti vertikalna komponenta hitrosti enaka nič. Sila dinamičnega vzgona torej v tem primeru natančno uravnoveša silo teže (Slika 7). Iz enačb 8 in 9 sledi, da je hitrost letala za vodoravnen let podana z

$$v = \tfrac{1}{2}(R+1)\sqrt{\frac{2mg}{S\rho\left(R^2-1\right)}}, \tag{10}$$

odvisna od razmerja med spodnjo in zgornjo potjo obtekanja krila R, mase letala m in površina krila S. Med letom se ti parametri ne spreminjajo, zatorej bi bila hitrost letala, pri kateri bi bil vodoraven let možen, po bernoullijevskem modelu ena sama. Vodoraven let letala "po bernoullijevsko"bi bil potemtakem nestabilen in možen le pri eni sami, natančno določeni hitrosti. Empirična dejstva in celo vsakdanja opažanja tega zaključka ne potrjujejo!

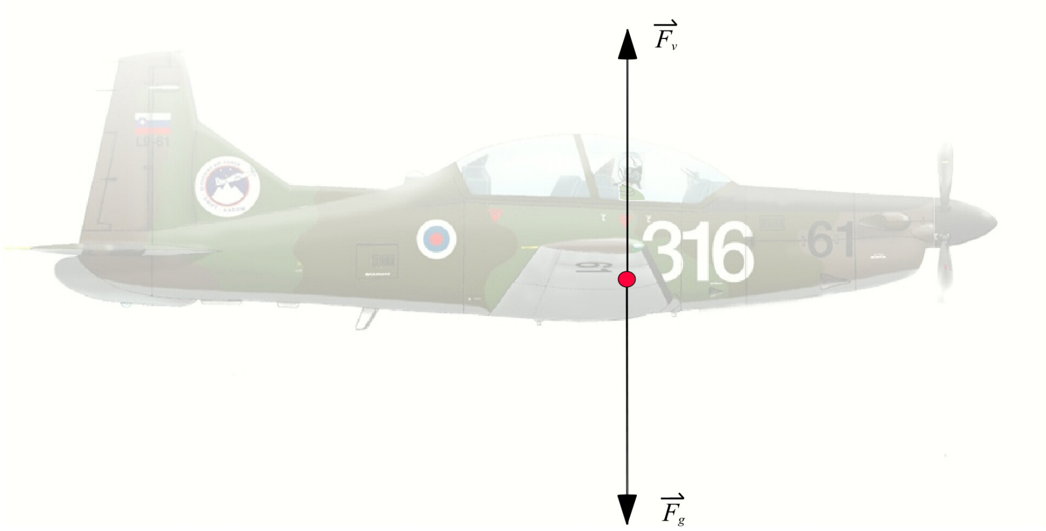
3.2 Primanjklaj vzgona

Izračunajmo vzgon letala tipa **Pilatus PC-9**, ki je v lasti Slovenske vojske. Pilatus tipično tehta $m = 2000kg$ in leti v režimu vodoravnega leta pri hitrosti $v = 210kts$[6] $= 108m/s$. Po bernoullijevskem modelu je sila dinamičnega vzgona podana z enačbo 8. Potrebno je le vstaviti numerične vrednosti. Pilatus PC-9 ima profil krila, ki ga standardno označujemo s kodo [7] PIL15M825. Faktor R za ta profil znaša

$$R(PIL15M825) = \frac{\bar{v_g}}{\bar{v_d}} = \frac{l_g}{l_d} = 1.05. \tag{11}$$

[6]Letalski vozel $knt = 0.514m/s$.

[7]Različne krilne kode opisujejo obliko krila in pa njegove osnovne parametre. V rabi je več krilnih kod.



Slika 7: Sila vzgona in sila teže na PC-9. Privzeto je, da imata obe sili isto prijemališče, kar sicer v splošnem ne drži in je zelo pomembno pri aerodinamiki kritičnih naletnih kotov in dinamiki zloma vzgona. To majhno razhajanje pa na naš primer ne vpliva prav nič, saj obravnavamo letalo kot točkasto togo telo.

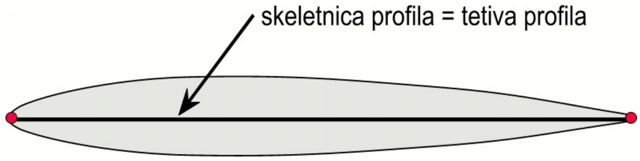
Površina krila na letalu PC-9 je $S = 16,29m^2$. Vse dimenzijske podatke za PC-9 torej poznamo in lahko izračunamo numerično vrednost dinamičnega vzgona. Ker vemo, da je s Pilatusom mogoče leteti vodoravno, pričakujemo silo vzgona enako sili teže. In kaj nam da bernoullijevski model? Dobimo

$$F_v = \tfrac{1}{2}\rho\bar{v_d}^2(R^2-1)S = \frac{2\rho v^2 S(R-1)}{(R+1)} = 11122N. \tag{12}$$

Pri povprečni operativni masi Pilatusa $m = 2000kg$ pe je ustrezna teža letala $F_g = 19620N$. Torej nam idealiziran bernoullijevski model da silo dinamičnega vzgona, ki je približno dvakrat manjša od dejanske vrednosti, potrebne za režim leta, za katerega vemo, da je izvedljiv. Podoben izračun za najbolj razširjeno zasebno letalo **Cessna C-172** za vodoravni let da kar dvajsetkrat premajhno silo dinamičnega vzgona. Bernoullijevski model dinamičnega vzgona se je torej v obeh primerih zložil po tleh. Dobesedno.

3.2.1 Simetrični profili

Simetrični profil je definiran kot profil, ki ima enako oblikovano spodnjo in zgornjo površino. Pri simetričnem profilu je tetiva profila očitno hkrati skeletnica profila (Slika 8). Torej lahko simetričen profil definiramo tudi kot popolnoma nezakrivljen profil, iz česar sledi da je razmerje $R \equiv 1$. Po bernoullijevskem modelu takšen profil ne bi smel proizvajati vzgona, saj sta poti delcev zraka nad in pod krilom identični. Če sta poti l_g in l_d identični, bi pričakovali, da bosta takšni tudi hitrosti $\bar{v_g}$ in $\bar{v_d}$. Razlika identičnih hitrosti je nič in tolikšen bi moral biti tudi vzgon. Vendar empirična dejstva kažejo, da je v normalnih režimih leta simetrični profil praktično enako dober kot primerljiv zakrivljen profil. Pravzaprav imajo nekatera letala, kot recimo dvokrilni akrobatski **Pitts S2B**, krila z izključno simetričnimi profili. Tudi tu torej bernoullijevski model ni sposoben opisati empiričnih dejstev.



Slika 8: Skica prikazuje simetričen profil in sovpadanje skeletnice profila s tetivo profila.

3.2.2 Hrbtni let

Bernoullijevski model nikakor tudi ne zmore pojasniti hrbtnega leta. Če se letalo obrne na hrbet, napačno orientira krilo. Krilo bo tako imelo spodaj večjo pot in s tem v bernoullijevskem modelu večjo hitrost. Tako bo sila vzgona delovala navzdol. Letalo bi padlo kot kamen! Po bernoullijevski razlagi letala torej nikakor ne bi mogla leteti

Slika 9: Slovenijo dnevno preletava dvokrilni akrobatski **Pitts S2B**, ki ima vgrajena krila s simetričnim profilom in ki po bernoullijevski teoriji ne bi smel leteti!

hrbtno, kar pa seveda vemo, da ne drži. Še bolj zanimivo je, da so akrobatska letala, ki morajo imeti dobre letalne lastnosti tudi v hrbtnem letu, skoraj izključno opremljena s krili simetričnega profila. Slovenijo skoraj vsak dan preletava dvokrilni akrobatski **Pitts S2B**, ki ima vgrajena krila s simetričnim profilom, Slika 9.

3.2.3 Einsteinovo krilo

Leta 1916 je Einsteina njegov bivši asistent na Univerzi v Zürichu, Ludwig Hopf, navdušil nad teorijo letenja [4]. Hopf je namreč s Tehniške Univerze v Aachnu odšel na center za načrtovanje letal v Berlin-Adlershofu, kjer se je začel ukvarjati z aerodinamiko. Einsteina je prepričal, da je nekaj časa delal kot svetovalec pri priznani nemški letalski tovarni LVG (Luft-Verkehrs-Gesellshaft).

V tem obdobju, natančneje 25 avgusta 1916, je Einstein objavil tudi svoj edini članek s področja hidrodinamike in aerodinamike: "Elementare Theorie des Wasserwellen und des Fluges"(Elementarna teorija vodnih valov in leta). V tem v članku je prvič predlagal profil krila z grbo oz. profil mačjega hrbta. Idejo za to je dobil na osnovi zmotne predstave o bernoullijevski naravi toka zraka okrog krila. Izboklina na krilu naj bi povečala vzgon

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

Dr. Arnold Berliner und Prof. Dr. August Pütter

Vierter Jahrgang. 25. August 1916. Heft 34.

Elementare Theorie der Wasserwellen und des Fluges.

Von A. Einstein, Berlin-Wilmersdorf.

Worauf beruht die Tragfähigkeit der Flügel unserer Flugmaschinen und der im Gleitflug durch die Luft dahingleitenden Vögel? Über diese Frage herrscht vielfach Unklarheit; ja ich muß sogar gestehen, daß ich ihrer einfachsten Beantwortung auch in der Fachliteratur nirgends begegnet bin. Ich hoffe daher, manchem Leser ein Vergnügen zu machen, indem ich mit der nachfolgenden kleinen Betrachtung aus der Theorie der Flüssigkeitsbewegungen diesem Mangel abzuhelfen suche.

Durch eine nach rechts hin (Fig. 1) sich verengende Röhre ströme in der Pfeilrichtung eine inkompressible Flüssigkeit, deren innere Reibung wir vernachlässigen. Wir fragen nach der Druckverteilung in der Röhre. Da durch jeden Querschnitt pro Zeiteinheit dieselbe Flüssigkeitsmenge hindurchströmen muß, so wird die Strömungsgeschwindigkeit q an den Stellen größten Querschnitts am kleinsten, an den Stellen kleinsten Querschnitts am größten sein. Die Geschwindigkeit gekehrt. Quantitativ ist dieser Satz für inkompressible Flüssigkeiten bekanntlich durch die Gleichung

$$p = \text{konst} - \tfrac{1}{2}\,\varrho\, q^2$$

ausgedrückt, wobei ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet.

Wir betrachten zunächst einige allgemein bekannte Beispiele zu diesem Satz. Ausfluß einer unter Druck stehenden Flüssigkeit aus einem Gefäße (*Toricelli*). Bei J (Fig. 2) ist der Druck größer, die Geschwindigkeit dagegen kleiner als bei A, derart, daß

$$p + \tfrac{1}{2}\,\varrho\, q^2$$

während des Ausströmens konstant ist.

Als zweites Beispiel diene der Flüssigkeits-Zerstäuber (Fig. 3). Der durch L zugeführte Luftstrom erweitert sich nach seinem Austritt in die freie Luft nach allen Seiten unter Abnahme seiner Geschwindigkeit. Bei P herrscht deshalb ein geringerer Druck als bei G, also auch ein ge-

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Slika 10: Začetek Einsteinovega edinega članka o hidrodinamiki in aerodinamiki, "Elementare Theorie des Wasserwellen und des Fluges", objavljenega v reviji Die Naturwissenschaften, kjer piše tudi o teoriji kril. Prvi stavek se glasi: "Od kod izhaja vzgon kril naših letal in ptic, ki letajo po zraku".

(Slika 11) in sicer tako, da bi podaljšala pot zraka nad krilom, s tem povečala razliko hitrosti ter tako povečala dinamični vzgon. Lahko bi tudi rekli, da je za Einsteina krilo polovična Venturijeva cev. Teorija kril je bila v času, ko je Einstein pisal ta članek že na precej zavidljivem nivoju, vendar pa je Einstein očitno ni poznal. Einsteinov profil krila je bil preizkušen v Göttingenskem vetrovniku in tudi s kratkim programom preizkusnega letenja, ki ga je opravil nemški letalski pionir Paul Georg Erhardt. Med preizkusi se je izkazalo, da je takšen profil, po bernoullijevskem modelu sicer dobra zamisel, popolnoma neuspešen! Letalo se je komaj odlepilo od tal in Erhardt je izjavil, da letalo leti škoraj tako dobro kot zelo debela raca". Einstein se je Erhardtu kasneje v pismu opravičil in priznal,

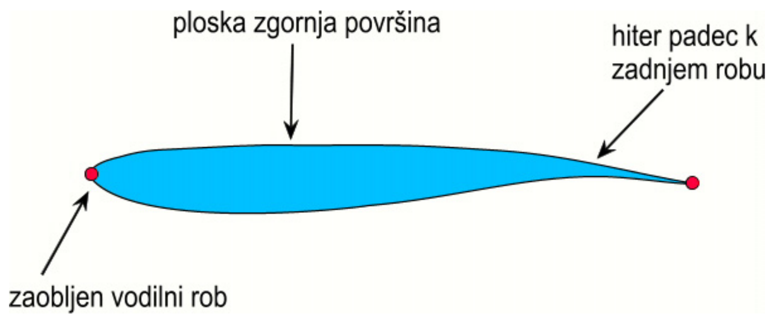
Slika 11: Skica shematično prikazuje profil mačjega hrbta z izrazito izboklino.

da je zagrešil napako in to takšno, ki se lahko zgodi le človeku, "*ki veliko razmišlja in malo bere*". S tem je komentiral svoje nepoznavanje takratne literature o dinamiki tekočin in predvsem o teoriji kril [5].

3.2.4 Superkritično krilo

Hitrost obtekanja tekočine okrog krila je lahko večja, kot je hitrost gibanja letala skozi zrak. Če se letalo giblje s hitrostjo, ki je blizu hitrosti zvoka, lahko zrak obteka krilo tudi z nadzvočno hitrostjo. Poleg Machovega števila letala zato definiramo še lokalno Machovo število, ki nam pove hitrost obtekanja na določenem mestu profila krila. Kritično Machovo število pa je največja hitrost letala, pri kateri je hitrost obtekanja kjerkoli na letalu še podzvočna.

Richard T. Whitcomb [8] se je uspešno ukvarjal z večanjem vodljivosti in ekonomičnosti letala v obzvočnem oziroma transoničnem hitrostnem režimu. Termin obzvočni (transonični) let uporabljamo takrat, kadar je kjerkoli ob krilu lokalna hitrost tekočine malenkostno nadzvočna. Eden izmed njegovih največjih uspehov je bila metoda zviševanju kritičnega Machovega števila. Ugotovil je, da se da povečati kritično Machovo število, če ima krilo bolj zaobljen vodilni rob, ravnejšo zgornjo ploskev ter zadnji rob, ki se hitro krivi navzdol. Takšno krilo je poimenoval *superkritično krilo* (Slika 12). Superkritičo krilo



Slika 12: Značilnosti profila superkritičnega krila.

je omogočalo, da je letalo letelo do deset odstotkov hitreje, brez da bi doseglo kritično Machovo število. Letalska industrija je rešitev pograbila, a na zanimiv način. Namesto, da bi se zvišala hitrost potniških letal z $0.7 - 0.8M$ na $0.9M$, kot bi ji superkritično krilo ekonomično omogočalo, se je hitrost komercialnih letal zadržala na $0.8M$, pri čemer pa so letala s superkritičnim krilom v tem režimu porabila veliko manj goriva kot prej. Letala

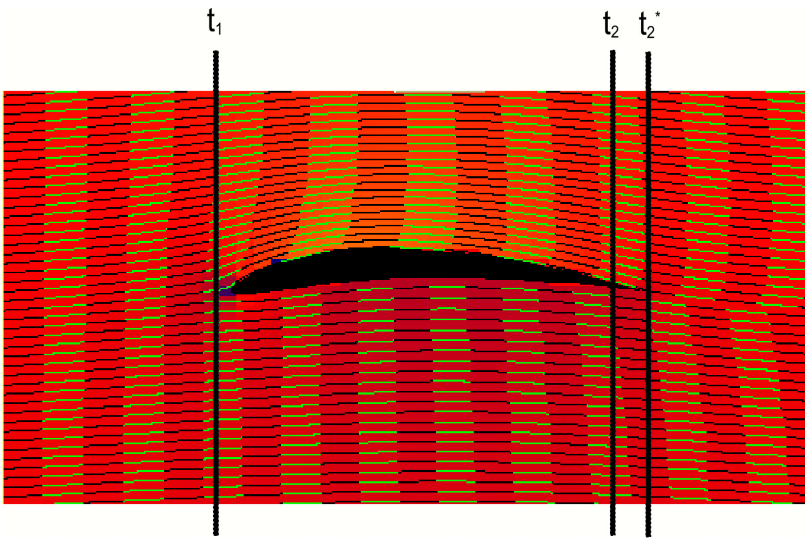
[8] Richard T. Whitcomb (1921-). Ameriški aeronavtični inženir zaposlen dolga leta pri NASA. Odkril je med drugim, da oblika letala podobna steklenici Coca-Cole omogoča lažji prehod v nadzvočni let.

s superkritičnim krilom tako niso hitrejša, kot je bilo v osnovi zamišljeno, pač pa so zgolj bistevno cenejša.

Izlet v aerodinamiko visokih hitrosti je bil potreben, da razumemo namen superkritičnega krila. Le-to pa nam odkrije nek nov paradoks bernoullijevskega modela leta, ki zopet kaže na napačnost osnovnih predpostavk tega modela. Če bi namreč superkritično krilo obtekal zrak z hitrostjo do $100 m/s$, torej nekako v območju $0.1M - 0.3M$, to krilo po bernoullijevskem modelu ne bi smelo proizvajati vzgona, oziroma bi moral imeti "vzgonšmer navzdol. Že iz slike 12 je namreč razvidno, da je pot obtekanja pod krilom daljša od poti nad krilom, oziroma $R < 1$. Tako bi moral vzgon delovati navzdol. Vendar letala z vgrajenim superkritičnim krilom kljub temu letijo. Seveda letijo tudi pri nizkih hitrostih in izkaže se, da so letalne lastnosti tega krila pri nizkih hitrostih celo boljše od primerljivega konvencionalnega krila. Spet popoln flop bernoullijevskega modela!

3.2.5 Nezdružitev toka

Vse dvome o napačnih podmenah bernoullijevskega modela pa ovržejo rezultati eksperimentov v vetrovniku, oziroma rezultati računalniških simulacij. Če študiramo tok okrog krila, ki ga opisujejo ustrezne tokovnice, opazimo, da je osnovna predpostavka bernoullijevskega modela o enakem času preleta zgornjega in spodnjega roba krila popolnoma napačna. Deli tekočine namreč potujejo nad in pod krilom različ no dolgo in se zato na zadnjem rubu krila ne združijo! Na sliki 13 namreč vidimo, da dva delca zraka, ki ju krilo

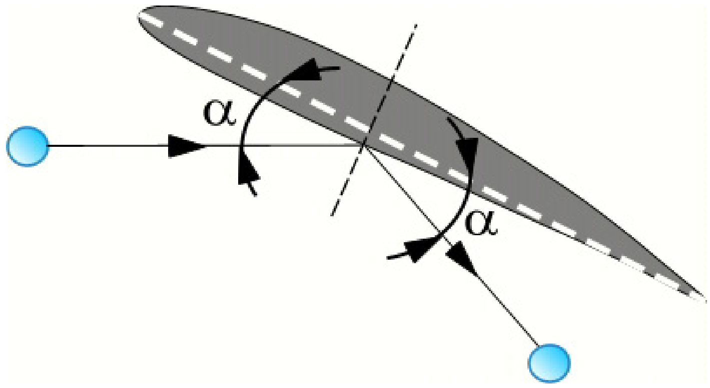


Slika 13: Skica prikazuje nezdružitev toka v računalniški simulaciji.

razdvoji, nikakor ne ohranita medsebojne lege in porabita različno dolg čas za prelet krila. Vidimo, da je zgornji delec zraka prej zapusti zadnji rob krila, ker je bistveno hitrejši od spodnjega. Takšen rezultat je najlepši dokaz, da je sicer res zgornja hitrost obtekanja $\bar{v_g}$ večja od spodnje $\bar{v_d}$, a ta razlika nikakor ni pogojena z geometrijo krila, natančneje z razliko poti $l_g - l_d$. Zadnja ugotovitev je zadala milostni udarec bernoullijevskemu modelu. Njegova osnovna predpostavka o isti medsebojni legi delov tekočine, ki jih naletni rob krila razdruži, preprosto ne drži.

4 Newtonski model

Poglejmo si še drug model nastanka vzgona. Newtonski model je poizkus obravnave makroskopskih pojavov na krilu z mikroskopsko sliko, ki je podobna kinetični teoriji plinov. Vzgon v tem modelu nastane zaradi trkov zračnih molekul ob spodnjo stran krila (Slika 14). Vzgon je tako posledica spremembe gibalne količine molekul in od tod ustreznega sunka sile v smeri navzgor. Zaradi vpetosti tega modela v preprosto newtonsko fiziko, ga lahko imenujemo tudi **newtonski model**. Preden preidemo na izračun vzgona, pa



Slika 14: Skica shematično prikazuje trk molekule zraka z krilom pri čemer krilu preda sunek sile, ki ima tudi navpično komponento.

definirajmo še zelo pomembno količino v teoriji kril - **naletni kot**. Naletni kot, α, je kot med tetivo profila in vektorjem hitrosti $\mathbf{v}$ nemotenega toka. V strokovni letalski literaturi se sicer uporablja tudi izraz napadni kot (angleško angle of attack), oziroma včasih skrajšano AOA. V slovenski literaturi se včasih uporablja še izraz natočni kot. V tem članku pa bomo kot rečeno uporabljali slovensko zvezo naletni kot.

Poglejmo si sedaj newtonski model dinamičnega vzgona natančneje. Iz slike 14 je razvidno, da se gibalna količina molekule z maso m_m pri trku s krilom spremeni za

$$\Delta G = 2m_m v \sin\alpha. \tag{13}$$

Sedaj pa namesto ene same molekule obravnavamo cel paket molekul s prostornino V in maso m, ki se v povprečju gibljejo s hitrostjo v (Slika 15). V tem primeru velja

$$V = v\Delta t\ S\ \cos\alpha \qquad m = \rho V = \rho\ v\ \Delta t\ S\ \cos\alpha. \tag{14}$$

Celemu paketu se gibalna količina spremeni za

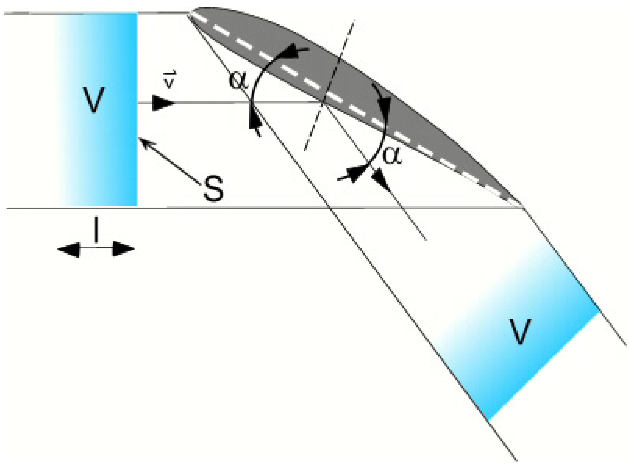
$$\Delta G = 2mv\sin\alpha = 2\rho\ v^2\Delta t\ S\ \cos\alpha\sin\alpha. \tag{15}$$

Sprememba gibalne količine zraka ustreza sunku sile na krilo, ki je enak

$$\Delta G = F\Delta t. \tag{16}$$

Če zdruzimo obe zadnji enačbi, dobimo silo na krilo

$$F = 2\ \rho\ v^2\ S\ \cos\alpha\sin\alpha = \rho\ v^2\ S\ \sin 2\alpha. \tag{17}$$



Slika 15: Skica prikazuje trk paketa molekul zraka z volumnom V s krilom.

Vendar sila F v tem primeru ne deluje zgolj pravokotno na smer hitrosti $\mathbf{v}$, ampak vključuje tudi komponento v smeri $\mathbf{v}$. Le-ta očitno krilo zavira in prispeva k uporu krila. Upor krila nas tu ne bo posebno zanimal. Komponento celotne sile, ki prispeva k dinamičnemu vzgonu lahko tako hitro izrazimo z naletnim kotom α kot

$$F_v = F\cos\alpha = \rho\, v^2\, S\ \sin 2\alpha\ \cos\alpha. \tag{18}$$

Sila dinamičnega vzgona po newtonski razlagi se potemtakem bistveno razlikuje od vzgonske sile po bernoullijevski razlagi v tem, da vsebuje še odvisnost od naletnega kota α. Če privzamemo površino kril S za konstrukcijsko podano konstanto, ki naj se med letom ne bi spreminjala, opazimo, da sta tako v enačbi za silo dinamičnega vzgona še dva prosta parametra, $F_v = F_v\,(v,\alpha)$. To se seveda zdi bolj smiselno kot pri bernoullijevskem modelu. Pomeni, da lahko letalo leti vodoravno pri več različnih hitrostih. Spomino se, da je bila to ena izmed šibkih točk bernoullijevskega modela.

Potrebno silo dinamičnega vzgona ustvarja letalo tako pri nižjih hitrostih z večjimi naletnimi koti, medtem ko se naletni koti pri večjih hitrostih manjšajo. To dejstvo lahko zlahka opazimo pri pristajajočem letalo. Ker ima zaradi pristajanja hitrost zmanjšano, ima nos dvignjen, torej je naletni kot večji.

Da številčno ovrednotimo newtonski model, si še enkrat v spomin prikličimo prejšnji numerični primer leta Pilatusa PC-9. Za izračun sile dinamičnega vzgona potrebujemo še podatek o naletnem kotu pri že prej opisanem režimu leta. Ta podatek je ocenjen, ker je odvisen med drugim tudi od razporeditve mase v letalu, torej lege težišča in drugih parametrov. Naletni koti za ta režim tako za kakšno stopinjo nihajo okrog reprezentativne vrednosti $\alpha = 5^o$. Silo dinamičnega vzgona tako ocenimo na

$$F_v = \rho\, v^2\, S\ \sin 2\alpha\ \cos\alpha = 39593N. \tag{19}$$

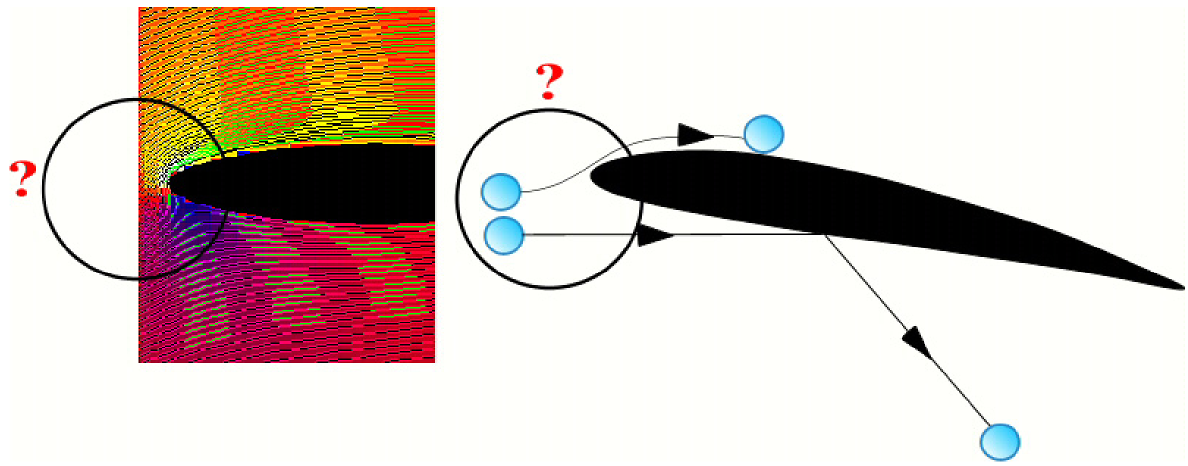
Prikličimo si še v spomin, da mora v vodoravnem letu sila dinamičnega vzgona uravnovesiti silo teže, ki znaša 19620N. Po newtonskem modelu bi letalo torej zares letelo. Ta model je na prvi pogled smiselen, saj zdrži hitro logično in numerično tehtanje. Paradoksi tega modela pa sledijo iz dejstva, da si po newtonskem modelu ne znamo razložiti določenih lastnosti hitrostnega polja okrog profila krila.

4.1 Paradoksi newtonskega modela

Kljub navidezni robustnosti pokažimo, da newtonski model običajno ni pravilen za vsakdanjo razlago tvorbe dinamičnega vzgona na letalskih krilih. Povedali pa bomo tudi, v katerih primerih newtonski model kljub vsemu pravilno opisuje nastanek dinamičnega vzgona. Limitni primer, kjer je newtonski model pravilen predstavlja namreč nadzvočni let.

4.1.1 Odklanjanje toka pri naletnem robu krila

Če se spet naslonimo na poskuse, ki jih naredimo na konkretnih krilih v vetrovniku, lahko pri podrobnem opazovanju opazimo sledečo neskladnost (Slika 16). Namreč, če na sliki 16 pozorno opazujemo tokovnice v izrezih z vprašajem, potem lahko vidimo, da se pred krilom nekatere tokovnice, oziroma delci zraka, ki so pod krilom, odklonijo nad naletni rob. Torej, če spremljamo delec zraka, ki je sicer pod naletnim robom krila, se ta zaradi neznanega razloga očitno odkloni nad krilo. Newtonski model o tem empiričnem dejstvu ne daje nobene razlage. Nasprotno. Je v popolnem nasprotju z opaženim gibanjem delcev tekočine, saj bi morali tiste dele zraka, ki se odklonijo navzgor odšteti od enačbe za sunek sile. V ozadju tega dogajanja se skriva dejstvo, da je naletni rob le konstrukcijska točka,



Slika 16: Levo je simulacija silnic pred krilom in desno nazorna skica dogajanja.

medtem ko je aerodinamično pomembna točka neka druga. To točko imenujemo **zastojna** oziroma **stagnacijska točka** in je določena tako, da je v njej hitrost obtekanja zraka nič. Po zastojni točki vzdolž krila bi se zato lahko nemoteno sprehaja muha, čeprav letalo leti z nekaj sto kilometri na uro. Z zastojno točko smo se seznanili že pri analizi idealnega obtekanja valja [?]. Newtonski model zato, ker ne izhaja zares iz hidrodinamike pača pa je mehanski in torej ne opisuje gibanje zveznega medija, ne loči med zastojno točko in naletnim robom krila. Lega zastojne točke se spreminja v odvisnosti od naletnega kota. Na letalskih krilih najdemo napravo, ki se nahaja nekje na naletnem robu krila, in katere namen je, določiti položaj zastojne točke. Ta naprava je premična paličica, ki se odklanja proti zastojni točki (Slika 17) in meri kot med tetivo in zastojno točko. Zastojna točka je potemtakem pokazatelj naletnega kota α. Ta paličica je povezana z električnim stikalom, ki sproži piskanje v pilotovih slušalkah, ko se začenja približevati kritičnemu naletnemu kotu. To pilota opozori na bližajoči se zlom vzgona. V začetkih letalstva so bile glavne težave povezane z ohranjanjem stabilnosti leta in ta preprosta naprava je

Slika 17: Indikator kritičnega naletnega kota na naletnem delu krila.

izdatno izboljšala stabilnost in s tem tudi varnost letenja. Večinoma lahko pričakujemo zlom vzgona pri kritičnih naletnih kotih v območju od $15^o - 18^o$. O tem več kasneje.

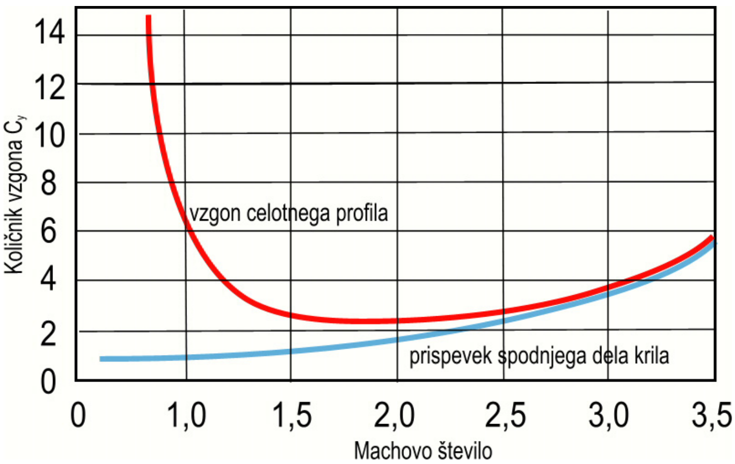
4.1.2 Hipersonična limita

V aerodinamiki ločimo več hitrostnih področij. S tujkami so ta področja razdeljena v subsonično ali podzvočno, transonično ali obzvočno, ter supersonično ali nadzvočno. Ta področja okarakteriziramo po fizikalnem premisleku in sicer po prevladujočih pojavih pri danih hitrostih. V podzvočnem področju lahko na stisljivost zraka največkrat pozabimo. Le-ta postane bistvena pri obzvočnem področju in še bolj pri nadzvočnem področju, kot vzrok nastajanja udarnih valov.

Poleg naštetih hitrostnih območij poznamo še hipersonično področje. Izraz je težko sloveniti, mogoče bi bilo najbolje kar prekozvočno področje, vendar si bomo enostavno zapomnili, da je to področje, kjer se hitrosti gibljejo od treh do petih Machovih števil. To hitrostno področje se zdi zelo težko dosegljivo, vendar pa ni tako težko najti "vsakdanje"primere hiperconičnega gibanja: raketni moduli pri vtirjanju v ali iz zemeljske orbite, in tipično razni izstrelki. Zato je hipersonična aerodinamika zelo dobro razvita.

Za nas najbolj zanimiva lastnost hipersoničnega področja je, da se tokovnice v od toka zasenčene predele skoraj ne krivijo. To pomeni da pri hipersoničnih hitrostih zastojna točka sovpada z naletno točko. Gibanje zraka je potemtakem zelo blizu temu, kar predpostavlja newtonski model. Če primerjamo celoten empirični vzgon krila z njegovo približno vrednostjo, ki jo daje newtonskim model vidimo, da postaneta oba primerljiva, če ne identična, nekako za hitrosti večje od 2 M, torej ravno v hipersoničnem območju.

To je zelo lepo razvidno na grafu (Slika 18), kjer rišemo odvisnost količnika vzgona [9]. Iz



Slika 18: Konvergenca newtonskega modela k empiričnemu dinamičnemu vzgonu v hipersoničnem področju.

tega grafa je razvidno, da je pri hitrostih, večjih od nekako 2 M, prispevek spodnje strani krila dejansko identičen vzgonu celotnega krila. Iz tega lahko zaključimo, da je zgornja stran krila zares zasenčena in je zato nebistvena za nastanek dinamičnega vzgona. To je skladno tudi z dejstvom, da se hipersonični režim najlažje doseže visoko v atmosferi, kjer je zaradi majhne gostote zraka prosta pot molekul zraka istega reda velikosti kot debelina krila.

Predpostavke newtonskega modela za takšno vrsto leta torej popolnoma veljajo! To seveda ni res pri majhnih hitrostih. Newtonski model je potemtakem primeren samo za razlago dinamičnega vzgona v hipersoničnem režimu, žal pa je povsem neuporaben pri razlagi dinamičnega vzgona pri podzvočnih hitrostih.

5 Ovrednotenje obeh modelov dinamičnega vzgona

Bernoullijevski in newtonski model sta primera poskusov razlage nastanka dinamičnega vzgona na krilu. Žal zaključki oziroma predpostavke teh dveh modelov v splošnem niso v skladu z empirično ugotovljenimi dejstvi delovanja kril in torej ne zmoreta smiselno razložiti nastanka dinamičnega vzgona. Pri tem je morda kljub vsemu nekoliko uspešnješi newtonski model, saj deluje vsaj v limiti velikih hitrosti pri hipersoničnem letu.

Neuspešnih oziroma nepravilnih modelov nastanka dinamičnega vzgona je še več, vendar jih je večina preveč poenostavljenih, da bi lahko smiselno opisali nastanek in lastnosti dinamičnega vzgona in s tem aerodinamičnega leta. Newtonski in bernoullijevski model leta sta mamljiva, saj sta na prvi pogled smiselna in se opirata na Newtonov zakon ter Bernoullijevo enačbo, ki sta kot naravna zakona sama po sebi neizpodbitna. Njun čar je tudi v preprostosti, saj ne zahtevata kakega poglobljenega hidrodinamskega znanja, pač pa zgolj elementarno fiziko. Zato sta priročna predvsem za razlago dinamičnega vzgona laikom. Žal pa sta tudi napačna in se ju moramo zato kljub vsemu izogibati. Še posebno če skušamo aerodinamiko leta razlagati laikom.

[9] Količnik vzgona je definiran kot razmerje med silo vzgona in produktom $\frac{1}{2}\rho v^2 S$

V nadaljevanju bomo videli, da je pri bernoullijevskem modelu v bistvu pravilen potek razmišljanja, čeprav je predpostavljeno hitrostno polje napačno. Bernoullijevski model se bo tako izkazal kot napol res. Kar je seveda najslabša možnost. Newtonski model pa je sicer pravilen v hipersonični limiti, a je razmislek za vzgon v podvzočnem področju povsem neuporaben in napačen.

Modeli dinamičnega vzgona letalskih kril Sašo Knez in Rudolf Podgornik
Oddelek za fiziko, Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Univerza v Ljubljani 25. april 2005

Povzetek

V drugem delu tega članka se bova posvetila pravilnemu opisu gibanja tekočine in naravi dinamičnega vzgona krila. Izpeljala bova teorem Kutta - Žukovski in pokazala, kako hipoteza Žukovskega določa vrednost dinamičnega vzgona. Skušala bova podati tudi preprosto razlago dinamičnega vzgona, ki naj bi koristila laikom.

In the second part of this contribution we will deal with the correct description of the fluid motion and the nature of the lift force in airfoils. We will derive the Kutta - Joukovski theorem and show how the dynamic lift follows from the Joukovski hypothesis. We will also try to present a simple handwaving argument for the lift generation, that should be of some use to non-specialists.

6 Uvod

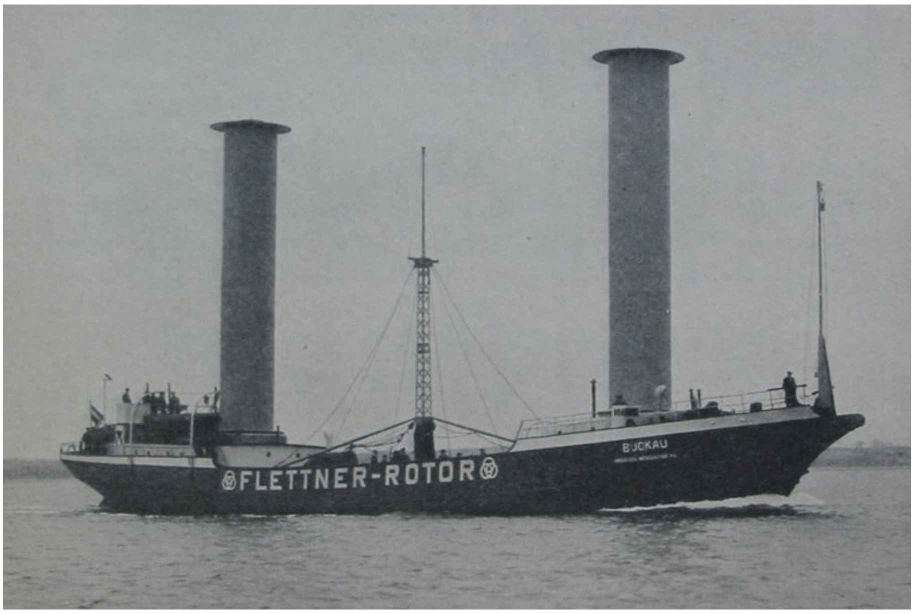
Vse doslej se nismo zares potrudili, da bi zgradili hidrodinamsko teorijo dinamičnega vzgona kot se spodobi, torej iz rešitve osnovnih enačb hidrodinamike idealnih tekočin. To bomo storili sedaj. Začeli bomo s teoremom Kutta - Žukovski in mimogrede izpeljali še hitrostno polje okrog krila Žukovskega. Upoštevanje hipoteze Žukovskega na zadnji strani krila, nam bo dalo končen in eksakten izraz za njegov dinamični vzgon.

Dobljeni izraz za dinamični vzgon bo popisoval razmere ob krilu, ko je t.i. mejni sloj zraka [6] še prilepljen na krilo. Če se mejni sloj odlepi od krila pa tudi hidrodinamska teorija dinamičnega vzgona, ki sloni na Eulerjevih enačbah hidrodinamike, razpade, kot je zelo nazorno pokazal Prandtl. Takrat je potrebno začeti razmišljati o turbulenci in vrtinčenju zraka ob in za krilom.

7 Flettnerjevo krilo in dinamični vzgon

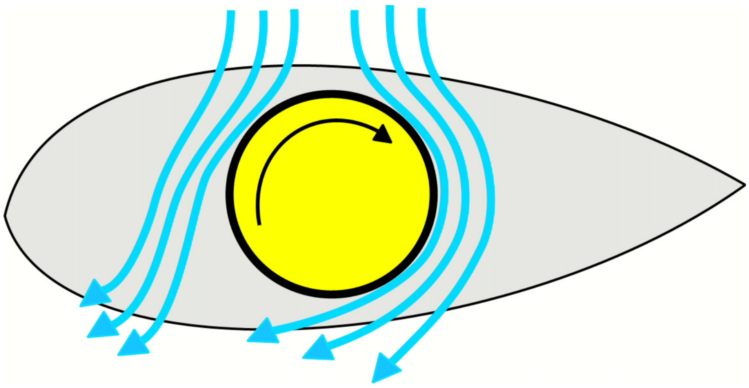
Začnimo z neko zanimivo variacijo na temo, ki se imenuje **Flettnerjevo krilo** oziroma Flettnerjev rotor. Anton Flettner [10] je 1920 leta zamenjal klasično jadro na jadrnici z na palubi navpično postavljenim vrtečim se valjem (Slika 19). Valj je imel svoj lastni pogon. Če je pihal veter, je ta vrteči se valj lahko nadomestil jadro. Poizkusimo razumeti princip delovanja Flettnerjevega krila, kar bo dober uvod v hidrodinamsko teorijo dinamičnega vzgona. Tukaj se zaradi cilindrične simetrije še lažje držimo dvodimenzionalnega opisa. Opazujmo Flettnerjevo krilo v preseku iz ptičje perspektive (Slika 20). Če opazujemo tokovnico na desni strani Flettnerjevega rotorja vidimo, da se zunanji hitrosti zraka prišteje še del, ki je posledica vrtenja valja, medtem ko se isti prispevek na levi strani odšteje. Na desni strani je torej zaradi višje hitrosti po Bernoulliju nižji tlak, na levi strani pa je zaradi nižje hitrosti višji tlak. Razlika tlakov da silo vzgona, ki deluje na desno. Pri obtekanju vrtečega se valja se torej očitno polje hitrosti deformira tako, da na valj deluje

[10] Anton Flettner (1885-1961). Nemški izumitelj. Poleg Flettnerjevega krila je izumil tudi Flettnerjevo ladijsko krmilo. Jadrnice na Flettnerjevo krilo se v začetku dvajsetega stoletja niso prijele - razen primera jadrnice J-J. Cousteauja - ker je bila cena pogonskih fosilnih goriv prenizka. Morda bodo imele več sreče v bližnji prihodnosti.



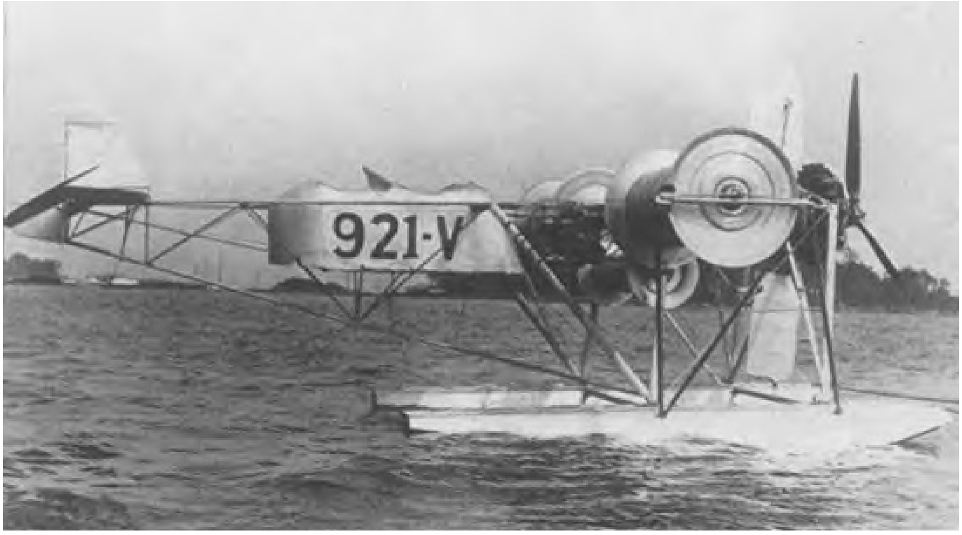
Slika 19: Jadrnica "*Buckau*" s Flettnerjevima kriloma (okrog l. 1926). Cilinder se je vrtel s frekvenco 100/min. Jadrnica "*Baden – Baden*" s Flettnerjevim krilom je l. 1926 uspešno preplula Atlantik. Tretja v seriji je bila jadrnica "*Barbara*".

sila, ki ima poleg navpične komponente tudi vodoravno komponento in tako valj potiska na desno. Flettnerjevo krilo torej lahko generira silo, ki je pravokotna na zunanjo hitrost. Flettnerjevo krilo je bilo sicer tehnično uspešno, a se ni prijelo med drugim tudi zaradi



Slika 20: Princip Flettnerjevega krila.

zapletenosti pogonskega sistema valja. Kot jadro se pojavlja še tu in tam, vendar v veliko bolj izpopolnjenih različicah. Najbolj so znana Cousteaujeva plovila s Flettnerjevimi krili, predvsem njegova raziskovalna jahta *Calypso*. Nekaj časa se je zdelo, da bi lahko Flettnerjevo krilo služilo tudi kot alternativno letalsko krilo (Slika 21). Delovanje Flettenerjevega krila zelo nazorno pove, kako se krožno gibanje okrog valja sklopi z zunanjim tokom tekočine in tako ustvari silo, ki je pravokotna na ta zunanji tok. To je natanko tisto, kar potrebujemo za opis delovanja navadnega krila: sklopitev med kroženjem zraka in zunanjo hitrostjo. Problem, ki ga bomo morali na koncu rešiti pa bo, kako se generira krožno gibanje tekočine okrog navadnega krila. Pojdimo po vrsti.



Slika 21: Prototip letala s Flettnerjevimi krili, 921-V, skonstruiran v Ameriki (slika ga prikazuje med testi na reki Hudson) po tem, ko je jadrnica Baden-Baden uspešno preplula Atlantik. 921-V naj bi letel vsaj enkrat predno se je razbil.

7.1 Dvodimenzionalen idealen tok

Privzeli bomo, da je profil krila konstanten na vsej njegovi dolžini ter da lahko vplive končne dimenzije krila zanemarimo. Poleg tega bomo privzeli še, da je tok stacionaren in laminaren. Zadoščal bo torej kar dvodimenzionalen opis gibanja tekočine okrog krila. V dveh dimenzijah tok tekočine opišemo z dvema potencialnima funkcijama oz. njima prirejenim kompleksnim potencialom [3]. Prvo potencialno funcijo imenujemo **hitrostni potencial** Φ in ga definiramo kot

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{20}$$

Drugo potencialno funkcijo imenujemo **tokovna funkcija** Ψ, ki jo definiramo kot

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{21}$$

Hitro se da pokazati, da enačba $\Psi = const.$ ustreza tokovnicam, in zato Ψ tudi imenujemo tokovna funkcija. [3]. Še preden lahko podvomimo v modrost vpeljave dveh takšnih potencialnih funkcij, pa zapišimo še tole očitno zvezo

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{22}$$

Od tu sledi zaradi po predpostavki nestisljivosti in brezvrtinčnosti gibanja tekočine, kar seveda pomeni, da sta divergenca in rotor hitrosti enaka nič, da je

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0. \tag{23}$$

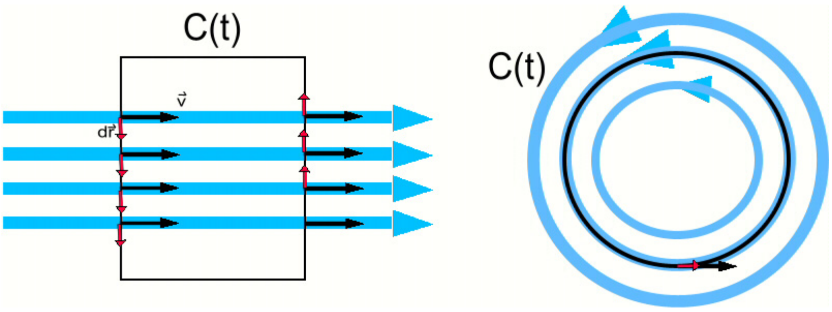
V enačbah 22 in 23 prepoznamo Cauchy-Riemannove enačbe iz kompleksne analize. Te enačbe nam omogočajo, da lahko potencialnemu dvodimenzionalnemu toku idealne tekočine pripišemo kompleksni potencial $\omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$, ki mora biti analitična funkcija spremenljivke $z = x + iy$.

V nadaljevanju lahko sedaj uporabljamo vsa orodja, ki nam jih ponuja kompleksna analiza. Kompleksni hitrostni potencial $\omega(z)$ je namreč poljubna analitična funkcija. Katero funkcijo dejansko izberemo, pa je odvisno od robnih pogojev, geometrije robov in v splošnem od fizike problema. Zgornja obravnava toka nam tudi omogoča, da preko superpozicije sestavimo poljubnen tok iz primernih osnovnih gradnikov, kot so prosti ravni tok, vrtinec, izvor, ponor in tokovni dipol [3].

Sedaj uvedemo še en nov pojem - **cirkulacija** Γ. Cirkulacija je difinirana kot krivuljni integral hitrosti po poljubni zaključeni krivulji v tekočini

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \tag{24}$$

$C(t)$ je poljubna zanka, ki se giblje skupaj s tekočino. Cirkulacija je za različne vrste tokov različna. Najlažje je izračunati cirkulacijo prostega toka in pa cirkulacijo kročnega vrtinca (Slika 22). Če izračunamo časovni odvod cirkulacije, dobimo Kelvinov teorem o



Slika 22: Skica prikazuje dve različni cirkulaciji. Levo je nična cirkulacija prostega toka. Desno je cirkulacija krožnega vrtinca po krogu z radijem r, ki ima vrednost $\Gamma = v\ 2\pi r$.

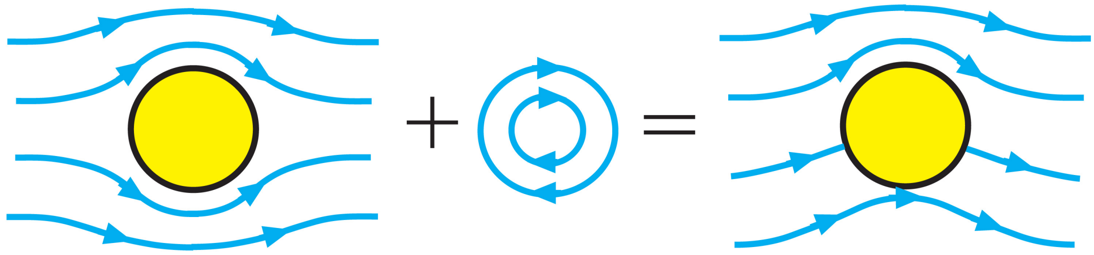
ohranjanju cirkulacije oziroma vrtinčnosti [3], ki pravi, da je cirkulacija konstanta gibanja idealnega toka. Sedaj imamo osnovni analitični instrumentarij s katerim bomo za začetek opisali tok idealne tekočine okrog valja. Glede na fizikalno intuicijo, ki nam jo daje primer Flettnerjevega krila, bomo predpostavili, da ima tok okrog valja konstantno cirkulacijo.

7.2 Obtekanje valja s cirkulacijo

Poglejmo si torej valj z radijem a, v zunanjem toku s hitrostjo v_0 v neskončnosti, okrog katerega teče idealna tekočina s cirkulacijo Γ. V tem primeru vzamemo sledeč nastavek za kompleksni hitrostni potencial [3]

$$\omega(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z. \tag{25}$$

Sestavljen je iz treh delov: toka s konstantno hitrostjo, člen $v_0 z$, dipolnega toka, člen $v_0 \frac{a^2}{z}$, in pa dvodimenzionalnega vrtinca, člen $-i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$ [3]. Prva dva člena opisujeta tok, katerega radialna komponenta hitrosti na površini valja $r = a$ je nič. Zadnji člen pa opisuje krožno gibanje tekočine okrog valja s cirkulacijo Γ. Vsi trije členi so nepogrešljivi za opis gibanja tekočine okrog valja. Celoten tok je shematsko predstavljen na sliki 23.



Slika 23: Tokovnice, ki ustrezajo nastavku En. 25 (desno), in jih sestavljajo tokovnice zunanje hitrosti in dipolnega toka (levo) ter dvodimenzionalnega vrtinca (v sredini).

Preselimo se v polarni zapis $z = re^{i\theta}$ pa lahko hitrostni potencial in prirejeno tokovno funkcijo zgornjega kompleksnega potenciala zapišemo kot

$$\Phi(r,\theta) = v_0(r + \frac{a^2}{r})\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{26}$$

$$\Psi(r,\theta) = v_0(r - \frac{a^2}{r})\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{27}$$

Tokovna funkcija Ψ je na robu valja konstantna, $\Psi(r = a, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi a}$. Rob valja torej sovpada s tokovnico. Natačneje pa lahko ugotovimo, da sta radialna v_r in tangencialna v_θ hitrost toka podani z

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta &= \frac{\partial \Phi}{r\partial \theta} = -v_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned} \tag{28}$$

Hitro lahko tudi ugotovimo, da je celotna cirkulacija toka po poljubni krožni zanki okrog valja enaka

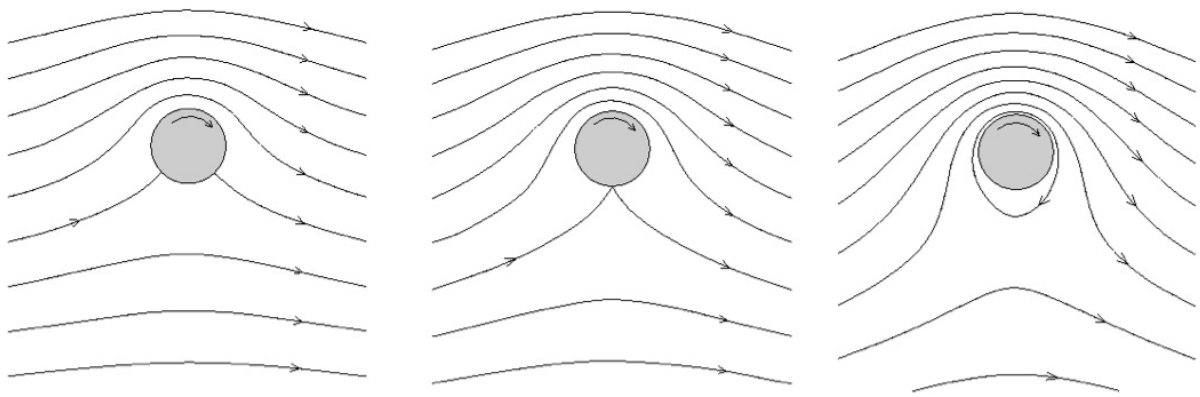
$$\int_0^{2\pi} v_r(r,\theta) r d\theta = \Gamma = konst. \tag{29}$$

Očitno je tudi, da je na površini valja $r = a$ radialna komponenta hitrosti vedno enaka nič. To je seveda smiselno. Poleg tega na površini valja obstajajo točke, kjer je tudi tangencialna hitrost enaka nič. Točkam pri katerih je celotna, torej radialna in tangencialna hitrost, enaka nič, pravimo tudi **zastojne** oziroma **stagnacijske točke**. Le-te obstajajo na obodu valja zgolj pri kotih θ, ki zadoščajo enačbi

$$\sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi a v_0}. \tag{30}$$

Ta enačba ima seveda rešitve, če je $\frac{\Gamma}{4\pi a v} \leq 1$. Iz tega vidimo, da je zastojna točka ena sama, če je $\Gamma = 4\pi a v$, če je cirkulacija manjša sta zastojni točki dve, če pa je večja, zastojnih točk na površini valja ni (glej sliko 24).

Hitrostno polje okrog valja s cirkulacijo torej imamo. Pomemben pa je tudi izračun sil, ki delujejo na valj zaradi gibanja tekočine. Silo bomo dobili iz integrala napetostnega



Slika 24: Zastojne točke pri obtekanju cilindra s cirkulacijo. Levo: $\Gamma < 4\pi a v_0$ in imamo torej dve zastojni točki simetrični glede os y. Sredina: ti dve zastojni točki za $\Gamma = 4\pi a v_0$ degenerirata v eno same, ki se (Desno) za $\Gamma > 4\pi a v_0$ odlepi od površine valja.

tanzorja po površini valja, ob upoštevanju njene smeri. Za tlak na površini valja najprej dobimo iz Bernoullijeve enačbe

$$p(r=a,\theta) = \tfrac{1}{2}\rho\ v_0^2 - \tfrac{1}{2}\rho\ v(r=a,\theta)^2. \tag{31}$$

Integral napetosti po površini valja pa nam daje za silo dve komponenti: komponento v smeri v_0, F_x, in komponento v pravokotni smeri, F_y. Izpeljemo

$$F_x = \int_0^{2\pi} p(r=a,\theta) a\cos\theta d\theta = 0 \qquad F_y = \int_0^{2\pi} p(r=a,\theta) a\sin\theta d\theta = \rho v_0 \Gamma. \tag{32}$$

Torej je sila v osi obtekanja nič, kar se nam zaradi naših izkušenj s tekočinami zdi nekoliko nenavadno, zato ta rezultat poimeniujemo tudi **d'Alembertov** [11] **paradoks**. Zavedati pa se seveda moramo, da pravih izkušenj z idealnimi neviskoznimi tekočinami nimamo. Sila v prečni smeri F_y je tako v splošnem premosorazmerna cirkulaciji in hitrosti in po svoji smeri ni očitno nič drugega kot dinamični vzgon.

7.3 Blasiusova enačba in teorem Kutta - Žukovski

Sedaj se lotimo neposredno teorema Kutta - Žukovski oziroma centralnega teorema aerodinamike! Teorem Kutta - Žukovski nam bo povedal, kako izračunamo silo na telo poljubne, ne le valjaste, oblike v poljubnem zunanjem toku. Predstavlja torej posplošitev zgornjega računa sile na valj v toku, ki ga opisuje enačba 25.

Postavimo se v kompleksno ravnino in izračunajmo tole kombinacijo sil $F_y - iF_x$ na telo s poljubnim profilom, ki se nahaja v idealnem dvodimenzionalnem toku! Za idealni tok, so komponente gostote sile, torej sile na enoto dolzine v z smeri in na enoto loka površine, na telo z lokalno normalo $\mathbf{n}$ enake kar $f_i = -pn_i$. Od tod lahko hitro izpeljemo, da je

$$F_y - iF_x = \oint_C p dz. \tag{33}$$

[11] Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Francoski enciklopedist, fizik in matematik. V hidrodinamiki je prvi izračunal upor krogle v tekočini in dobil za idealen tok vrednost nič. To imenujemo tudi d'Alembertov paradoks, saj se je takrat zdelo čudno, da idealen tok tekočine ne deluje na mirujočo kroglo.

Integral je sedaj v kompleksni ravnini in sicer po zanki $\mathcal{C}$, ki opisuje profil telesa. Tlak p moramo seveda vzeti tik ob površini telesa. p, hitrost ob površini telesa in pa njune vrednosti daleč stran, so povezani z Bernoullijevo enačbo

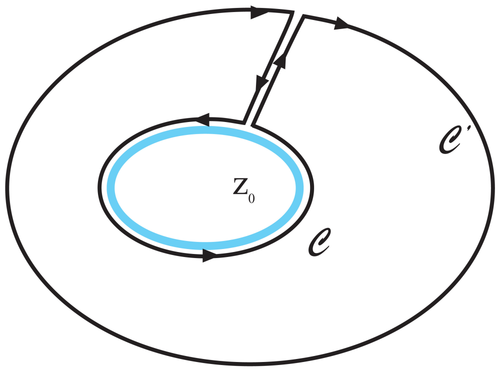
$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 = const. \tag{34}$$

Če sedaj Bernoullijev zakon vstavino v enačbo za $F_y - iF_x$ in upoštevamo, da je zanka $\mathcal{C}$ zaključena, potem dobimo Blasiusovo [12] enačbo

$$F_y - iF_x = -\tfrac{1}{2}\rho \oint_{\mathcal{C}} v^2 dz. \tag{35}$$

V Blasiusovi enačbi integriramo po zanki $\mathcal{C}$, torej po obodu telesa, v pozitivni smeri, to je v smeri obratni od urinega kazalca. Tu je treba opozoriti še na manjši tehnični detajl. V Bernoullijevi enačbi je v^2 kvadrat absolutne vrednosti hitrosti, torej $v^2 = \frac{d\omega}{dz}\frac{d\overline{\omega}}{d\overline{z}}$. V Blasiusovi enačbi pa je $v^2 = \frac{d\omega}{dz}\frac{d\omega}{dz}$, torej zgolj kvadrat hitrosti. To je posledica (tu je ne bomo natančno izpeljali) dejstva, da je v Blasiusovi enačbi kvadrat hitrosti pomnožen z dz in da integriramo po robu telesa, ki po definiciji sovpada s tokovnico, in je torej $d\omega = d\overline{\omega}$.

Ker hitrost $v(z)$ po predpostavki nima v kompleksni ravnini nobenih polov lahko zanko $\mathcal{C}$ razklenemo in deformiramo tako kot prikazuje slika 25. Integral po $\mathcal{C}$ v smeri obratni od urinega kazalca lahko tako spremenimo v integral po $\mathcal{C}'$ v smeri urinega kazalca. Da izračunamo ta integral pa ne potrebujemo več hitrosti na samem obodu telesa, pač pa zgolj hitrost daleč stran od telesa. V tem območju, torej za $|z/z_0| \ll 1$, kjer je z_0 nekje v



Slika 25: Deformacija integracijske zanke v Blasiusovi enačbi.

notranjosti telesa, pa velja za hitrost Laurentov razvoj

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{(z-z_0)^n} = v_0 + \frac{v_1}{z-z_0} + \frac{v_2}{(z-z_0)^2} + \dots \qquad \text{kjer so} \qquad v_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{v(z')dz'}{(z-z_0)^{n-1}}. \tag{36}$$

Podoben razvoj lahko izpeljmo tudi za kvadrat hitrosti $v^2 = \frac{d\omega}{dz}\frac{d\omega}{dz}$, ki nastopa v Balsiusovi enačbi. Če primerjamo med seboj koeficiente obeh razvojev, vidimo, da mora veljati

$$\oint_{\mathcal{C}} v^2(z)dz = -\rho v_0 \oint_{\mathcal{C}} v(z)dz. \tag{37}$$

[12] Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970). Nemški hidrodinamik. Pomembno prispeval k teoriji mejnega sloja, turbulence in teorije kril. Izjemno dober učitelj hidrodinamike.

Zgornja zveza velja za poljubno zanko $\mathcal{C}$. Nesemo jo nazaj v Blasiusovo enačbo, pa dobimo teorem Kutta - Žukovski

$$F_y - iF_x = -\frac{1}{2}\rho \oint_{\mathcal{C}} v^2 dz = \rho v_0 \oint_{\mathcal{C}'} v(z)dz = \rho v_0 \Gamma. \tag{38}$$

Pri zadnjem prehodu čez enačaja smo se spomnili še definicije cirkulacije toka. Integral tu poteka v smeri urinega kazalca. Zanimivo je, da smo dobili identični rezultat pri obtekanju valja s cirkulacijo.

Novo pa je dejstvo, da teorem Kutta - Žukovski velja splošno za katerokoli telo s stalnim presekom v tretji dimenziji. Sila v smeri toka bo nič, saj teorem Kutta - Žukovski nima imaginarne komponente, medtem ko bo v prečni smeri deloval dinamični vzgon. Ta kaže navzgor v primeru, ko je cirkulacija pozitivna (v smeri urinega kazalca). Teorem Kutta [13] - Žukovski [14] bi tako lahko zapisali tudi vektorsko

$$\mathbf{F} = \rho\ \mathbf{v_0} \times \mathbf{\Gamma}, \tag{39}$$

pri čemer smo ustrezno, v smislu desnosučnega vijaka, definirali smer vektorja cirkulacije. Dinamični vzgon na poljubno telo v idealni tekočini, katere tok ima od nič različno cirkulacijo, je torej enostavno sorazmeren vektorskemu produktu vektorja cirkulacije in vektorja hitrosti valja.

Na osnovi zgornjega teorema lahko sedaj razumemo tudi delovanje Flettnerjevega krila: imamo zunanji tok s hitrostjo $\mathbf{v_0}$, vrtenje valja pa ustvarja v tekočini neko cirkulacijo $\mathbf{\Gamma}$. Medsebojno učinkovanje enega in drugega pa pripelje do sile, ki deluje pravokotno na smer zunanje hitrosti.

7.4 Konformne preslikave

Osnovna zamisel tega zadnjega koraka pri izpeljavi dinamičnega vzgona krila je, da kompleksni hitrostni potencial valja s cirkulacijo povežemo s tokom okrog krila, ki seveda ni valj. Za dvodimenzionalen tok to lahko storimo s **konformnimi preslikavami**. Če imamo namreč dve analitični funkciji, $\omega(z)$ in $F(z)$, potem je tudi $\omega\left(F(z)\right)$ analitična funckija. Preslikavi $\omega(z) \longrightarrow \omega\left(F(z)\right)$ pravimo tudi konformna preslikava oziroma transformacija.

Poiskati moramo potemtakem konformno preslikavo, ki bo valj preslikala v nekaj krilu podobnega. Prvi je takšno preslikavo odkril Žukovski in se po njem tudi imenuje. Konformna preslikava Žukovskega ima obliko

$$z \longrightarrow Z, \qquad \text{kjer je} \qquad Z = z + \frac{c^2}{z} \tag{40}$$

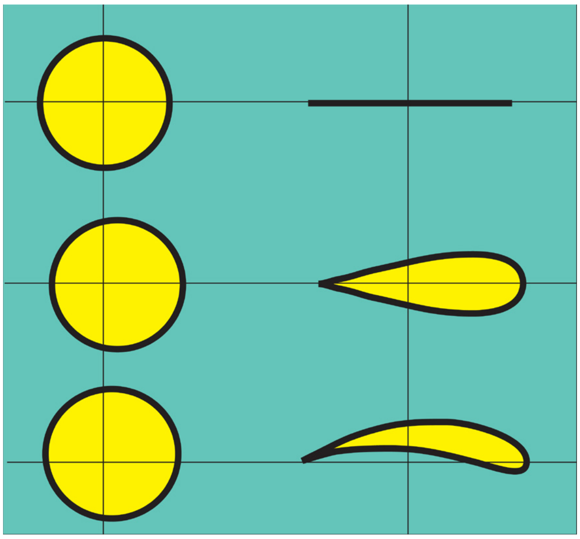
V kaj ta konformna preslikava preslika valj z radijem a, ki ga v polarnem zapisu opisuje $z = ae^{i\theta}$? Za koordinati $Z = X + iY$ hitro dobimo enačbo [**?**]

$$\frac{X^2}{(a+\frac{c^2}{a})^2} + \frac{Y^2}{(a-\frac{c^2}{a})^2} = 1. \tag{41}$$

[13]Martin Wilhelm Kutta (1867-1944). Nemški matematik, znan predvsem po Runge-Kutta metodi reševanja diferencialnih enačb, ki jo je vpeljel leta 1901. Leat 1902 je v svojem doktoratu neodvisno izpeljal tudi teorem Kutta - Žukovski, vendar se kasneje ni ukvarjal z letalstvom.

[14]Nikolaj Jegorovič Žukovski (1847-1921). Ruski fizik in "oče ruskega letalstva". Po letu 1880 se je začel zanimati za možnosti letenja in je leta 1895 obiskal letalskega pionirja Otta Lilienthala v Berlinu. 1918 je ustanovil Institut za aerodinamiko, ki je po njegovi smrti leat 1922 postal Akademija vojaške aeronavtike N. J. Žukovskega.

V splošnem torej preslikava Žukovskega valj preslika v elipso s polosema $a + \frac{c^2}{a}$ in $a - \frac{c^2}{a}$. Če nadalje vzamemo $c = a$ potem elipsa degenerira v daljico dolžine $4a$, s krajiščema pri $Z = 2a$ in $Z = -2a$. Daljica pod nekim naletnim kotom glede na smer zunanje hitrosti v_0 pa je preprost model krila. Bolj splošno preslikava Žukovskega preslika valj oz. krog v



Slika 26: Konformna preslikava Žukovskega preslika krog, ki ni v središču koordinatnega sistema (na levi strani slike), v krilu podobno telo (na desni strani slike).

različne krilu bolj ali manj podobne like, slika 26. Pri tem moramo dovoliti, da prvoten valj ni centriran v izhodišču koordinatnega sistema. Zaenkrat se zadovoljimo z limito daljice, ko je $c = a$. Izračunajmo torej hitrostno polje okrog te daljice nagnjene za kot α.

Premaknimo najprej koordinatni sistem v smeri obratni gibanju urinega kazalca za kot α, torej $z \longrightarrow ze^{i\alpha}$. Dobimo

$$\omega(z) = v_0 \left(ze^{i\alpha} + \frac{r^2}{z} e^{-i\alpha} \right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln z + i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \alpha. \tag{42}$$

Takšnemu kompleksnemu potencialu ustreza hitrostno polje

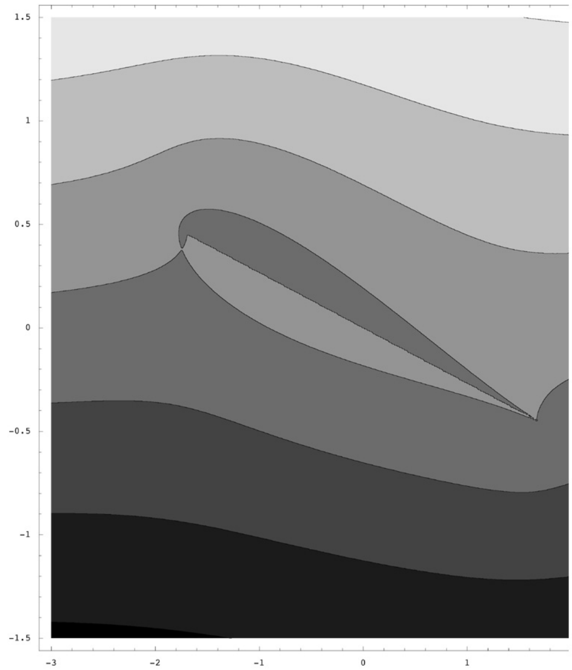
$$v(z) = \frac{d\omega(z)}{dz} = v_0 \left(e^{i\alpha} + \frac{a^2}{z^2} e^{-i\alpha} \right) - i\frac{\Gamma}{2\pi z}. \tag{43}$$

To hitrostno polje sedaj preslikamo s konformno preslikavo Žukovskega, enačba 40. Dobimo

$$v(z) = \frac{d\omega(z)}{dz}\frac{dz}{dZ} = \frac{v_0 \left(e^{i\alpha} + \frac{a^2}{z^2(Z)} e^{-i\alpha} \right)}{1 - \frac{a^2}{z^2(Z)}} - i\frac{\Gamma}{2\pi \left(z(Z) - \frac{a^2}{z(Z)} \right)}. \tag{44}$$

Za $c = a$ zgornje hitrostno polje torej ustreza obtekanju daljice dolžine $4a$, ki je glede na zunanjo hitrost nagnjena za naletni kot α.

Naj zavoljo jasnosti še enkrat ponovimo potek računanja. V prejšnjem razdelku smo obdelali tok okrog valja, v tem razdelku pa smo preslikali to polje v polje okrog nagnjene daljice. To nam je uspelo s konformno preslikavo Žukovskega. Ne da bi to naredili, bi lahko hitrostno polje okrog valja preslikali tudi v hitrostno polje okrog krila podobnega nagnjeni solzi, slika 27. Takšno obliko krila dobimo, če koordinatno izhodišče valja prestavimo v pozitivni smeri osi x za neko konstanto (glej sliko 26). Ustrezen račun je analitično precej zapleten, ga pa lahko zlahka napravimo numerično v Mathematici. Rezultat je predstavljen na sliki 27, kjer lahko tudi zelo lepo opazujemo odklanjanje toka pri vodilnem robu. Vendar še nismo čisto pri koncu. Namreč hitrostno polje okrog različnih oblik profila



Slika 27: Skica prikazuje v Mathematici izrisano hitrostno polje za nagnjeno šolzo". Ta oblika je, v nasprotju z nagnjeno daljico, že zelo podobna realnemu krilu.

krila je še vedno odvisno od tega, kaj vzamemo za cirkulacijo Γ. Naše rešitve veljajo za poljubno cirkulacijo. Teorem Kutta - Žukovski pa pravi, da je dinamični vzgon odvisen od vrednosti cirkulacije. Ali je potem popolnoma nedoločen oziroma poljuben?

7.5 Hipoteza Žukovskega

Hitrostno polje enačbe 44 ima pomembno slabost. Namreč hitro se lahko prepričamo, da hitrost na naletnem in zadnjem robu našega krila, torej nagnjene daljice, divergira. Enako bi veljalo tudi za druge, bolj zapletene oblike kril. Pomanjkljivost se torej ne skriva v naivnosti modela krila.

Do divergence hitrosti pridemo takole. Razvijmo hitrostno polje nagnjene daljice En. 44 okoli zadnjega roba krila, ki je podan z $Z = 2a$ oziroma $z = a$. Torej za $z = a + \epsilon$, kjer je $\epsilon/a \ll 1$, dobimo skozi Taylorjev razvoj

$$v(z = a + \epsilon) = v_0 \cos\alpha - \epsilon^{-1} i \left(\frac{\Gamma}{4\pi} - v_0 a \sin\alpha \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (45)$$

V kolikor izraz v oklepaju pri členu ϵ^{-1} ni enak nič, hitrost na zadnjem robu divergira, ko gre $\epsilon \longrightarrow 0$. Da bi dobili fizikalno smiselno rešitev, ki je povsod okrog krila končna, je Žukovski predpostavil, da moramo za cirkulaicjo vzeti takšno vrednost, da bo divergentni člen v enačbi 45 enak nič. To imenujemo tudi **hipoteza Žukovskega**. Po Žukovskem mora torej veljati, da je

$$\Gamma = 4\pi \; v_0 a \; \sin\alpha, \quad (46)$$

Hipotezo Žukovskega se da formulirati tudi bolj nazorno. Namreč takole: da bi bila hitrost povsod končna, moramo zadnjo zastojno točko pri obtekanju krila postaviti natančno na rob krila. Cirkulacija krila se sama nastavi tako, da zadnja zastojna točka sovpada s koncem krila in je hitrostno polje zato povsod končno.

Hipoteza Žukovskega vsebuje več kot se zdi na prvi pogled. Na nek način namreč v naš račun skozi stranska vrata pripelje viskoznost. Popolnoma postane razumljiva šele v okviru teorije mejnega sloja, kar pa presega nivo, ki ga želimo ohraniti v tem sestavku. Zato naj navedemo brez detajlne razlage: hipoteza Žukovskega je je smiselna zato, ker v bližini krila ne moremo zanemariti viskoznosti. Čeprav celoten račun hitrostnega polja nikjer eksplicitno ne vsebuje viskoznosti, pa je ta implicitno vsebovana v hipotezi Žukovskega, ki tudi določa vrednost Γ. Kot zanimivost naj povemo, da v superfluidni tekočini, kjer je viskoznost identično enaka nič, dinamičnega vzgona **ni**.

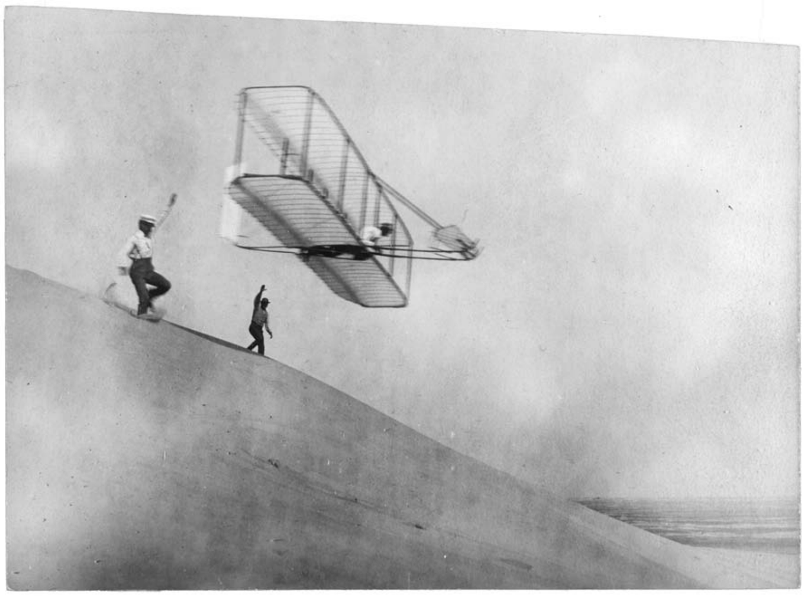
Preostane nam torej le, da vrednost za cirkulacijo dobljeno iz hipoteze Žukovskega vnesemo v enačbo 39 za dinamični vzgon ter tako dobimo končni rezultat

$$F_y = \rho v \Gamma = 4\pi a \rho\ v_0^2\ \sin\alpha. \tag{47}$$

To je torej linearna gostota sile dinamičnega vzgona na ravno površino širine $4a$, nagnjeno v zunanjem toku za naletni kot α. Da dobimo celotno silo moramo F_y pomnožiti še z razponom kril. Celotno silo dinamičnega vzgona na krilo tako zapišemo kot

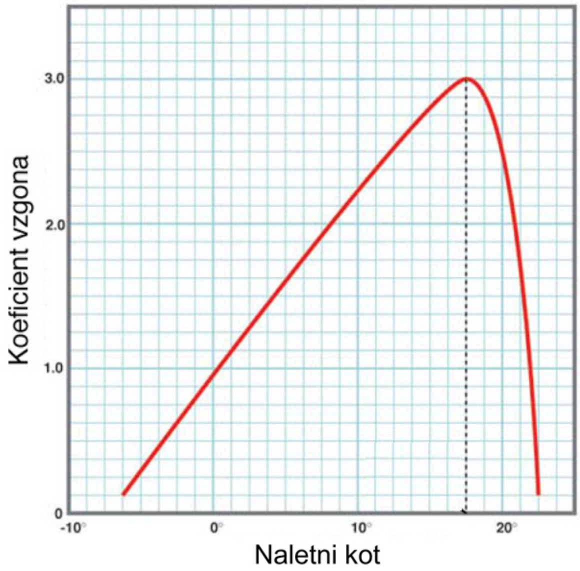
$$F_v = \pi S\ \rho v_0^2\ \sin\alpha, \tag{48}$$

kjer je S celotna površina krila. Ta rezultat je izpeljal Žukovski leta 1906 in neodvisno



Slika 28: Fotografija posneta med enim od poskusnih letov bratov Wright v Kitty Hawku, nekje med 4 in 11 Augustom, 1901. Avtor fotografije je Octave Chanute.

pred njim v svojem doktoratu leta 1902 tudi Kutta. Brata Wilbur in Orwille Wright (Slika 28), ki sta v Kitty Hawku (Severna Karolina) opravila prvi uradno priznani letalski polet 17 decembra 1903, sta bila predvsem empirično usmerjena in čeprav sta poznala takratno aerodinamsko strokovno literaturo seveda nista vedela za teorem, ki se je skrival zakopan v doktoratu Kutte. Letalstvo se je torej začelo bolj ali manj povsem empirično in so njegovi neustrašni pionirji [15] zato tembolj vredni našega občudovanja. Teoretična aerodinamika postavljena na teoremu Kutta - Žukovski mu je sledila z rahlim časovnim zamikom.



Slika 29: Celotna krivulja odvisnosti koeficienta dinamičnega vzgona od naletnega kota. Koeficient dinamičnega vzgona je definiran kot $C_L = F_v/(\frac{1}{2}\rho v_0^2 S)$, kjer je F_v sila dinamičnega vzgona, v_0 hitrost leta in S celotna površina krila. Ostale oznake so standardne. Pri neki kritični vrednosti naletnega kota pride do zloma dinamičega vzgona in teorija Kutta - Žukovski ne velja več.

7.6 Veljavnost teorije dinamičnega vzgona

Teorija dinamičnega vzgona, ki temelji na teoremu Kutta - Žukovski in na hipotezi Žukovskega zadovoljivo opisuje hitrostno polje okrog krila in tudi sile nanj. Danes sicer zares ne računamo vzgona kril na tak način, ampak kar neposredno z numeričnim reševanjem osnovnih enačb hidrodinamike. Takšne rešitve omogočajo velik obolj natančno določevanje dinamičnega vzgona in tudi izračun optimalnih karakteristik krila.

Opisana teorija ne vsebuje kakšnih protislovij, razen seveda to, da velja zgolj za dovolj majhne naletne kote, ko je mejna plast tekočine, oziroma mejna tokovnica tokovnica laminarnega toka, trdno žalepljena"na krilo [6]. Na sliki 29 se da videti, kako se empirično spreminja koeficient dinamičnega vzgona z naletnim kotom. Pri nekem končnem kritičnem naletnem kotu se dinamični vzgon drastično zmanjša, pride do **zloma vzgona**, in le-ta ne sledi več odvisnosti, ki jo podaja enačba 48.

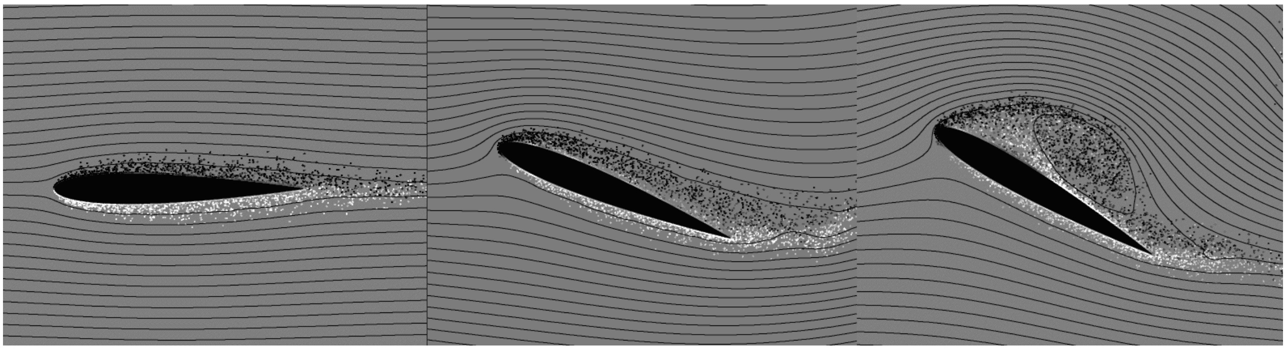
Ločevanje laminarnega mejnega sloja in z njim povezan nastanek turbulentnega sloja in drastičnega padca dinamičnega vzgona [6], je prvi opisal Ludwig Prandtl [16]. Laminarni

[15] Nemški letalski pionir Otto Lilienthal (1848 - 1896) je v svojih zadnjih trenutkih, potem ko je strmoglavil z letalom, izrekel neštetokrat citirane besede: "Žrtve so potrebne".

[16] Ludwig Prandtl (1875-1953). Nemški fizik. Utemeljitelj moderne hidrodinamike. Težko bi našli katerikoli problem v sodobni hidrodinamiki, ki ga ni bodisi začel ali pa rešil Prandtl. Največji vpliv na

sloj se lahko namreč ob določenih pogojih "odlepi"od površine kot to prikazuje slika 30. Med odlepljenim laminarnim mejnim slojem in krilom nastane področje turbulentnega toka, ki ne sodeluje več pri ravnovesju sil, ki ga opisuje teorem Kutta - Žukovski. Sledi torej drastično zmanjšanje dinamičnega vzgona oziroma zlom vzgona. Detajli tega procesa presegajo nivo tega članka.

Pri ločevanju mejnega sloja igrajo bistveno vlogo viskozni efekti in jih tudi v najnižjem redu ne moremo zanemariti. Obstoj kritičnega naletnega kota je dolgo časa delal preglavice v letalstvu, vse dokler se ljudje niso naucili natančno kontrolirati parametrov in stabilizacije leta, predvsem naletnega kota.



Slika 30: Ločitev Prandtlovega mejnega sloja. Prikazane so tokovnice, medtem ko bele in črne točke označujejo smer in jakost vrtinčnosti. Ko se mejni sloj oziroma tokovnica tik ob površini krila loči od površine krila, za njo ostane turbulentni sloj z intenzivno vrtinčnostjo. Obtekanje krila za tri vrednosti naletnega kota. Prirejeno po Szu-Chuan Wang, Florida State Univeristy, College of Engineering.

8 Zaključek

V prvem delu tega članka sva predstavila poenostavljene modele dinamičnega vzgona, za katere pa se je izkazalo, da niso realistični in včasih celo v nasprotju z empiričnimi dejstvi. Kljub preprosti fizikalni sliki principov leta jih zato ne moremo vzeti zares. Detajlna teorija, ki temelji na teoremu Kutta - Žukovski in pa hipotezi Žukovskega je veliko bolj realistična, vendar jo je tudi težje razložiti laiku. Da imajo s tem probleme tudi drugi avtorji se da razbrati iz zadnje "vojne"na temo zlorab Bernoullijeve enačbe pri razlagi principov leta [8]. Teorem Kutta - Žukovski je še vedno dejansko posledica Bernoullijeve enačbe in ga torej lahko vpeljemo preprosto skozi gostoto tokovnic in ustreznimi spremembami tlaka. Popolnoma nekaj drugega pa je razlaga asimetričnega polja hitrosti okrog krila. Newtonski in bernoullijevski model tu povsem odpovesta. Obstoj cirkulacije in s tem asimetrične hitrosti nad in pod krilom pa lahko najbolj preprosto zagovarjamo s hipotezo Žukovskega, ki temelji na zahtevi, da mora ena od stagnacijskih točk sovpadati z zadnjim robom krila, kar edino lahko omogoča končnost hitrostnega polja v vsaki točki okrog krila. Bralca najbrzž ne bo ogrel argument, da je asimetrično polje hitrosti dejansko posledica viskoznosti tekočine v tankem mejnem sloju okrog krila, iz česar dejansko sledi hipoteza Žukovskega.

hidrodinamiko je ohranil njegov koncept mejnega sloja in pa ločitve oz. odlepljanja mejnega sloja.

Slika 31: Podkvasti vrtinec za LearJetom nakazuje navpično gibanje zraka za krili aviona.

Se da let razložiti ̌bolj preprosto? Kako bi ga razložili recimo Rožletu? Nekako takole. Obstoj sile dinamičnega vzgona na letalo oziroma njegovo krilo seveda po Newtonu pomeni, da letalo z enako in po smeri nasprotno silo deluje navzdol na obtekajoči zrak. Ker je sila na zrak sorazmerna spremembi njegove gibalne količine na enoto časa sledi, da se mora zrak ob krilu gibati v povprečju navzdol. Rožletu bi torej razložili delovanje letala tako, da krilo "pihažrak navzdol in deluje na letalo z reakcijsko silo tega zraka. To se zelo dobro vidi tudi s slik, ko letala preletavajo oziroma letijo skozi oblake, slika 31. Takšna razlaga bi bila, kot že vemo, popolnoma pravilna pri hipersoničnem letu. Pri podzvočnem letu pa bi jo morali nekoliko natančneje pokomentirati. Po teoriji Kutta - Žukovski namreč krilo zraka ne "piha"navzdol, ampak ga zgolj na hitro "prestavlja"ob krilu navzdol. Toda če bi pri tem upoštevali še trodimenzionalno naravo krila in predvsem njegovo končno dolžino bi hitrostno polje zadaj za krilom res dajalo vtis, da krilo "pihažrak navzdol. (zelo lepo razvidno s slike 31). Pa naj leti, kdor more!

Literatura

[1] D.F. Anderson in S. Eberhardt, *Understanding flight* (McGraw-Hill, New York, 2001).

[2] G.A. Tokaty, *A history and philosophy of fluid mechanics* (Dover, New York, 1971).

[3] R. Podgornik *Mehanika kontinuov* (pisni materiali za študente, http://www-f1.ijs.si/ rudi/self/kontinui.html, 2005).

[4] A. Folsing, *Albert Einstein : A Biography* (Penguin (Non-Classics); New Ed edition, June 1, 1998).

[5] Y. Balashov in V.P. Vizgin, *Einstein Studies in Russia* (Birkhauser Verlag AG, Berlin, 2002).

[6] L. Prandtl, O.G. Titjens, *Fundamentals of hydrodynamics and aeromechanics* in *Applied hydrodynamics and aeromechanics* (Dover publications, New york, 1957).

[7] J.D Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics* (McGraw-Hill, New york, 2001).

[8] G. M. Craig, *Stop Abusing Bernoulli! - How Airplanes Really Fly* Regenerative Press (January 1, 1998).