

Modeli dinamičnega vzgona letalskih kril. Drugi del.

Sašo Knez in Rudolf Podgornik
Oddelek za fiziko, Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Univerza v Ljubljani

Povzetek

V drugem delu tega članka se bova posvetila bolj poglobljenemu opisu gibanja tekočine in naravi dinamičnega vzgona krila. Izpeljala bova teorem Kutta - Žukovski in pokazala, kako hipoteza Žukovskega določa vrednost dinamičnega vzgona. Skušala bova podati tudi preprosto razlago dinamičnega vzgona, ki naj bi koristila laikom.

In the second part of this contribution we will deal with the in depth description of the fluid motion and the nature of the lift force in airfoils. We will derive the Kutta - Joukowski theorem and show how the dynamic lift follows from the Joukowski hypothesis. We will also try to present a simple handwaving argument for the lift generation, that should be of some use to non-specialists.

1 Uvod

Vse doslej se nismo zares potrudili, da bi zgradili hidrodinamsko teorijo dinamičnega vzgona kot se spodobi, torej iz rešitve osnovnih enačb hidrodinamike idealnih tekočin. To bomo storili sedaj. Začeli bomo s teoremom Kutta - Žukovski in mimogrede izpeljali še hitrostno polje okrog krila Žukovskega. Upoštevanje hipoteze Žukovskega na zadnji strani krila, nam bo dalo končen in eksakten izraz za njegov dinamični vzgon. Ta rezultat bova skušala razložiti tudi na preprost način, ki naj bi bil dostopen vsakemu zainteresiranemu laiku.

Dobljeni izraz za dinamični vzgon bo popisoval razmere ob krilu, ko je t.i. mejni sloj zraka [3] še prilepljen na krilo. Če se mejni sloj odlepi od krila pa tudi hidrodinamska teorija dinamičnega vzgona, ki sloni na Eulerjevih enačbah hidrodinamike, razpade, kot je zelo nazorno pokazal Prandtl. Takrat je potrebno začeti razmišljati o turbulenci in vrtinčenju zraka ob in za krilom.

2 Flettnerjevo krilo in dinamični vzgon

Začnimo z neko zanimivo variacijo na temo, ki se imenuje **Flettnerjevo krilo** oziroma Flettnerjev rotor [1]. Anton Flettner ¹ je 1920 leta zamenjal klasično jadro na jadrnici

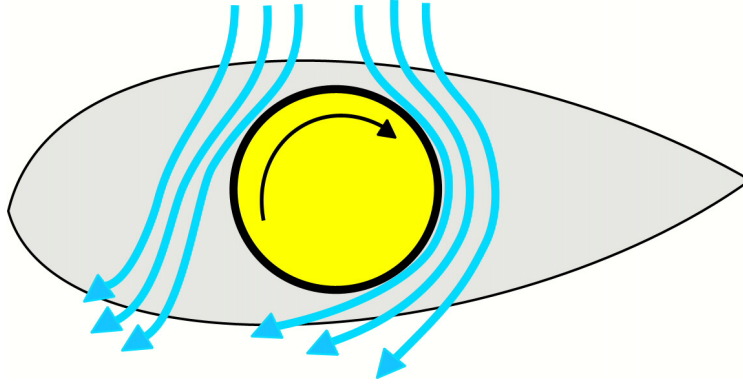
¹Anton Flettner (1885-1961). Nemški izumitelj. Poleg Flettnerjevega krila je izumil tudi Flettnerjevo ladijsko krmilo. Jadrnice na Flettnerjevo krilo se v začetku dvajsetega stoletja niso prijele - razen primera jadrnice J-J. Cousteauja - ker je bila cena pogonskih fosilnih goriv prenizka. Morda bodo imele več sreče v bližnji prihodnosti.

z na palubi navpično postavljenim vrtečim se valjem (Slika 1). Valj je imel svoj lastni pogon. Če je pihal veter, je ta vrteči se valj lahko nadomestil jadro. Poizkusimo razumeti



Slika 1: Jadrnica "Buckau" s Flettnerjevima kriloma (okrog l. 1926). Cilinder se je vrtel s frekvenco 100/min. Jadrnica "Baden – Baden" s Flettnerjevim krilom je l. 1926 uspešno preplula Atlantik. Tretja v seriji je bila jadrnica "Barbara".

princip delovanja Flettnerjevega krila, kar bo dober uvod v hidrodinamsko teorijo dinamičnega vzgona. Tukaj se zaradi cilindrične simetrije še lažje držimo dvodimenzionalnega opisa. Opazujmo Flettnerjevo krilo v preseku iz ptičje perspektive (Slika 2). Če opazujemo tokovnico na desni strani Flettnerjevega rotorja vidimo, da se zunanji hitrosti zraka prišteje še del, ki je posledica vrtenja valja, medtem ko se isti prispevek na levi strani odšteje. Na desni strani je torej zaradi višje hitrosti po Bernoulliju nižji tlak, na levi strani pa je zaradi nižje hitrosti višji tlak. Razlika tlakov da silo vzgona, ki deluje na desno. Pri obtekanju vrtečega se valja se torej očitno polje hitrosti deformira tako, da na valj deluje sila, ki ima poleg navpične komponente tudi vodoravno komponento in tako valj potiska na desno. Flettnerjevo krilo torej lahko generira silo, ki je pravokotna na zunanjo hitrost. Flettnerjevo krilo je bilo sicer tehnično uspešno, a se ni prijelo med drugim tudi zaradi zapletenosti pogonskega sistema valja. Kot jadro se pojavlja še tu in tam, vendar v veliko bolj izpopolnjenih različicah. Najbolj so znana Cousteaujeva plovila s Flettnerjevimi krili, predvsem njegova raziskovalna jahta *Calypso*. Nekaj časa se je zdelo, da bi lahko Flettnerjevo krilo služilo tudi kot alternativno letalsko krilo (Slika 3). Delovanje Flettnerjevega krila zelo nazorno pove, kako se krožno gibanje okrog valja sklopi z zunanjim tokom tekočine in tako ustvari silo, ki je pravokotna na ta zunanji tok. To je natanko tisto, kar potrebujemo za opis delovanja navadnega krila: sklopitev med kroženjem zraka in zunanjo hitrostjo. Problem, ki ga bomo morali na koncu rešiti pa bo, kako se generira krožno gibanje tekočine okrog navadnega krila. Pojdimo po vrsti.



Slika 2: Princip Flettnerjevega krila. Krilo je predstavljeno iz ptičje perspektive. Sila dinamičnega vzgona za zgornjo geometrijo Flettnerjevega krila deluje na desno. Toka zraka piha navzdol.



Slika 3: Prototip letala s Flettnerjevimi krili, 921-V, skonstruiran v Ameriki (slika ga prikazuje med testi na reki Hudson) po tem, ko je jadrnica Baden-Baden uspešno preplula Atlantik. 921-V naj bi letel vsaj enkrat predno se je razbil.

2.1 Dvodimenzionalen idealen tok

Privzeli bomo, da je profil krila konstanten na vsej njegovi dolžini ter da lahko vplive končne dimenzije krila zanemarimo. Poleg tega bomo privzeli še, da je tok stacionaren in laminaren. Zadoščal bo torej kar dvodimenzionalen opis gibanja tekočine okrog krila. V dveh dimenzijah tok tekočine opišemo z dvema potencialnima funkcijama oz. njima prirejenim kompleksnim potencialom [2]. Prvo potencialno funkcijo imenujemo **hitrostni potencial** Φ in ga definiramo kot

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (1)$$

Drugo potencialno funkcijo imenujemo **tokovna funkcija** Ψ , ki jo definiramo kot

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Hitro se da pokazati, da enačba $\Psi = \text{const.}$ ustreza tokovnicam, in zato Ψ tudi imenujemo tokovna funkcija. [2]. Še preden lahko podvomimo v modrost vpeljave dveh takšnih potencialnih funkcij, pa zapišimo še tole očitno zvezo

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3)$$

Od tu sledi zaradi po predpostavki nestisljivosti in brezvrtinčnosti gibanja tekočine, kar seveda pomeni, da sta divergenca in rotor hitrosti enaka nič, da je

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0. \quad (4)$$

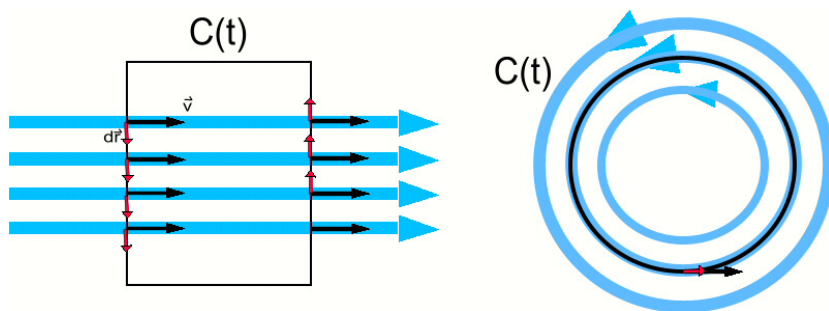
V enačbah 3 in 4 prepoznamo Cauchy-Riemannove enačbe iz kompleksne analize. Te enačbe nam omogočajo, da lahko potencialnemu dvodimenzionalnemu toku idealne tekočine pripišemo kompleksni potencial $\omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z)$, ki mora biti analitična funkcija spremenljivke $z = x + iy$.

V nadaljevanju lahko sedaj uporabljamo vsa orodja, ki nam jih ponuja kompleksna analiza. Kompleksni hitrostni potencial $\omega(z)$ je namreč poljubna analitična funkcija. Katero funkcijo dejansko izberemo, pa je odvisno od robnih pogojev, geometrije robov in v splošnem od fizike problema. Zgornja obravnava toka nam tudi omogoča, da preko superpozicije sestavimo poljubnen tok iz primernih osnovnih gradnikov, kot so prosti ravni tok, vrtinec, izvor, ponor in tokovni dipol [2].

Sedaj uvedemo še en nov pojem - **cirkulacija** Γ . Cirkulacija je definirana kot krivuljni integral hitrosti po poljubni zaključeni krivulji v tekočini

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5)$$

$C(t)$ je poljubna zanka, ki se giblje skupaj s tekočino. Cirkulacija je za različne vrste tokov različna. Najlažje je izračunati cirkulacijo prostega toka in pa cirkulacijo krožnega vrtinca (Slika 4). Če izračunamo časovni odvod cirkulacije, dobimo Kelvinov teorem o



Slika 4: Skica prikazuje dve različni cirkulaciji. Levo je nična cirkulacija prostega toka. Desno je cirkulacija krožnega vrtinca po krogu z radijem r , ki ima vrednost $\Gamma = v 2\pi r$.

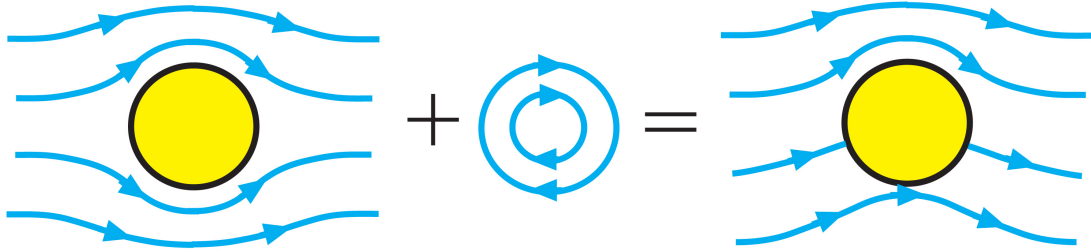
ohranjanju cirkulacije oziroma vrtinčnosti [2], ki pravi, da je cirkulacija konstanta gibanja idealnega toka. Sedaj imamo osnovni analitični instrumentarij s katerim bomo za začetek opisali tok idealne tekočine okrog valja. Glede na fizikalno intuicijo, ki nam jo daje primer Flettnerjevega krila, bomo predpostavili, da ima tok okrog valja konstantno cirkulacijo.

2.2 Obtekanje valja s cirkulacijo

Poglejmo si torej valj z radijem a , v zunanjem toku s hitrostjo v_0 v neskončnosti, okrog katerega teče idealna tekočina s cirkulacijo Γ . V tem primeru vzamemo sledeč nastavek za kompleksni hitrostni potencial [2]

$$\omega(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (6)$$

Sestavljen je iz treh delov: toka s konstantno hitrostjo, člen $v_0 z$, dipolnega toka, člen $v_0 \frac{a^2}{z}$, in pa dvodimenzionalnega vrtinca, člen $-i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$ [2]. Prva dva člena opisujeta tok, katerega radialna komponenta hitrosti na površini valja $r = a$ je nič. Zadnji člen pa opisuje krožno gibanje tekočine okrog valja s cirkulacijo Γ . Vsi trije členi so nepogrešljivi za opis gibanja tekočine okrog valja. Celoten tok je shematsko predstavljen na sliki 5. Preselimo se v polarni zapis $z = re^{i\theta}$ pa lahko hitrostni potencial in prirejeno tokovno



Slika 5: Tokovnice, ki ustrezajo nastavku En. 6 (desno), in jih sestavljajo tokovnice zunanje hitrosti in dipolnega toka (levo) ter dvodimenzionalnega vrtinca (v sredini).

funkcijo zgornjega kompleksnega potenciala zapišemo kot

$$\Phi(r, \theta) = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (7)$$

$$\Psi(r, \theta) = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (8)$$

Tokovna funkcija Ψ je na robu valja očitno konstantna, saj je $\Psi(r = a, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a$. Rob valja torej sovpada s tokovnico. Natačneje pa lahko ugotovimo, da sta radialna v_r in tangencialna v_θ hitrost toka podani z

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_\theta &= \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -v_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (9)$$

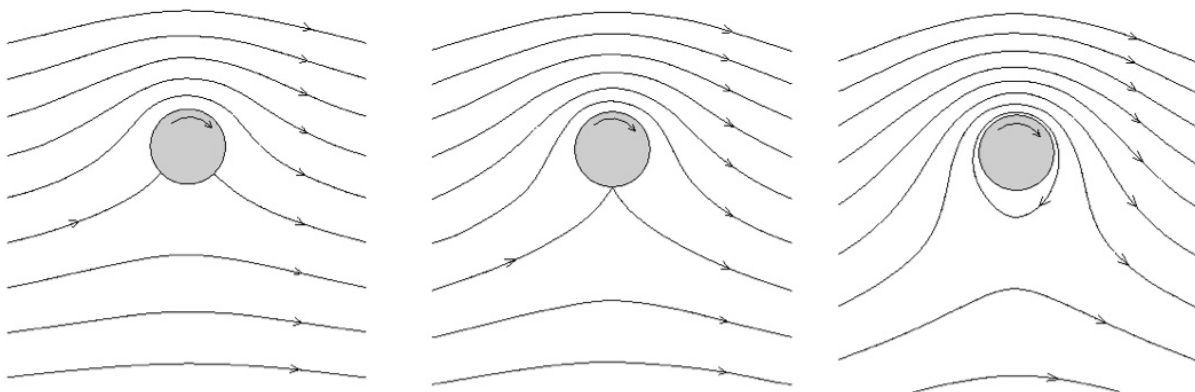
Hitro lahko tudi ugotovimo, da je celotna cirkulacija toka po poljubni krožni zanki okrog valja enaka

$$\int_0^{2\pi} v_\theta(r, \theta) r d\theta = \Gamma = \text{konst.} \quad (10)$$

Očitno je tudi, da je na površini valja $r = a$ radialna komponenta hitrosti vedno enaka nič. To je seveda smiselno. Poleg tega na površini valja obstajajo točke, kjer je tudi tangencialna hitrost enaka nič. Točkam pri katerih je celotna, torej radialna in tangencialna hitrost, enaka nič, pravimo tudi **zastojne** oziroma **stagnacijske točke**. Le-te obstajajo na obodu valja zgolj pri kotih θ , ki zadoščajo enačbi

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi a v_0}. \quad (11)$$

Ta enačba ima seveda rešitve, če je $\frac{\Gamma}{4\pi a v} \leq 1$. Iz tega vidimo, da je zastojna točka ena



Slika 6: Zastojne točke pri obtekanju cilindra s cirkulacijo. Levo: $\Gamma < 4\pi a v_0$ in imamo torej dve zastojni točki simetrični glede os y . Sredina: ti dve zastojni točki za $\Gamma = 4\pi a v_0$ degenerirata v eno same, ki se (Desno) za $\Gamma > 4\pi a v_0$ odlepi od površine valja.

sama, če je $\Gamma = 4\pi a v$, če je cirkulacija manjša sta zastojni točki dve, če pa je večja, zastojnih točk na površini valja ni (glej sliko 6).

Hitrostno polje okrog valja s cirkulacijo torej imamo. Pomemben pa je tudi izračun sil, ki delujejo na valj zaradi gibanja tekočine. Silo bomo dobili iz integrala napetostnega tenzorja po površini valja, ob upoštevanju njene smeri. Za tlak na površini valja najprej dobimo iz Bernoullijeve enačbe

$$p(r = a, \theta) = \frac{1}{2}\rho |v_0|^2 - \frac{1}{2}\rho |v(r = a, \theta)|^2. \quad (12)$$

Integral napetosti po površini valja pa nam daje za silo dve komponenti: komponento v smeri v_0 , F_x , in komponento v pravokotni smeri, F_y . Izpeljemo

$$F_x = \int_0^{2\pi} p(r = a, \theta) a \cos \theta d\theta = 0 \quad F_y = \int_0^{2\pi} p(r = a, \theta) a \sin \theta d\theta = \rho v_0 \Gamma. \quad (13)$$

Torej je sila v osi obtekanja nič, kar se nam zaradi naših izkušenj s tekočinami zdi nekoliko nenavadno, zato ta rezultat poimenujemo tudi **d'Alembertov² paradoks**. Zavedati pa se seveda moramo, da pravih izkušenj z idealnimi neviskoznimi tekočinami nimamo. Sila v prečni smeri F_y je tako v splošnem premo sorazmerna cirkulaciji in hitrosti in po svoji smeri ni očitno nič drugega kot dinamični vzgon.

²Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Francoski enciklopedist, fizik in matematik. V hidrodinamiki je prvi izračunal upor krogle v tekočini in dobil za idealen tok vrednost nič. To imenujemo tudi d'Alembertov paradoks, saj se je takrat zdelo čudno, da idealen tok tekočine ne deluje na mirujočo kroglo.

2.3 Blasiusova enačba in teorem Kutta - Žukovski

Sedaj se lotimo neposredno teorema Kutta - Žukovski oziroma centralnega teorema aerodinamike! Teorem Kutta - Žukovski nam bo povedal, kako izračunamo silo na telo poljubne, ne le valjaste, oblike v poljubnem zunanem toku. Predstavlja torej posplošitev zgornjega računa sile na valj v toku, ki ga opisuje enačba 6.

Postavimo se v kompleksno ravnino in izračunajmo tole kombinacijo sil $F_y - iF_x$ na telo s poljubnim profilom, ki se nahaja v idealnem dvodimenzionalnem toku! Za idealni tok, so komponente gostote sile, torej sile na enoto dolžine v z smeri in na enoto loka površine, na telo z lokalno normalo $\mathbf{n}$ enake kar $f_i = -pn_i$. Od tod lahko hitro izpeljemo, da je

$$F_y - iF_x = \oint_{\mathcal{C}} p dz. \quad (14)$$

Integral je sedaj v kompleksni ravnini in sicer po zanki $\mathcal{C}$, ki opisuje profil telesa. Tlak p moramo seveda vzeti tik ob površini telesa. p , hitrost ob površini telesa in pa njune vrednosti daleč stran, so povezani z Bernoullijevo enačbo

$$p + \frac{1}{2}\rho|v|^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho|v_0|^2 = \text{const.} \quad (15)$$

Če sedaj Bernoullijev zakon vstavimo v enačbo za $F_y - iF_x$ in upoštevamo, da je zanka $\mathcal{C}$ zaključena, potem dobimo Blasiusovo ³ enačbo

$$F_y - iF_x = -\frac{1}{2}\rho \oint_{\mathcal{C}} v^2 dz. \quad (16)$$

V Blasiusovi enačbi integriramo po zanki $\mathcal{C}$, torej po obodu telesa, v pozitivni smeri, to je v smeri obratni od urinega kazalca. Tu je treba opozoriti še na manjši tehnični detajl. V Bernoullijevi enačbi je $|v|^2$ seveda kvadrat absolutne vrednosti hitrosti, torej $|v|^2 = \frac{d\omega}{dz} \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{z}}$. V Blasiusovi enačbi pa je $v^2 = \frac{d\omega}{dz} \frac{d\omega}{dz}$, torej zgolj kvadrat hitrosti in ima torej realno in imaginarno komponento. To je posledica (tu je ne bomo natančno izpeljali) dejstva, da je v Blasiusovi enačbi kvadrat hitrosti pomnožen z dz in da integriramo po robu telesa, ki po definiciji sovpada s tokovnico, in je torej $d\omega = d\bar{\omega}$.

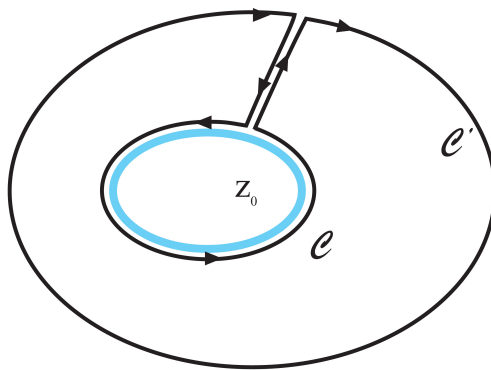
Ker hitrost $v(z)$ po predpostavki nima v kompleksni ravnini nobenih polov lahko zanko $\mathcal{C}$ razklenemo in deformiramo tako kot prikazuje slika 7. Integral po $\mathcal{C}$ v smeri obratni od urinega kazalca lahko tako spremenimo v integral po $\mathcal{C}'$ v smeri urinega kazalca. Da izračunamo ta integral pa ne potrebujemo več hitrosti na samem obodu telesa, pač pa zgolj hitrost daleč stran od telesa. V tem območju, torej za $|z/z_0| \ll 1$, kjer je z_0 nekje v notranjosti telesa, pa velja za hitrost Laurentov razvoj

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{(z - z_0)^n} = v_0 + \frac{v_1}{z - z_0} + \frac{v_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad \text{kjer so} \quad v_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{v(z') dz'}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (17)$$

Podoben razvoj lahko izpeljemo tudi za kvadrat hitrosti $v^2 = \frac{d\omega}{dz} \frac{d\omega}{dz}$, ki nastopa v Blasiusovi enačbi. Če primerjamo med seboj koeficiente obeh razvojev, vidimo, da mora veljati

$$\oint_{\mathcal{C}} v^2(z) dz = -2v_0 \oint_{\mathcal{C}} v(z) dz. \quad (18)$$

³Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970). Nemški hidrodinamik. Pomembno prispeval k teoriji mejnega sloja, turbulence in teorije kril. Izjemno dober učitelj hidrodinamike.



Slika 7: Deformacija integracijske zanke v Blasiusovi enačbi.

Zgornja zveza velja za poljubno zanko $\mathcal{C}$. Nesemo jo nazaj v Blasiusovo enačbo, pa dobimo teorem Kutta - Žukovski

$$F_y - iF_x = -\frac{1}{2}\rho \oint_{\mathcal{C}} v^2 dz = \rho v_0 \oint_{\mathcal{C}'} v(z) dz = \rho v_0 \Gamma. \quad (19)$$

Pri zadnjem prehodu čez enačaja smo se spomnili še definicije cirkulacije toka. Integral tu poteka v smeri urinega kazalca. Zanimivo je, da smo dobili identični rezultat pri obtekanju valja s cirkulacijo.

Novo pa je dejstvo, da teorem Kutta - Žukovski velja splošno za katerokoli telo s stalnim presekom v tretji dimenziji. Sila v smeri toka bo nič, saj teorem Kutta - Žukovski nima imaginarne komponente, medtem ko bo v prečni smeri deloval dinamični vzgon. Ta kaže navzgor v primeru, ko je cirkulacija pozitivna (v smeri urinega kazalca). Teorem Kutta ⁴ - Žukovski ⁵ bi tako lahko zapisali tudi vektorsko

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}_0 \times \mathbf{\Gamma}, \quad (20)$$

pri čemer smo ustrezno, v smislu desnosučnega vijaka, definirali smer vektorja cirkulacije. Dinamični vzgon na poljubno telo v idealni tekočini, katere tok ima od nič različno cirkulacijo, je torej enostavno sorazmeren vektorskemu produktu vektorja cirkulacije in vektorja hitrosti valja.

Na osnovi zgornjega teorema lahko sedaj razumemo tudi delovanje Flettnerjevega krila: imamo zunanji tok s hitrostjo $\mathbf{v}_0$, vrtenje valja pa ustvarja v tekočini neko cirkulacijo $\mathbf{\Gamma}$. Medsebojno učinkovanje enega in drugega pa pripelje do sile, ki deluje pravokotno na smer zunanje hitrosti.

2.4 Konformne preslikave

Osnovna zamisel tega zadnjega koraka pri izpeljavi dinamičnega vzgona krila je, da kompleksni hitrostni potencial valja s cirkulacijo povežemo s tokom okrog krila, ki seveda

⁴Martin Wilhelm Kutta (1867-1944). Nemški matematik, znan predvsem po Runge-Kutta metodi reševanja diferencialnih enačb, ki jo je vpeljal leta 1901. Leta 1902 je v svojem doktoratu neodvisno izpeljal tudi teorem Kutta - Žukovski, vendar se kasneje ni ukvarjal z letalstvom.

⁵Nikolaj Jegorovič Žukovski (1847-1921). Ruski fizik in "oče ruskega letalstva". Po letu 1880 se je začel zanimati za možnosti letenja in je leta 1895 obiskal letalskega pionirja Otta Lilienthala v Berlinu. 1918 je ustanovil Institut za aerodinamiko, ki je po njegovi smrti leta 1922 postal Akademija vojaške aeronavtike N. J. Žukovskega.

ni valj. Za dvodimenzionalen tok to lahko storimo s **konformnimi preslikavami**. Če imamo namreč dve analitični funkciji, $\omega(z)$ in $F(z)$, potem je tudi $\omega(F(z))$ analitična funkcija. Preslikavi $\omega(z) \longrightarrow \omega(F(z))$ pravimo tudi konformna preslikava oziroma transformacija.

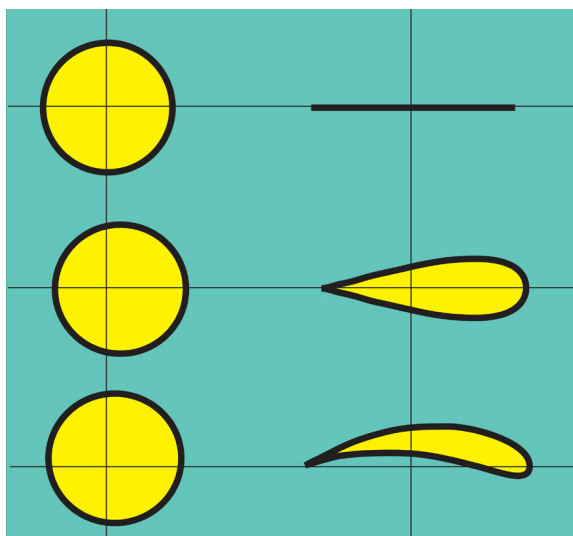
Poiskati moramo potemtakem konformno preslikavo, ki bo valj preslikala v nekaj krilu podobnega. Prvi je takšno preslikavo odkril Žukovski in se po njem tudi imenuje. Konformna preslikava Žukovskega ima obliko

$$z \longrightarrow Z, \quad \text{kjer je} \quad Z = z + \frac{c^2}{z} \quad (21)$$

V kaj ta konformna preslikava preslika valj z radijem a , ki ga v polarnem zapisu opisuje $z = ae^{i\theta}$? Za koordinati $Z = X + iY$ hitro dobimo enačbo [?]

$$\frac{X^2}{(a + \frac{c^2}{a})^2} + \frac{Y^2}{(a - \frac{c^2}{a})^2} = 1. \quad (22)$$

V splošnem torej preslikava Žukovskega valj preslika v elipso s polosema $a + \frac{c^2}{a}$ in $a - \frac{c^2}{a}$. Če nadalje vzamemo $c = a$ potem elipsa degenerira v daljico dolžine $4a$, s krajiščema pri $Z = 2a$ in $Z = -2a$. Daljica pod nekim naletnim kotom glede na smer zunanje hitrosti v_0 pa je preprost model krila. Bolj splošno preslikava Žukovskega preslika valj oz. krog v



Slika 8: Konformna preslikava Žukovskega preslika krog, ki ni v središču koordinatnega sistema (na levi strani slike), v krilo podobno telo (na desni strani slike).

različne krilu bolj ali manj podobne like, slika 8. Pri tem moramo dovoliti, da prvoten valj ni centriran v izhodišču koordinatnega sistema. Zaenkrat se zadovoljimo z limito daljice, ko je $c = a$. Izračunajmo torej hitrostno polje okrog te daljice nagnjene za kot α .

Premaknimo najprej koordinatni sistem v smeri obratni gibanju urinega kazalca za kot α , torej $z \longrightarrow ze^{i\alpha}$. Dobimo

$$\omega(z) = v_0 \left(ze^{i\alpha} + \frac{r^2}{z} e^{-i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \alpha. \quad (23)$$

Takšnemu kompleksnemu potencialu ustreza hitrostno polje

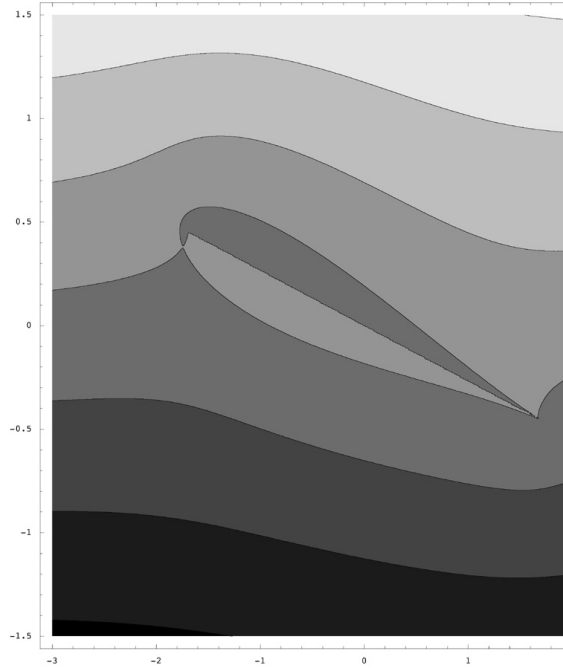
$$v(z) = \frac{d\omega(z)}{dz} = v_0 \left(e^{i\alpha} + \frac{a^2}{z^2} e^{-i\alpha} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi z}. \quad (24)$$

To hitrostno polje sedaj preslikamo s konformno preslikavo Žukovskega, enačba 21. Dobimo

$$v(z) = \frac{d\omega(z)}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{v_0 \left(e^{i\alpha} + \frac{a^2}{z^2(Z)} e^{-i\alpha} \right)}{1 - \frac{a^2}{z^2(Z)}} - i \frac{\Gamma}{2\pi \left(z(Z) - \frac{a^2}{z(Z)} \right)}. \quad (25)$$

Za $c = a$ zgornje hitrostno polje torej ustreza obtekanju daljice dolžine $4a$, ki je glede na zunanjo hitrost nagnjena za naletni kot α .

Naj zavoljo jasnosti še enkrat ponovimo potek računanja. V prejšnjem razdelku smo obdelali tok okrog valja, v tem razdelku pa smo preslikali to polje v polje okrog nagnjene daljice. To nam je uspelo s konformno preslikavo Žukovskega. Ne da bi to naredili, bi lahko hitrostno polje okrog valja preslikali tudi v hitrostno polje okrog krila podobnega nagnjeni solzi, slika 9. Takšno obliko krila dobimo, če koordinatno izhodišče valja prestavimo v pozitivni smeri osi x za neko konstanto (glej sliko 8). Ustrezen račun je analitično precej zapleten, ga pa lahko zlahka napravimo numerično v Mathematici. Rezultat je predstavljen na sliki 9, kjer lahko tudi zelo lepo opazujemo odklanjanje toka pri vodilnem robu. Vendar še nismo čisto pri koncu. Namreč hitrostno polje okrog različnih oblik



Slika 9: Skica prikazuje v Mathematici izrisano hitrostno polje za nagnjeno "solzo". Ta oblika je, v nasprotju z nagnjeno daljico, že zelo podobna realnemu krilu. Področja med različnimi tokovnicami sva progresivno zatemnila. Navpična in vodoravna skala sta arbitrarni, saj nam ne gre za kvantitativno analizo hitrostnega polja.

profila krila je še vedno odvisno od tega, kaj vzamemo za cirkulacijo Γ . Naše rešitve veljajo za poljubno cirkulacijo. Teorem Kutta - Žukovski pa pravi, da je dinamični vzgon odvisen od vrednosti cirkulacije. Ali je potem popolnoma nedoločen oziroma poljuben?

2.5 Hipoteza Žukovskega

Hitrostno polje enačbe 25 ima pomembno slabost. Namreč hitro se lahko prepričamo, da hitrost na naletnem in zadnjem robu našega krila, torej nagnjene daljice, divergira. Enako bi veljalo tudi za druge, bolj zapletene oblike kril. Pomanjkljivost se torej ne skriva v naivnosti modela krila.

Do divergence hitrosti pridemo takole. Razvijmo hitrostno polje nagnjene daljice En. 25 okoli zadnjega roba krila, ki je podan z $Z = 2a$ oziroma $z = a$. Torej za $z = a + \epsilon$, kjer je $\epsilon/a \ll 1$, dobimo skozi Taylorjev razvoj

$$v(z = a + \epsilon) = v_0 \cos \alpha - \epsilon^{-1} i \left(\frac{\Gamma}{4\pi} - v_0 a \sin \alpha \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (26)$$

V kolikor izraz v oklepaju pri členu ϵ^{-1} ni enak nič, hitrost na zadnjem robu divergira, ko gre $\epsilon \rightarrow 0$. Da bi dobili fizikalno smiselno rešitev, ki je povsod okrog krila končna, je Žukovski predpostavil, da moramo za cirkulacijo vzeti takšno vrednost, da bo divergentni člen v enačbi 26 enak nič. To imenujemo tudi **hipoteza Žukovskega**. Po Žukovskem mora torej veljati, da je

$$\Gamma = 4\pi v_0 a \sin \alpha, \quad (27)$$

Hipotezo Žukovskega se da formulirati tudi bolj nazorno. Namreč takole: da bi bila hitrost povsod končna, moramo zadnjo zastojo točko pri obtekanju krila postaviti natančno na rob krila. Cirkulacija krila se sama nastavi tako, da zadnja zastoja točka sovpada s koncem krila in je hitrostno polje zato povsod končno.

Hipoteza Žukovskega vsebuje več kot se zdi na prvi pogled. Na nek način namreč v naš račun skozi stranska vrata pripelje viskoznost. Popolnoma postane razumljiva šele v okviru teorije mejnega sloja, kar pa presega nivo, ki ga želimo ohraniti v tem sestavku. Zato naj navedemo brez detajlne razlage: hipoteza Žukovskega je smiselna zato, ker v bližini krila ne moremo zanemariti viskoznosti. Čeprav celoten račun hitrostnega polja nikjer eksplicitno ne vsebuje viskoznosti, pa je ta implicitno vsebovana v hipotezi Žukovskega, ki tudi določa vrednost Γ . Kot zanimivost naj povemo, da v superfluidni tekočini, kjer je viskoznost identično enaka nič, dinamičnega vzgona **ni**.

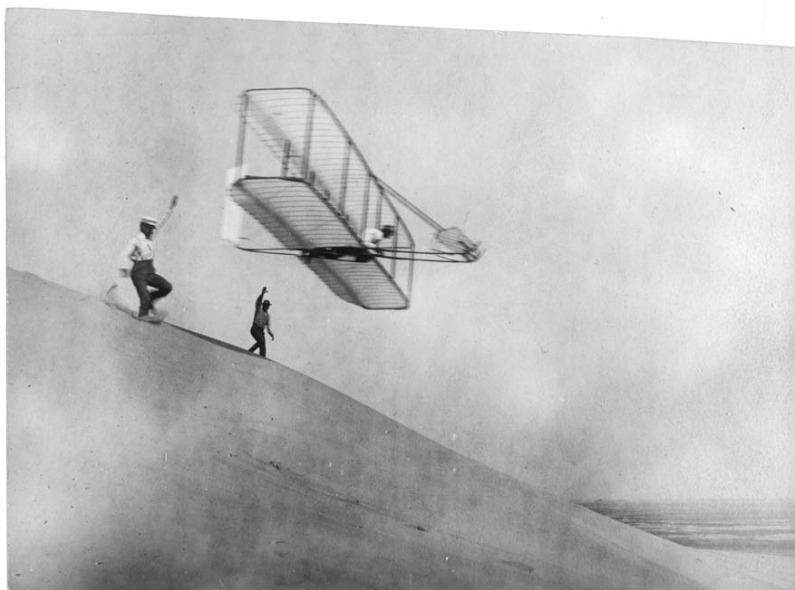
Preostane nam torej le, da vrednost za cirkulacijo dobljeno iz hipoteze Žukovskega vnesemo v enačbo 20 za dinamični vzgon ter tako dobimo končni rezultat

$$F_y = \rho v \Gamma = 4\pi a \rho v_0^2 \sin \alpha. \quad (28)$$

To je torej linearna gostota sile dinamičnega vzgona na ravno površino širine $4a$, nagnjeno v zunanjem toku za naletni kot α . Da dobimo celotno silo moramo F_y pomnožiti še z razponom kril. Celotno silo dinamičnega vzgona na krilo tako zapišemo kot

$$F_v = \pi S \rho v_0^2 \sin \alpha, \quad (29)$$

kjer je S celotna površina krila. Ta rezultat je izpeljal Žukovski leta 1906 in neodvisno pred njim v svojem doktoratu leta 1902 tudi Kutta. Brata Wilbur in Orville Wright (Slika 10), ki sta v Kitty Hawku (Severna Karolina) opravila prvi uradno priznani letalski polet 17 decembra 1903, sta bila predvsem empirično usmerjena in čeprav sta poznala takratno aerodinamsko strokovno literaturo seveda nista vedela za teorem, ki se je skrival zakopan v doktoratu Kutte. Letalstvo se je torej začelo bolj ali manj povsem empirično



Slika 10: Fotografija posneta med enim od poskusnih letov bratov Wright v Kitty Hawku, nekje med 4 in 11 Avgustom, 1901. Avtor fotografije je Octave Chanute.

in so njegovi neustrašni pionirji ⁶ zato tembolj vredni našega občudovanja. Teoretična aerodinamika postavljena na teoremu Kutta - Žukovski mu je sledila z rahlim časovnim zamikom.

2.6 Veljavnost teorije dinamičnega vzgona

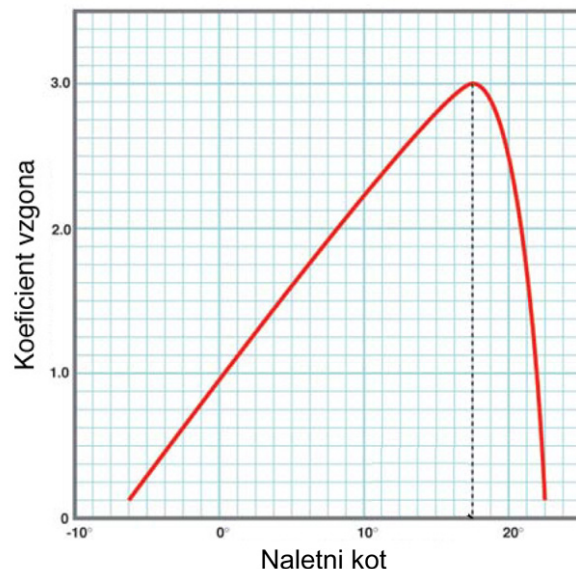
Teorija dinamičnega vzgona, ki temelji na teoremu Kutta - Žukovski in na hipotezi Žukovskega zadovoljivo opisuje hitrostno polje okrog krila in tudi sile nanj. Danes sicer zares ne računamo vzgona kril na tak način, ampak kar neposredno z numeričnim reševanjem osnovnih enačb hidrodinamike. Takšne rešitve omogočajo veliko bolj natančno določevanje dinamičnega vzgona in tudi izračun optimalnih karakteristik krila.

Opisana teorija ne vsebuje kakšnih protislovij, razen seveda to, da velja zgolj za dovolj majhne naletne kote, ko je mejna plast tekočine, oziroma mejna tokovnica tokovnica laminarnega toka, trdno *zalepljena* na krilo [3]. Na sliki 11 se da videti, kako se empirično spreminja koeficient dinamičnega vzgona z naletnim kotom. Pri nekem končnem kritičnem naletnem kotu se dinamični vzgon drastično zmanjša, pride do **zloma vzgona**, in le-ta ne sledi več odvisnosti, ki jo podaja enačba 29.

Ločevanje laminarnega mejnega sloja in z njim povezan nastanek turbulentnega sloja in drastičnega padca dinamičnega vzgona [3], je prvi opisal Ludwig Prandtl ⁷. Laminarni sloj se lahko namreč ob določenih pogojih "odlepi" od površine kot to prikazuje slika 12. Med odlepljenim laminarnim mejnim slojem in krilom nastane področje turbulentnega toka, ki ne sodeluje več pri ravnovesju sil, ki ga opisuje teorem Kutta - Žukovski. Sledi

⁶Nemški letalski pionir Otto Lilienthal (1848 - 1896) je v svojih zadnjih trenutkih, potem ko je strmoglavil z letalom, izrekel nešteto krat citirane besede: "Žrtve so potrebne".

⁷Ludwig Prandtl (1875-1953). Nemški fizik. Utemeljitelj moderne hidrodinamike. Težko bi našli katerikoli problem v sodobni hidrodinamiki, ki ga ni bodisi začel ali pa rešil Prandtl. Največji vpliv na hidrodinamiko je ohranil njegov koncept mejnega sloja in pa ločitve oz. odlepljanja mejnega sloja.



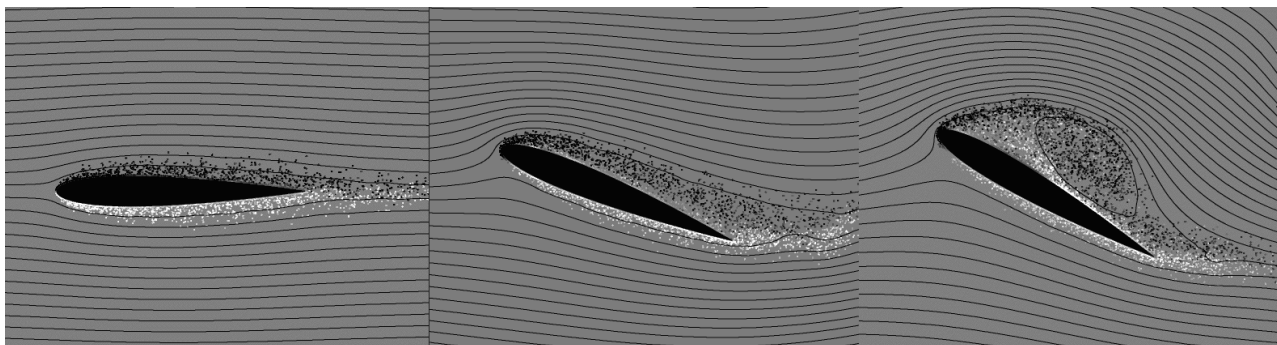
Slika 11: Celotna krivulja odvisnosti koeficienta dinamičnega vzgona od naletnega kota. Koeficient dinamičnega vzgona je definiran kot $C_L = F_v / (\frac{1}{2} \rho v_0^2 S)$, kjer je F_v sila dinamičnega vzgona, v_0 hitrost leta in S celotna površina krila. Ostale oznake so standardne. Pri neki kritični vrednosti naletnega kota pride do zloma dinamičnega vzgona in teorija Kutta - Žukovski ne velja več.

torej drastično zmanjšanje dinamičnega vzgona oziroma zlom vzgona. Detajli tega procesa presegajo nivo tega članka.

Pri ločevanju mejnega sloja igrajo bistveno vlogo viskozni efekti in jih tudi v najnižjem redu ne moremo zanemariti. Obstoj kritičnega naletnega kota je dolgo časa delal preglavice v letalstvu, vse dokler se ljudje niso naučili natančno kontrolirati parametrov in stabilizacije leta, predvsem naletnega kota.

3 Zaključek

V prvem delu tega članka sva predstavila poenostavljene modele dinamičnega vzgona, za katere pa se je izkazalo, da niso realistični in včasih celo v nasprotju z empiričnimi dejstvi. Kljub preprosti fizikalni sliki principov leta jih zato ne moremo vzeti zares. Detajlna teorija, ki temelji na teoremu Kutta - Žukovski in pa hipotezi Žukovskega je veliko bolj realistična, vendar jo je tudi težje razložiti laiku [4]. Da imajo s tem probleme tudi drugi avtorji se da razbrati iz zadnje "vojne" na temo zlorab Bernoullijeve enačbe pri razlagi principov leta [5]. Teorem Kutta - Žukovski je še vedno dejansko posledica Bernoullijeve enačbe in ga torej lahko vpeljemo preprosto skozi gostoto tokovnic in ustreznimi spremembami tlaka. Popolnoma nekaj drugega pa je razlaga asimetričnega polja hitrosti okrog krila. Newtonski in bernoullijevski model tu povsem odpovesta. Obstoj cirkulacije in s tem asimetrične hitrosti nad in pod krilom pa lahko najbolj preprosto zagovarjamo s hipotezo Žukovskega, ki temelji na zahtevi, da mora ena od stagnacijskih točk sovpadati z zadnjim robom krila, kar edino lahko omogoča končnost hitrostnega polja v vsaki točki okrog krila. Bralca najbrž ne bo ogrel argument, da je asimetrično polje hitrosti dejansko posledica viskoznosti tekočine v tankem mejnem sloju okrog krila, iz česar dejansko sledi



Slika 12: Ločitev Prandtlovega mejnega sloja. Prikazane so tokovnice, medtem ko bele in črne točke označujejo smer in jakost vrtinčnosti. Ko se mejni sloj oziroma tokovnica tik ob površini krila loči od površine krila, za njo ostane turbulentni sloj z intenzivno vrtinčnostjo. Obtekanje krila za tri vrednosti naletnega kota. Prirejeno po Szu-Chuan Wang, Florida State University, College of Engineering.

hipoteza Žukovskega.

Se da let razložiti bolj preprosto? Kako bi ga razložili recimo Rožletu? Nekako takole. Obstoj sile dinamičnega vzgona na letalo oziroma njegovo krilo seveda po Newtonu pomeni, da letalo z enako in po smeri nasprotno silo deluje navzdol na obtekajoči zrak. Ker je sila na zrak sorazmerna spremembi njegove gibalne količine na enoto časa sledi, da se mora zrak ob krilu gibati v povprečju navzdol. Rožletu bi torej razložili delovanje letala tako, da krilo *piha* zrak navzdol in deluje na letalo z reakcijsko silo tega zraka. To se zelo dobro vidi tudi s slik, ko letala preletavajo oziroma letijo skozi oblake, slika 13. Takšna razlaga bi bila, kot že vemo, popolnoma pravilna pri hipersoničnem letu. Pri podzvočnem letu pa bi jo morali nekoliko natančneje pokomentirati. Po teoriji Kutta - Žukovski namreč krilo zraka ne "piha" navzdol, ampak ga zgolj na hitro "prestavlja" ob krilu navzdol. Toda če bi pri tem upoštevali še trodimenzionalno naravo krila in predvsem njegovo končno dolžino bi hitrostno polje zadaj za krilom res dajalo vtis, da krilo "piha" zrak navzdol (zelo lepo razvidno s slike 13). Pa naj leti, kdor more!

4 Zahvala

Zahvaljujeva se dr. Juretu Zupanu za branje obeh člankov in vse njegove stilske pripombe. Zahvaljujeva se tudi obema recenzentoma za tehtne pripombe.

Literatura

- [1] L. Vidic, *Neklasična in klasična krila* (Diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2002).
- [2] R. Podgornik *Mehanika kontinuov* (pisni materiali za študente, <http://www-f1.ijs.si/rudi/self/kontinui.html>, 2005).
- [3] L. Prandtl, O.G. Titjens, *Fundamentals of hydrodynamics and aeromechanics in Applied hydrodynamics and aeromechanics* (Dover publications, New york, 1957).



Slika 13: Podkvasti vrtinec za LearJetom nakazuje navpično gibanje zraka za krili aviona.

- [4] J.D Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics* (McGraw-Hill, New york, 2001).
- [5] G. M. Craig, *Stop Abusing Bernoulli! - How Airplanes Really Fly* Regenerative Press (January 1, 1998).