

Lighthillova akustična analogija in zvočni hrup pri
turbulenci. Drugi del
Lighthill acoustic analogy and noise in turbulence.
Second part.

Rudolf Podgornik † , Nikola Holeček ‡ , Brane Širok ¶ in Marko Hočevar ¶
† Fakulteta za Matematiko in Fiziko, Univerza v Ljubljani
‡ Gorenje, P.P. 107 , SI - 3503 Velenje,
¶ Fakulteta za Strojništvo, Univerza v Ljubljani

PACS: 47.27.Sd 43.25.+y 43.50.+y

August 22, 2005

Abstract

Na osnovi Lighthillove akustične analogije, ki smo jo vpeljali v prvem delu tega članka, bomo izpeljali še spektralno gostoto akustičnega hrupa pri turbulenci. Izpeljali bomo njegovo frekvenčno odvisnost in pokazali, da ga je mogoče izmeriti in uporabiti pri reševanju tehničnih problemov v industrijskih aplikacijah.

Starting from the Lighthill acoustic analogy that we derived in the first part of this paper, we will derive the spectral density of acoustic noise in turbulence. We will derive its frequency dependence and show that it can be measured and used for solving engineering problems in industrial applications.

1 Uvod

V prvem delu tega članka smo si ogledali Lighthillovo akustično analogijo, ki preprosto pomeni drugačen zapis osnovnih enačb hidrodinamike, torej Navier - Stokesove enačbe in pa kontinuitetne enačbe, v obliki ene same Lighthillove enačbe. Le-ta ni nič drugega kot nehomogena valovna enačba za bodisi gostotno bodisi tlačno polje s tenzorskimi (kvadrupolnimi) izvori. Ugotovili smo, da za prostorsko omejene turbulentne izvore, rešitev Lighthillove enačbe vodi k akustičnemu sevanju, katerega moč narašča z osmo potenco hitrosti. V tem prispevku pa nas bo zanimala tudi frekvenčna porazdelitev tega akustičnega sevanja, torej njegov frekvenčni spekter. Analiza frekvenčnega

spektra je nekoliko bolj zapletena kot analiza celotne moči akustičnega hrupa, vendar ji je vredno slediti, saj vodi k izjemno pomembnemu rezultatu namreč frekvenčni odvisnosti spektralne gostote akustičnega sevanja. Pokazali bomo, da v okviru teorije turbulence Kolmogorova dobimo zelo preprosto frekvenčno odvisnost spektralne gostote.

2 Kraichnanova enačba

Zanima nas torej frekvenčna porazdelitev oziroma frekvenčni spekter izsevane akustične moči turbulentnih izvorov. Izračun frekvenčne odvisnosti akustičnega spektra v Lighthillovi teoriji je precej bolj zapletena zadeva kot izračun celotne izsevane moči, saj ne gre brez natančnejših predpostavk o naravi hitrostnih korelacij pri turbulentnem gibanju. Turbulenca pa je zaenkrat še vedno v splošnem nerešen problem mehanike fluidov [2]. Poglejmo kljub vsemu, kaj bi se dalo reči o akustičnem spektru sevalnega polja v Lighthillovi teoriji.

Začeli bomo z izrazom za celotno izsevano akustično moč, ki smo ga izpeljali že v prvem delu tega članka. V to formulo bomo vstavili Lighthillov retardirani potencial in jo v sevalnem območju, torej za velike oddaljenosti od izvorov, preoblikovali v izraz, ki bo vseboval integral po vseh frekvencah. Po definiciji bomo lahko podintegralsko funkcijo razglasili za frekvenčno odvisno spektralno gostoto akustičnega hrupa turbulentnih izvorov. Takšen postopek je prvi ubral R.H. Kraichnan in se zato po njem tudi imenuje [4]. Kot bomo videli bo spektralna gostota akustičnega hrupa vsebovala Fourierove frekvenčne komponente Lighthillovega tenzorja. Da bi dobili eksplicitno odvisnost spektralne gostote od frekvence bomo zato morali predpostaviti nek model za odvisnost teh Fourierovih komponent od frekvence.

Opazujmo naš sistem v času $2T$, med $-T$ in T . Povprečna izsevana akustična moč \bar{P} v času $2T$ je glede na rezultate prvega dela (En. I.32)

$$\bar{P} = \oint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{(c_0 \rho_0)} \oint \overline{(p(\mathbf{r}, t) - p_0)(p(\mathbf{r}, t) - p_0)} dS, \quad (1)$$

kjer smo s $\overline{\dots}$ označili

$$\overline{\dots} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \dots dt. \quad (2)$$

Tu smo seveda upoštevali, da sta akustični polji v splošnem funkciji časa in njuna časovna odvisnost odraža časovne fluktuacije hitrosti v turbulentnem izvoru. En. 1 lahko razpišemo tudi takole. V prvem delu smo že izpeljali, da je tlačno akustično polje En. (I.24)

$$p(\mathbf{r}, t) - p_0 = c_0^2(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0) = \frac{n_i n_j}{4\pi c_0^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T_{ij}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}) d^3 \mathbf{r}', \quad (3)$$

kjer je c_0 hitrost zvočnega valovanja, ρ_0 je statična vrednost gostote, in kjer je smerni radija-vektorja definirana kot $n_i = x_i/r$. Spomnimo se, da je Lighthillov tenzor T_{ij} definiran takole, En. (I.13)

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)) \delta_{ij} - p_{ij}. \quad (4)$$

kjer je p_0 statična vrednost tlaka, p_{ij} pa je viskozni del napetostnega tenzorja. Sedaj uvedemo frekvenčno Fourierovo reprezentacijo za časovno odvisnost v zgornji enačbi kot

$$T_{ij}(\mathbf{r}', t') = \int e^{i\omega t'} T_{ij}(\mathbf{r}', \omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5)$$

Z zgornjo definicijo frekvenčne Fourierove transformiranke Lighthillovega tenzorja ga lahko nadalje razpišemo kot

$$T_{ij}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}) = \int e^{i\omega t} e^{i\omega \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{c_0}} T_{ij}(\mathbf{r}', \omega) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (6)$$

Tu smo upoštevali, da lahko v sevalnem delu akustičnih polj in pri lokaliziranih izvorih zapišemo razliko $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ do najnižjega reda po r'/r kot $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cong |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} + \dots$. Geometrijo nam pri tem zopet predoča slika Sl. 1. To seveda

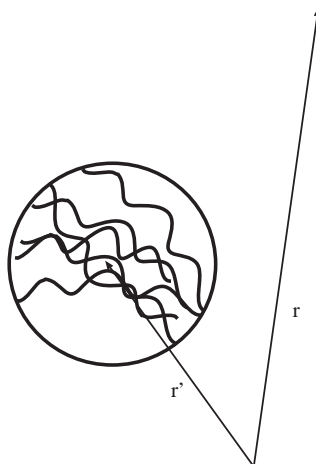


Figure 1: Slika prikazuje geometrijo turbulentnega izvora prostorsko omejenega okrog \mathbf{r}' in točke opazovanja akustičnih polj \mathbf{r} . Če je izvor prostorsko omejen in kompakten, točka opazovanja pa je daleč stran, potem lahko razvijemo $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ po $r'/|\mathbf{r}|$.

podobno kot pri opisu sevanja elektromagnetnih izvorov predpostavlja, da so tudi akustični izvori kompaktni in prostorsko omejeni. Analogno sedaj

lahko postopamo tudi pri samem prostorskem delu Lighthillovega tenzorja. Tudi tega zapišemo v obliki Fourierove dekompozicije, vendar tokrat v prostoru

$$T_{ij}(\mathbf{r}', \omega) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (7)$$

Vse zgornje izraze sedaj vstavimo v En. 3, upoštevamo definicijo Diracove delta funkcije v obliki Fourierovega integrala

$$\int e^{-i(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{n}}{c_0}\omega)\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{n}}{c_0}\omega), \quad (8)$$

pa dobimo za razliko tlakov

$$p(\mathbf{r}, t) - p_0 = \frac{(-1)}{4\pi c_0^2 r} \int \omega^2 e^{i\omega t} \left(n_i n_j T_{ij}(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}, \omega) \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (9)$$

Odvisnost od \mathbf{r} v zgornji enačbi je torej $n_i n_j / r$, medtem ko je očitno, da k lokalnemu tlaku prispeva le Lighthillov tenzor z valovnim vektorjem $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$. To je posledica dejstva, da k akustični emisiji prispevajo le skoraj nestisljivi načini nihanja [4] oziroma nestisljiva turbulenca.

V naslednjem koraku uporabimo Wiener - Hinčinov teorem [3] na enačbi En. 1. Le-ta nam poveže \overline{P} s frekvenčnim integralom kvadrata Fourierovih komponent razlike tlakov $p(\mathbf{r}, t) - p_0$, ki ga preberemo iz enačbe En. 9. Ne da bi se posebej poglobljeno ukvarjali s tem matematičnim korakom, navedimo le končen rezultat

$$\overline{P} = \frac{1}{16\pi^2 \rho_0 c_0^5} \oint \frac{dS}{r^2} \int \omega^4 |n_i n_j T_{ij}(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (10)$$

To je znamenita **Kraichnanova enačba** [4] za izsevano akustično moč, ki sledi iz Lighthillove akustične analogije za prostorsko lokalizirane izvore. Ker je desna stran En. 10 nelinearna v hitrostih, namreč Lighthillov tenzor vsebuje kvadratne člene v hitrosti En. 4, jo lahko interpretiramo takole: dva hitrostna vala $\mathbf{v}(\mathbf{k}_1, \omega_1)$ in $\mathbf{v}(\mathbf{k}_2, \omega_2)$ interagirata - člen $|n_i n_j T_{ij}(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}, \omega)|^2$, ki je četrtega reda v hitrosti - in pri tem proizvedeta zvočni val z valovnim vektorjem $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$ in frekvenco ω .

Če sedaj definiramo še spektralno gostoto $p(\omega)$ kot

$$\overline{P} = \int p(\omega) d\omega, \quad (11)$$

potem dobimo, da je

$$p(\omega) = \frac{1}{32\pi^3 \rho_0 c_0^5} \oint \frac{dS}{r^2} |\omega^2 \mathcal{A}(\omega)|^2 \quad \text{kjer je} \quad \mathcal{A}(\omega) = n_i n_j T_{ij}(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}, \omega). \quad (12)$$

Trditev, ki jo vsebuje Kraichnanova enačba, lahko torej zapišemo tudi kot enačbo za spektralno gostoto akustičnega sevanja pri prostorsko omejenih virih. Ne pozabimo: Kraichnanova enačba velja le v sevalnem približku, torej daleč stran od izvorov. V njihovi bližini so seveda zadeve veliko bolj zapletene. Na srečo nas tu ne zanimajo.

Za konec tega razdelka se lotimo še izvrednotenja površinskega integrala po oddaljeni mejni površini (sevalni približek !) v zgornjih enačbah. Iščemo torej $\oint \dots dS$ po krogelni površini, ki je za r oddaljena od turbulentnih izvorov. Če se preselimo v sferične koordinate, lahko po precejšnjih algebraičnih mukah izpeljemo, da je

$$\oint \frac{n_i n_j n_k n_l dS}{r^2} = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \frac{4\pi}{15} \Delta_{ijkl}. \quad (13)$$

Δ_{ijkl} imenujemo tudi popolnoma izotropni tenzor četrtega reda. Spomnimo se, da smo podoben rezultat uporabili tudi pri Hookovem zakonu za izotropno elastično telo, kjer smo na tak način zapisali tenzor elastične konstante K_{ijkl} [1]. Upoštevamo vse zapisano, pa ostanemo s spektralno gostoto akustičnega sevanja v obliki

$$p(\omega) = \frac{\omega^4}{120\pi^2 \rho_0 c_0^5} \left(\Delta_{ijkl} T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0} \mathbf{n}, \omega\right) T_{kl}\left(-\frac{\omega}{c_0} \mathbf{n}, -\omega\right) \right), \quad (14)$$

kjer smo upoštevali, da za poljubno Fourierovo komponento $\mathcal{B}(\omega)$ velja $|\mathcal{B}(\omega)|^2 = \mathcal{B}(\omega)\mathcal{B}(-\omega)$. Če bi poznali Lighthillov tenzor turbulentnih izvorov in njegovo eksplisitno frekvenčno odvisnost, bi od tu lahko izračunali ustrezno spektralno gostoto izsevanega zvočnega hrupa takšnih izvorov. Žal ta frekvenčna odvisnost ni preprosta in, kot bomo videli, bomo morali privzeti nekaj dodatnih predpostavk, da se bomo do te frekvenčne odvisnosti lahko dokopali.

3 Hitrostne korelacije pri turbulenci

Sedaj je čas, da povemo nekaj žalostnih resnic o turbulenci. Splošna teorija turbulentnega gibanja tekočin ne obstoja in tudi ni videti, da bi jo kaj kmalu lahko dobili. Ponavadi se zato zatečemo k modelom, ki večinoma slonijo na statističnem opisu turbulence [2]. Pri takšnem opisu nas zanimajo povprečja po reprezentativnih ansamblih hitrostnih fluktuacij. Na nek način se torej pretvarjamo, da imamo opravka s statistično mehaniko turbulentnega gibanja. Uspeh takšnega pristopa je precej nepričakovan, saj turbulenca ni ravnovesen pojav. A kljub vsemu.

Namesto, da bi torej analizirali trenutno spektralno gostoto, kot jo podaja En. 14, opazujemo raje njeno statistično povprečje

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{\omega^4}{120\pi^2 \rho_0 c_0^5} \Delta_{ijkl} \left\langle T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0} \mathbf{n}, \omega\right) T_{kl}\left(-\frac{\omega}{c_0} \mathbf{n}, -\omega\right) \right\rangle, \quad (15)$$

kjer smo z $\langle \dots \rangle$ označili povprečje po reprezentativnih fluktuacijah hitrosti v turbulentnem gibanju. To statistično povprečje ponavadi ocenimo na osnovi bolj ali manj fenomenološkega modela turbulence [2]. Za Lighthillov tenzor pri zadosti velikem Reynoldsovem številu lahko predpostavimo, da ima v območju turbulentnih izvorov Reynoldsovo obliko

$$T_{ij}(\mathbf{r}, t) \cong \rho_0 v_i(\mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{r}, t), \quad (16)$$

torej da so vsi njegovi ostali členi zanemarljivi v primerjavi z Reynoldsovim. Fourierove komponente Lighthillovega tenzorja definiramo kot ponavadi

$$T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega'}{2\pi} T_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (17)$$

Če sedaj v En. 16 obe hitrosti izrazimo analogno z njunima Fourierovima dekompozicijama $v_i(\mathbf{k}, \omega)$, potem dobimo za Lighthillov tenzor v Fourierovem prostoru komponente

$$T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \rho_0 \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} v_i(\mathbf{k}', \omega') v_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'). \quad (18)$$

Končno lahko torej statistično povprečje v En. 15 zapišemo kot

$$\begin{aligned} \langle T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) T_{kl}(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle &= \rho_0^2 \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}''}{(2\pi)^3} \frac{d\omega''}{2\pi} \times \\ &\times \langle v_i(\mathbf{k}', \omega') v_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') v_k(\mathbf{k}'', \omega'') v_l(-\mathbf{k} - \mathbf{k}'', -\omega - \omega'') \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Spektralna gostota izsevanega zvočnega hrupa se torej izraža s hitrostno korelacijsko funkcijo turbulence četrtega reda. Tako daleč in nič dlje lahko pridemo s splošnim računom. Na tem mestu moramo zato privzeti nekaj lastnosti turbulence, oziroma se odločiti za nek ustrezen model, če bi radi iz zgornjega računa iztislili kakšno napoved.

Za podroben izračun spektralne gostote torej potrebujemo korelacijsko funkcijo hitrosti četrtega reda v območju turbulence. Te ne poznamo, pač pa si ponavadi pomagamo s *t.i.* hipotezo o kvazinormalnosti izotropne turbulence, kjer lahko korelacijske funkcije četrtega reda izrazimo s produkti korelacijskih funkcij drugega reda, ki jo zapišemo z nastavkom

$$\langle v_i(\mathbf{k}, \omega) v_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = Q_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega + \omega') \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (20)$$

V kakšnem drugem fizikalnem kontekstu bi tej predpostavki rekli Gaussova, saj za Gaussovo porazdelitev velja, da vse višje momente lahko izrazimo z drugim momentom. S takšnim nastavkom lahko izpeljemo [5], da je

$$\begin{aligned} \langle T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) T_{kl}(-\mathbf{k}, -\omega) \rangle &= \\ &= \rho_0^2 \int \int d^3 \mathbf{k}' d\omega' (Q_{ik}(\mathbf{k}', \omega - \omega') Q_{jl}(-\mathbf{k}', \omega') + Q_{il}(\mathbf{k}', \omega - \omega') Q_{jk}(-\mathbf{k}', \omega')). \end{aligned} \quad (21)$$

Zgornji izraz očitno ni več funkcija \mathbf{k} , oziroma $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$. To pomeni, da zgornji približki ne upoštevajo retardiranega časa, ki nam dejansko daje valovni vektor $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$. Žal jih je sila težko popraviti in s temi popravki si tu ne bomo belili glave.

Sedaj smo pred odločitvijo, kaj vzeti za $Q_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$. V približku izotropne, homogene turbulence, kar je hkrati tudi najbolj preprost približek, bomo vzeli sledeč nastavek [2]

$$Q_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{E(k)R(k, \omega)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (22)$$

Tu je $E(k)$ energijski spekter izotropne turbulence in $R(k, \omega)$ ustrezne Fourierove komponente časovne korelacijske funkcije. Izotropno in homogeno turbulenco lahko dobimo pri dovolj velikih hitrostih gibanja tekočine daleč stran od sten, ovir ali kakšnih drugih nehomogenostih. Turbulenca, ki jo inducirajo stene recimo v cevi, je drugačne narave kot izotropna in homogena turbulenca.

S tem nastavkom lahko En. 15 ob upoštevanju En. 21 prepíšemo kot

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{\omega^4 \rho_0}{30\pi^3 c_0^5} \iint d^3\mathbf{k}' d\omega' \frac{E^2(k')}{k'^4} R(k', \omega - \omega') R(k', \omega'). \quad (23)$$

Ker je integrand zgolj funkcija absolutne vrednosti valovnega vektorja \mathbf{k}' , lahko zgornjo enačbo spravimo v tole obliko

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{2 \omega^4 \rho_0}{15 \pi^2 c_0^5} \int_0^\infty dk' \frac{E^2(k')}{k'^2} \hat{R}(k', \omega), \quad (24)$$

kjer smo vpeljali frekvenčno konvolucijo časovne korelacijske funkcije kot

$$\hat{R}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' R(k, (\omega - \omega')) R(k, \omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt R(k, t)^2 e^{-i\omega t}. \quad (25)$$

Preko zadnjega enačaja smo skočili potem, ko smo vpeljali inverzno Fourierovo transformacijo v času $R(k, t)$. Enačba En. 24 predstavlja pomemben Rubinstein - Zhoujev rezultat [5] za spektralno gostoto akustičnega sevanja pri homogeni, izotropni turbulenci. Druge vrste turbulence bi seveda dala drugačno formulo za spektralno gostoto.

Kot vidimo je spektralna gostota še vedno odvisna od detajlov energijskega spektra in časovne korelacijske funkcije. Kar nam sedaj še preostane je, da izberemo smiselne nastavke za $E(k)$ in $R(k, \omega)$. Če se omejimo na teorijo Kolmogorova ¹ [1], potem običajno privzamemo, da ima energijski spekter v inercialnem režimu turbulence [1] obliko

$$E(k) = \frac{C_k \epsilon^{2/3}}{k^{5/3}}, \quad (26)$$

¹Andrej Nikolajevič Kolmogorov, 1903-1987. Ruski matematik in matematični fizik. Leta 1941 je postavil prvo uspešno fenomenološko teorijo turbulence.

kjer je ϵ moč turbulence na enoto mase na gonilni skali. Pod skalo razumemo tu velikost inverznega valovnega vektorja, saj vemo, da je $k = 2\pi/\lambda$, kjer je λ tipična valovna dolžina pri prostorskem Fourierovem opisu hitrosti. Tipična valovna dolžina in *skala* sta torej v tem kontekstu sinonima. Enačba En. 26 je znameniti $k^{-5/3}$ zakon Kolmogorova, ki sledi iz precej preproste slike energijske kaskade turbulence [1]. Povzeli bi jo lahko z besedami L.F. Richardsona ²:

”Veliki vrtinci rodijo manjše vrtince,
 ki se hranijo z vrtinčnostjo,
 in manjši vrtinci imajo še manjše vrtince,
 ki poniknejo z viskoznostjo”.

Za časovno korelacijsko funkcijo je slika nekoliko manj nazorna, privzamemo pa, da zadošča hipotezi [2]

$$R(k, \omega) = R(\omega/\theta(k)) \quad \text{ozioroma} \quad R(k, t) = R(t \theta(k)). \quad (27)$$

Funkcija $\theta(k)$ nam pove, kakšen je dekorelacijski mehanizem oziroma bolj specifično, dekorelacijski inverzni čas hitrostnih fluktuacij v turbulenci. Namreč produkt $t \theta(k)$ lahko zapišemo tudi kot $t/\tau(k)$, kjer je $\tau(k)$ korelacijski čas na skali, ki jo določa valovni vektor k .

Očitno je lahko za vsako skalo turbulence, to je za vsak k , ta mehanizem in s tem tudi dekorelacijski čas drugačen. Konkretna oblika funkcija $\theta(k)$ je odvisna od detajlov mehanizma turbulence. Da se pokazati [2], da je za generacijo akustičnega sevanja pri turbulenci smiselna oblika

$$\theta(k) = Vk, \quad (28)$$

kjer je V hitrost na gonilni skali [1]. Takšna oblika funkcije $\theta(k)$ pomeni, da so korelacije hitrosti nelokalne, torej da so na katerikoli skali k odvisne od hitrosti tudi na precej večjih skalah, oziroma na največji - gonilni skali. Gonilna skala torej določa frekvenčno porazdelitev akustične energije. Dokaz oz. argumentacija za hipotezo podano v En. 28 ni lahek niti intuitiven [2] in ga bomo tu izpustili. Na koncu se moramo tako ali tako zateči k simulacijam.

4 Rubinstein-Zhoujev $\omega^{-4/3}$ zakon

Vse kar nam sedaj preostane je, da ob vseh vpeljanih predpostavkah dejansko izračunamo frekvenčno odvisnost spektralne gostote akustične emisije pri turbulenci. Ta zadnji korak ni pretirano težak, vendar pa se moramo seveda zavedati vseh predpostavk, ki gredo vanj.

²Lewis Fry Richardson, 1881-1993. Angleški fizik in meteorolog.

Torej ob upoštevanju vsega povedanega lahko sedaj izpeljemo spektralno gostoto zvočnega hrupa pri izotropni, prostorsko omejeni turbulenci kot

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{2 \omega^4 \rho_0}{15 \pi^2 c_0^5} \int_0^\infty dk \frac{E^2(k)}{k^2 \theta(k)} \hat{R}\left(\frac{\omega}{\theta(k)}\right). \quad (29)$$

Ko sestavimo vse skupaj lahko za spektralno gostoto zvočnega sevanja, ki jo izseva izotropen turbulenten izvor v sevalnem približku, dobimo

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{2 \omega^4 \rho_0 C_k^2 \epsilon^{4/3}}{15 \pi^2 c_0^5 V} \int_0^\infty \frac{dk}{k^{19/3}} \hat{R}\left(\frac{\omega}{Vk}\right). \quad (30)$$

Če le konvolucija časovne korelacijske funkcije pada zadosti hitro pri $k \rightarrow 0$, je zgornji integral konvergenten tudi za k v bližini izhodišča. Zato nam ni potrebno preveč skrbeti, natančno kakšen je energijski spekter turbulence za majhne k (ki seveda ni oblike Kolmogorova). Če sedaj v zgornji integral vpeljemo novo spremenljivko $\xi = kV/\omega$, potem dobimo

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{2 \rho_0 C_k^2 V^{13/3} \epsilon^{4/3}}{15 \pi^2 c_0^5 \omega^{4/3}} \times \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^{19/3}} \hat{R}\left(\frac{1}{\xi}\right) \sim \text{const.} \omega^{-4/3}. \quad (31)$$

Do tega zelo netrivialnega rezultata sta se prva dokopala **Rubinstein in Zhou** pred petimi leti [5]. Izotropna homogena turbulenca potemtakem generira zvok, katerega spektralna gostota pada z $\omega^{-4/3}$. Oblika te frekvenčne odvisnosti spektralne gostote izsevanega hrupa je zelo odvisna od detajlov turbulence, vendar kakor hitro je model izotropne, homogene turbulence sprejemljiv, je tudi oblika frekvenčne odvisnosti spektra določena. Ta frekvenčna odvisnost predstavlja generičen del akustičnega spektra turbulentnih izvorov na velikih razdaljah. Načeloma bi ga bilo mogoče opaziti pri poljubnem lokaliziranem turbulentnem izvoru. Lighthillov "v⁸" zakon in Rubinstein - Zhoujev "ω^{-4/3}" zakon sta zato najpomembnejši ugotovitvi pri analizi zvočnega sevanja turbulentnih izvorov.

Na koncu se pomudimo še pri meritvah in eksperimentalni potrditvi Rubinstein - Zhoujevega rezultata. Naše meritve zvočnega hrupa pri nabiralniku za vlago (kondenzatorju) v sušilnem stroju kažejo na njegov dvojni mehanizem. Del akustičnega spektra vedno kaže "ω^{-4/3}" odvisnost in zato sumimo, da ima izvor v prostorko lokalizirani turbulenci na izhodu iz kondenzatorja. Na to generično osnovo pa je superponiran še specifični del akustičnega spektra, ki je odvisen od narave in geometrije kondenzatorja (glej sliko Sl. 3) in ima obliko bolj ali manj ostrih tonov. Hrup, ki ima izvor v generičnem delu spektra le s težavo spreminjamo, nad specifičnim delom spektra pa imamo več kontrole. Zato je dekompozicija na generični in specifični del spektra pomembna za reševanje čisto tehničnih problemov v tej industrijski aplikaciji. Teorija turbulentnega hrupa nam namreč pomaga razumeti, kateri del zvočnega spektra lahko spreminjamo z različnimi konstrukcijskimi spremembami pri načrtovanju kondenzatorja in kateri del je generičen in ni pod našo neposredno kontrolo.

5 Zaključno modrovanje

Brez natančne teorije hrupa pri turbulentnem gibanju, ki sledi iz Lighthillove akustične analogije, ne bi mogli razumeti, zakaj ima njegova spektralna gostota generični del, ki ni odvisen od detajlov turbulentnega izvora in ki kaže univerzalno frekvenčno odvisnost, kot jo napoveduje teorija Rubinsteina in Zhuja. Ta generični del spektralne gostote akustičnega sevanja bi še najlažje, seveda se moramo pri tem zavedati pomembnih razlik, primerjali s Planckovim spektrom sevanja črnega telesa. Planck je namreč našel univerzalno frekvenčno odvisnost elektromagnetnega spektra črnega telesa. V tem primeru se da do te odvisnosti priti z manj predpostavk kot v primeru zvočnega spektra turbulentnega hrupa. To je posledica dejstva, da elektromagnetno polje razumemo bolje kot turbulenco. Za turbulenco nam namreč manjkajo osnovne enačbe, ki bi igrale podobno vlogo, kot jo igrajo Maxwellove enačbe za elektromagnetno polje. Vsekakor pa je izpeljava zvočnega spektra homogene, izotropne turbulence izjemen rezultat v teoriji akustičnega hrupa v zadnjih nekaj letih in zasluži, da si ga zapomnimo.

References

- [1] R. Podgornik *Mehanika kontinuov* (pisni materiali za študente, <http://www-f1.ijs.si/rudi/self/kontinui.html>, 2005).
- [2] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, (The MIT Press, Boston, Mass, 1972)
- [3] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Butterworth-Heinemann; 2 edition, 1996).
- [4] R. H. Kraichnan, *The Scattering of Sound in a Turbulent Medium*, J. Acou. Soc. Am. **25** 1096-2005 (1953).
- [5] R. Rubinstein and Ye Zhou, *The Frequency Spectrum of Sound Radiated by Isotropic Turbulence*, *Phys Lett A* **267** 379-383 (2000).

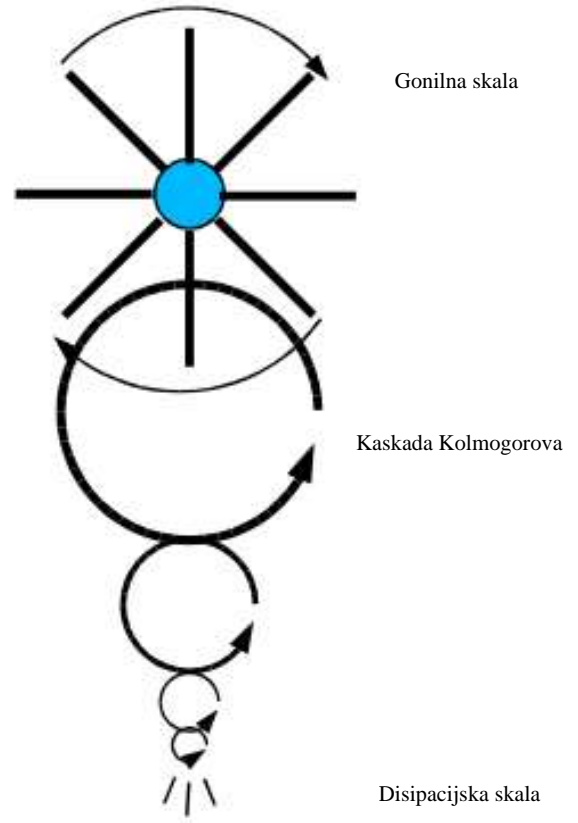
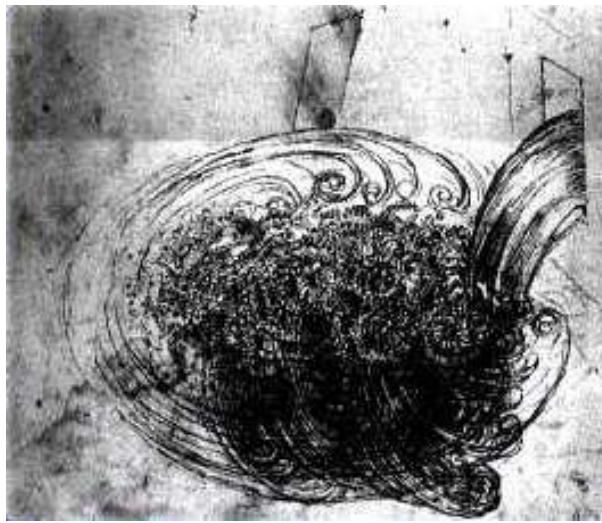


Figure 2: Levo: turbulentni vrtinci (skica Leonarda da Vinci, 1452-1519). Leonardo je začel postavljati ovire v vodni tok in je nato opazoval gibanje, ki ga je imenoval *turbolenza*. Desno: Energijska kaskada Kolmogorova. V *t.i.* inercialnem območju turbulence [1] velja, da veliki vrtinci, ki nastajajo na gonilni skali turbulence, generirajo manjše vrtince in tako naprej, dokler se celoten energijski tok ne disipira zaradi viskoznosti na disipacijski skali. Ohranjanje tega energijskega toka v inercialnem območju nam pomaga dobiti energijski spekter turbulence Kolmogorova.

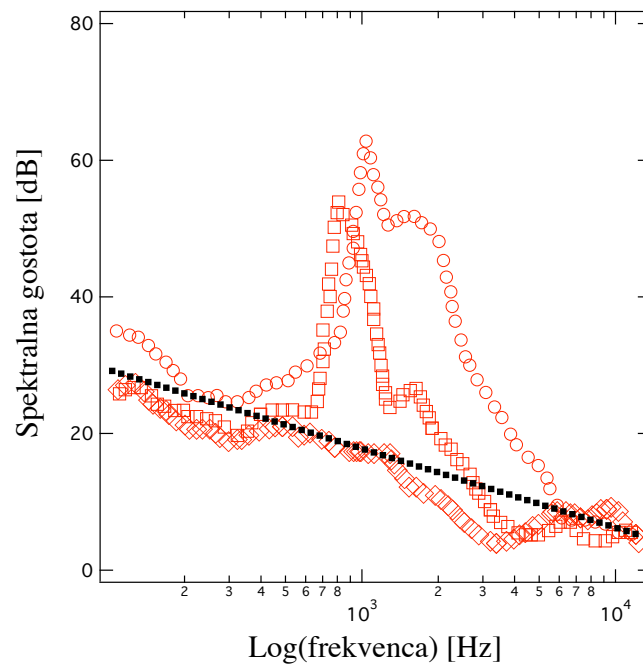


Figure 3: Slika prikazuje spektralno gostoto izsevanega hrupa daleč od turbulentnega izvora, ki je v tem primeru akustično izoliran kondenzator sušilnega stroja z različnimi vrednostmi za volumski tok zraka. Rubinstein - Zhoujev " $\omega^{-4/3}$ " zakon deluje za tiste dele spektra, kjer ni specifične akustične emisije v obliki tonov. Črtasta črta predstavlja Rubinstein-Zhoujev zakon. \circ ustreza pretoku $157 \text{ m}^3/h$, \square pretoku $125 \text{ m}^3/h$ in \diamond pretoku $111 \text{ m}^3/h$.