

Lighthillova akustična analogija in zvočni hrup pri turbulenci. Prvi del

Lighthill acoustic analogy and noise in turbulence. First part.

Rudolf Podgornik † , Nikola Holeček ‡ , Brane Širok ¶ in Marko Hočevar ¶
† Fakulteta za Matematiko in Fiziko, Univerza v Ljubljani
‡ Gorenje, P.P. 107 , SI - 3503 Velenje,
¶ Fakulteta za Strojništvo, Univerza v Ljubljani

PACS: 47.27.Sd 43.25.+y 43.50.+y

August 22, 2005

Abstract

Izpeljali bomo osnovne enačbe za t.i. *Lighthillovo akustično analogijo* in pokazali, kako vodijo do zvočne emisije (hrupa) pri lokaliziranem turbulentnem gibanju tekočine. Pokazali bomo, da je jakost hrupa sorazmerna z osmo potenco karakteristične hitrosti turbulentnega gibanja.

We will derive the basic equations of the s.c. *Lighthill acoustic analogy* and show how they lead to acoustic emission (noise) in the case of a localized turbulence in a fluid. We will show that the intensity of this noise is proportional to the eighth power of the characteristic velocity of the turbulent motion.

1 Uvod

Iz vsakdanjih izkušenj vemo, da turbulentno gibanje tekočine vodi do zvočnega sevanja, v splošnem hrupa. Slišimo ga lahko pri letalskih motorjih, zračnih turbinah, nelaminarnem gibanju tekočin, gospodinjskih aparatih V splošnem povsod tam, kjer obstaja lokalno turbulentno gibanje tekočin. V tem prispevku si bomo pogledali kako pride do nastajanja zvoka pri turbulenci in kako ga opišemo z enačbami klasične hidrodinamike. Naš cilj bo izpeljava t.i. *Lighthillove akustične analogije*, ki nam bo pomagala razumeti naravo izsevanega zvoka pri turbulenci. Čeprav je formalna izpeljava Lighthillove akustične analogije precej netrivialna in zahteva določeno predznanje hidrodinamike, jo bomo skušali predstaviti tudi opisno in jo tako narediti dostopno širšemu krogu bralcev.

2 Lighthillova enačba

Najprej bomo prepisali osnovne enačbe hidrodinamike [1] v obliki, ki bo zelo podobna valovni enačbi s kvadrupolnimi izvori. Valovno enačbo seveda poznamo, če ne od drugod, pa iz elektromagnetnega polja [2]. V prostoru brez izvorov polja je valovna enačba homogena, v prostoru z izvori, pa vsebuje člene, ki predstavljajo te izvore [2]. Ti izvori so lahko časovno spremenljivi zunanji (skalarni) naboji, dipolni (vektorski) momenti ali pa kvadrupolni (tenzorski) momenti. S terminom *kvadrupolni izvori* imamo v mislih izvore, ki jih lahko opišemo z neko tenzorsko funkcijo prostora in časa. Sledič Lighthillu se bo pokazalo, da lahko osnovne enačbe hidrodinamike zapišemo v obliki valovne enačbe s tenzorskimi izvori. Ta zapis enačb hidrodinamike nam bo omogočil, da bomo zapisali njihovo rešitev v območju daleč stran od izvorov v obliki zvočnega polja. Podobno postopamo tudi v elektromagnetskem primeru, kjer rešitev nehomogene valovne enačbe v radiacijskem približku zapišemo v obliki retardiranih potencialov, ki se daleč stran reducirajo na elektromagnetni val.

Začeli bomo z **Navier - Stokesovo enačbo** za komponente Eulerjeve hitrosti tekočine, $v_i(\mathbf{r}, t)$, in njeno gostoto $\rho(\mathbf{r}, t)$, ki jih zapišemo v standardni komponentni obliki [1] kot

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1)$$

tu je p tlak tekočine, p_{ij} pa je napetostni tenzor strižnih hitrosti. ij komponenta tega tenzorja predstavlja i -to komponento sile, ki deluje preko površine z j -to komponento enotskega normalnega vektorja. Člen na levi strani imenujemo tudi substancialni odvod hitrosti, označimo ga z $\frac{D}{Dt}$ in nam pove, kako se hitrost spreminja s časom, če se pri opazovanju gibljemo skupaj s tekočino [1]. V primeru neviskozne tekočine, $p_{ij} = 0$, se zgornja enačba poenostavi v **Eulerjevo enačbo**

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Za viskozne tekočine je v splošnem p_{ij} funkcija gradientov hitrosti $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$, oziroma funkcija tenzorja strižnih hitrosti, ki je enak kar simetriziranemu gradientu $\dot{u}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Za t.i. newtonske tekočine je p_{ik} v najnižjem redu linearna funkcija \dot{u}_{ij} , in sicer velja [1]

$$p_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}. \quad (3)$$

Za nestisljive tekočine je zadnji člen na desni strani zgornje enačbe enak nič, saj predstavlja časovni odvod relativnih sprememb volumna. Celoten napetostni tenzor torej lahko zapišemo kot $-p \delta_{ik} + p_{ik}$. η in ζ v zgornji

enačbi sta dinamična in dilatacijska viskoznost tekočine. Poleg Navier - Stokesove enačbe velja še kontinuitetna enačba, oziroma zakon o ohranitvi mase, v obliki

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

kjer lahko uvedemo vektor gostote masnega toka snovi $j_i = \rho v_i$. Pomnožimo kontinuitetno enačbo En. 4 z v_i in jo prištejmo Navier - Stokesovi enačbi, pa dobimo **Reynoldsovo enačbo**

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}. \quad (5)$$

V zgornji enačbi smo definirali tenzor toka gibalne količine π_{ij} kot

$$\pi_{ij} = \rho v_i v_j + (p - p_0) \delta_{ij} - p_{ij}. \quad (6)$$

Tenzor π_{ij} imenujemo tenzor toka gibalne količine zato, ker lahko Reynoldsov enačbo identificiramo z enačbo ohranjanja gibalne količine. Preberemo jo kot: vsota časovnega odvoda gostote gibalne količine in divergenca tenzorja toka gibalne količine je nič. Podobno je vsota časovnega odvoda gostote in divergence vektorja gostote masnega toka enaka nič. Konstanto p_0 , ki je irrelevantna za obliko Reynoldsove enačbe, smo vstavili, ker nam bo koristila kasneje, ko jo bomo tudi natančno definirali.

V primeru linearnega približka za neviskozno tekočino, dobimo za tenzor toka gibalne količine

$$\pi_{ij}^{(0)} = (p - p_0) \delta_{ij}. \quad (7)$$

Prvi člen v En. 6 je nič, ker se omejimo le na linearne člene v hitrosti, zadnji pa, ker se omejimo zgolj na idealne, neviskozne tekočine. V nadaljevanju obravnave, kot je običajno, predpostavimo, da so časovne spremembe tlaka in gostote dovolj hitre, da ne more priti do izmenjevanja topote z okolico. To pomeni, da mora biti entropija na enoto mase, $s = S/m$, konstantna, oziroma, da imamo opraviti z adiabatnimi spremembami tlaka in gostote, pri katerih sta tlak in gostota povezana z adiabatno enačbo stanja v obliki

$$p = p(\rho, s) \quad s = \text{const.} \quad (8)$$

Če je v statičnem primeru $p = p_0 = p(\rho_0, s)$, potem je za majhne spremembe okrog te vrednosti

$$p \cong p(\rho_0, s) + \left(\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \dots = p_0 + c_0^2 (\rho - \rho_0) + \dots, \quad (9)$$

kjer smo označili $c_0^2 = \left(\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$. Pokazalo se bo, da je c_0 ravno hitrost zvočnega valovanja. Za konstanto v enačbi En. 7 sedaj vzamemo ravno $p_0 = p(\rho_0, s)$ in imamo potentakem

$$\pi_{ij}^{(0)} = (p - p_0) \delta_{ij} = c_0^2 (\rho - \rho_0) \delta_{ij}. \quad (10)$$

Reynoldsovo in kontinuitetno enačbo tako zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(p - p_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Prvo enačbo sedaj odvajamo po x_i , drugo po t in ju odštejemo. Dobimo seveda valovno enačbo zvočnega valovanja v obliki

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2}\right)(p - p_0) = \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2}\right)c_0^2(\rho - \rho_0) = 0. \quad (12)$$

c_0 ni potemtakem res nič drugega kot adiabatna hitrost širjenja zvoka. Ta enačba seveda velja le v delih prostora, kjer ni nobenih akustičnih izvorov. Če bi jih imeli, bi morali nastopati na desni strani valovne enačbe, kot izvorni členi. Tako je recimo v teoriji elektronmagnetnega polja [2]. kjer imamo namreč v valovnih enačbah za skalarni in vektorski potencial, t.i. Riemann - Sommerfeldove enačbe [2], na desni strani gostoto naboja in gostoto toka nabojev kot izvore polj.

Sedaj poskušajmo ugotoviti, kakšno enačbo dobimo, če upoštevamo tudi dele tekočine, kjer približek linearne neviskozne tekočine ne drži. Najprej definirajmo **Lighthillov napetostni tenzor** T_{ij} kot [3]

$$T_{ij} = \pi_{ij} - \pi_{ij}^{(0)} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)) \delta_{ij} - p_{ij}. \quad (13)$$

Srednji člen v oklepaju sedaj ni več enak nič, kot bi sledilo iz En. 10, saj nismo več v linearinem približku. Lighthillov napetostni tenzor je očitno simetričen v svojih indeksih. S pomočjo Lighthillovega napetostnega tenzorja lahko Reynoldsovo enačbo zapišemo kot

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \pi_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\pi_{ij} - \pi_{ij}^{(0)})}{\partial x_j}, \quad (14)$$

ozziroma kot

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial c_0^2(\rho - \rho_0)}{\partial x_i} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (15)$$

Če sedaj zgornjo enačbo odvajamo po $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in kontinuitetno enačbo En. 11 po $\frac{\partial}{\partial t}$, eliminiramo iz obeh enačb mešani odvod gostote gibalne količine $\frac{\partial^2(\rho v_i)}{\partial t \partial x_i}$, pa že dobimo **Lighthillovo ¹ enačbo** [4]

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2}\right)(p - p_0) = \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2}\right)c_0^2(\rho - \rho_0) = -\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (16)$$

¹Sir Michael James Lighthill, rojen 23 Januarja 1924 v Parizu, Francija, umrl 17 Julija 1998 v Sarku na Kanalskih Otokih. Znameniti angleški matematik, ki se je vecinoma posvečal zapletenim problemom hidrodinamike.

Izpeljli smo torej to, kar smo napovedali v uvodu: osnovni enačbi hidrodinamike, torej Navier - Stokesovo enačbo in pa kontinuitetno enačbo smo prepisali v obliki nehomogene valovne enačbe s kvadrupolnimi (tenzorskimi) izvori. Posebej velja povdariti dejstvo, da je Lighthillova enačba **eksaktna** in predstavlja dejansko zgolj drugačen zapis Navier - Stokesove enačbe. Na žalost je seveda, enako kot Navier - Stokesova enačba, v splošnem le težko rešljiva. Njen čar pa je v tem, da nam nekako naravno sugerira približke, ki bi jih težko uvideli neposredno iz Navier - Stokesove enačbe. Formalno torej nismo pridobili nič. Konceptualno pa, kot se bo izkazalo, veliko, saj bomo lahko rešitev v primeru prostorsko omejenih izvorov, lahko zapisali kot akustični val.

3 Lighthillova akustična analogija

V nasprotju z enačbo En. 12 Lighthillova enačba velja tudi v delih prostora, kjer imamo akustične izvore [4]. Ti izvori imajo očitno kvadrupolno naravo, kar razberemo iz oblike desne strani enačbe En. 16, in njihova velikost na enoto volumna je podana ravno z Lighthillovim tenzorjem. O tem se lahko prepričamo, če Lighthillovo enačbo primerjamo z enačbo za elektromagnetna potenciala v kvadrupolnem približku porazdelitve sevalnih izvorov. Lighthillov tenzor bi v tem primeru nadomestil tenzor kvadrupolnega momenta porazdelitve sevalnih izvorov. Kvadrupolna narava akustičnih izvorov je najpomembnejša značilnost Lighthillove enačbe. Kvadrupolni izvori pomenijo, da je gibanje tekočine zelo šibek akustični izvor in da se le majhen del celotne energije gibanja tekočine pretvori v zvočno valovanje.

Povzemimo: Lighthillu je uspelo zapisati osnovne enačbe hidrodinamike, torej Navier - Stokesovo in kontinuitetno enačbo, v obliki valovne enačbe za akustični polji, torej polji tlaka in gostote, s kvadrupolnimi izvori. Zaradi podobnosti z enačbo akustičnega valovanja se zgornja teorija včasih imenuje tudi **Lighthillova akustična analogija**. Tako kot Navier - Stokesova enačba v splošnem ni analitično rešljiva, velja ista ugotovitev tudi za Lighthillovo enačbo.

V Lighthillovi akustični analogiji ne vemo zaenkrat še nič o naravi Lighthillovega tenzorja. Razen seveda to, da je zapleten. Pomudimo se sedaj pri njegovi strukturi. Lighthillov tenzor En. 13 vsebuje sledeče člene:

- Prvi člen predstavlja Reynoldsove napetosti in glede na to, da je ne-linearen, se ga da večinoma zanemariti povsod razen v delih prostora, kjer je gibanje turbulentno.
- Drugi člen predstavlja presežni del toka gibalne količine glede na linearno tekočino z gostoto ρ_0 . Ta člen je posledica predvsem nelinearnosti v amplitudi in nestisljivosti. Za inženirske uporabe pri podzvočnih hitrostih sta relativna sprememba tlaka in gostote zelo majhni in je

zato razmerje med tem in prvim členom v Lighthillovem tenzorju obratno sorazmerno z Reynoldsovim številom in potem takem v splošnem majhno.

- Zadnji del Lighthillovega tenzorja je posledica viskoznosti in opisuje atenuacijo zvoka v realni, viskozni tekočini. Večinoma je Reynoldsovo število v delih prostora z akustičnimi izvori zelo veliko in viskozni člen lahko običajno brez večjih posledic zanemarimo.

Od celotnega Lighthillovega tenzorja nam torej ponavadi ostane zgolj člen $T_{ij} \simeq \rho v_i v_j$, v delih prostora s turbulentnim gibanjem tekočine. Povsod drugje je $T_{ij} = 0$.

4 Sevalne rešitve Lighthillove enačbe

Sedaj se posvetimo rešitvam Lighthillove enačbe. Pri tem se bomo precej naslanjali na teorijo sevanja pri elektromagnetnem polju. Tam so rešitve nehomogene valovne nečbe t.i. retardirani potenciali [2], ki podajajo odvisnost skalarnega in vektorskega apotenciala od časovno spremenljive gostote zunanjih nabojev in tokov. Daleč stran od (po privzetku) prostorsko omejenih zunanjih izvorov se retardirana polja reducirajo na polja, ki opisujejo elektromagnetni val. To je na kratko povzetek teorije elektromagnetnega sevanja. V Lighthillovem primeru, pa bosta analogno gostotno ozira oziroma tlačno polje tekočine funkciji časovno spremenljivih komponent Lighthillovega tenzorja, ki predstavlja hidrodinamske izvore. Daleč stran od prostorsko omejenih komponent Lighthillovega tenzorja pa bomo podobno kot v elektromagnetnem primeru, dobili sevalno akustično polje. Lighthillova analogija in teorija elektromagnetnega sevanja gresta torej tu z roki v roki.

Sedaj zgornji opis še formalizirajmo. Spomnimo se najprej rešitve enačb za retardirani skalarni potencial φ v elektromagnetnem polju [2]. Osnovna enačba za retardirani skalarni potencial se glasi

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (17)$$

kjer je tu c hitrost svetlobe v vakuumu, ρ pa je gostota naboja. Rešitev zgornje nehomogene valovne enačbe je retardirani skalarni potencial v obliki

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (18)$$

Iz te rešitve lahko, kot vemo, zgradimo teorijo sevanja elektromagnetnih valov, tako da opazujemo polje v veliki oddaljenosti od njegovih izvorov. Takšnemu pristopu pravimo tudi sevalni približek.

Povrnimo se sedaj k Lighthillovi enačbi in jo skušajmo rešiti na podoben način. Hitro lahko zapišemo, da je formalna rešitev En. 16

$$\begin{aligned} (\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0) &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_V \frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (19)$$

Preko zadnjega enačja smo preskočili z dvojno parcialno integracijo, upoštevanjem Gaussovega teorema in pa glede na to, da je na meji velikega volumna Lighthillov tenzor po predpostavki enak nič. Zgornja zveza določa lokalne spremembe gostote tekočine v prostoru le, kadar so komponente Lighthillovega tenzorja bodisi podane vnaprej ali pa že poznamo rešitev Navier - Stokesove enačbe, ki jo lahko vstavimo v Lighthillov tenzor. Komponente Lighthillovega tenzorja namreč ne le opisujejo akustične izvore, analogno kot recimo gostota naboja pri EM retardiranih potencialih [2], pač pa opisujejo tudi modulacijo zvoka zaradi nelinearnosti, konvekcijo zvoka z lokalno hitrostjo tekočine, lom zvoka zaradi lokalnih sprememb v gostoti in pa attenuacijo zvoka zaradi viskoznih in topotnih efektov. Narava zgornjega retardiranega gostotnega polja je zato nekoliko dugačna kot analogen primer v EM polju En. 18. En. 19 je torej v najboljšem primeru le formalna rešitev osnovnih enačb hidrodinamike in ima kot takšna le omejeno vrednost. Iz formalne rešitve pa bomo dobili uporabno rešitev, če bomo vpeljali pametne in smiselne približke. In ravno v tem je fundamentalen pomen Lighthillove akustične analogije.

Kot je ogotovil Lighthill [4], lahko relativno preprosto in nazorno obravnavamo enačbo En. 19 le v primeru velikih Reynoldsovih števil, in pa majhnih gostotnih sprememb v volumnu akustičnih izvorov. V tem primeru nam od vseh členov Lighthillovega tenzorja ostane le prvi, torej člen Reynoldsovih napetosti

$$T_{ij}(\mathbf{r}, t) \cong \rho_0 v_i(\mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{r}, t), \quad (20)$$

ki je različen od nič le v območju turbulentnega toka in je tam tudi neodvisen od zvočnega polja. Reynoldsov del Lighthillovega tenzorja poznamo bodisi na osnovi ustreznih meritev ali pa na osnovi približnih teorij turbulentnega gibanja tekočin [5].

Nadalje predpostavimo, da je področje, kjer je Lighthillov tenzor različen od nič, torej območje turbulentnega toka, prostorsko omejeno, glej sliko Sl. 1, in da lahko privzamemo, da je do najnižjega reda v sevalnem približku podobno kot pri multipolnem razvoju EM polja [2]

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cong |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} + \dots \quad (21)$$

To pomeni, da opazujemo akustična polja daleč stran od njihovih izvorov.

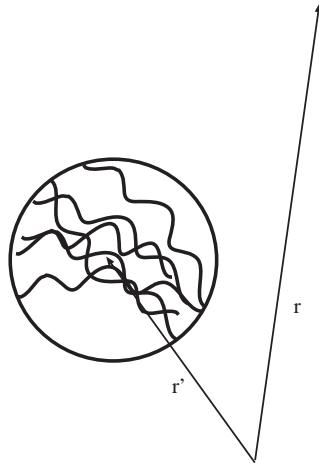


Figure 1: Slika prikazuje geometrijo turbulentnega izvora prostorsko omejenega okrog \mathbf{r}' in točke opazovanja akustičnih polj \mathbf{r} . Če je izvor prostorsko omejen in kompakten, točka opazovanja pa je daleč stran, potem lahko v En. 19 razvijemo celoten izraz na desni po $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|$.

Potem takem v tem primeru tudi sledi, da lahko krajevni odvod v En. 19 do najnižjega reda nadomestimo s časovnim odvodom kot

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow -\frac{x_i}{c_0|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (22)$$

saj v limiti sevalnega polja velja za poljubno funkcijo $f(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0})$, da je

$$\frac{\partial f(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0})}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0} \right) \cong \frac{\partial f}{\partial t} \left(-\frac{x_i}{c_0|\mathbf{r}|} \right) + \dots \quad (23)$$

Pri dvojnem odvodu v enačbi En. 19 nam ni potrebno odvajati tudi imenovalca, kajti ta prispeva zgolj k višjim redom, mi pa se bomo zadovoljili le s sevalnim, torej najnižjim približkom. Na osnovi vsega povedanega imamo končno

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &\cong \rho_0 + \frac{x_i x_j}{4\pi c_0^4 r^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T_{ij}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \rho_0 + \frac{n_i n_j}{4\pi c_0^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho_0 v_i(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}) v_j(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}) d^3 \mathbf{r}', \end{aligned} \quad (24)$$

kjer smo vpeljali enotski smerni vektor $n_i = \frac{x_i}{r}$. Zgornja enačba nam torej podaja sevalni del akustičnega polja gostote tekočine daleč stran od akustičnih izvorov, ki jih predstavlja Reynoldsov del Lighthillovega tenzor.

Zapleten hidrodinamski problem smo torej razklopili na prostorsko omejene kvadrupolne izvore akustičnih polj (desna stran enačbe En. 24) in pa sama akustična polja daleč stran od izvorov. To Lighthillovo razklopitev nam ponazarja slika Sl. 2. Reynoldsov del Lighthillovega tenzorja v

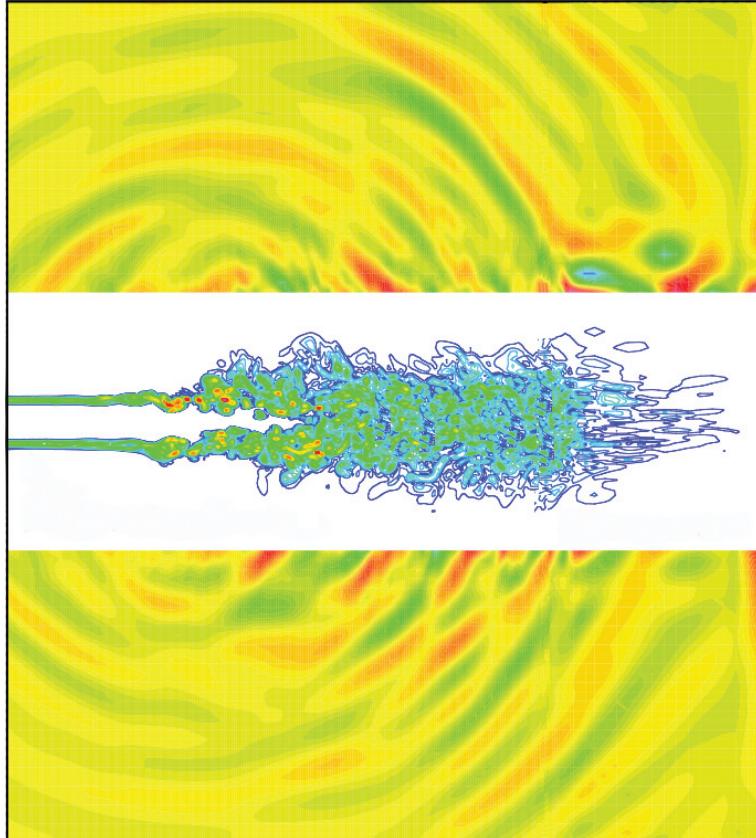


Figure 2: Slika nazorno prikazuje idejo Lighthillove akustične analogije na primeru numerične simulacije turbulentnega iztekanja tekočine iz šobe (prirejeno po A. Uzun, Purdue University). Rumeni del slike prikazuje tlačno polje, notranji del pa turbulentno hitrostno polje. Le-to očitno generira sevalno zvočno polje. Zapleten hidrodinamski problem je Lighthill razklopil v lokalizirane kvadrupolne izvore in oddaljena akustična polja. Od tod tudi ima "Lighthillova akustična analogija".

sprošnem seveda ni znana in je njegova oblika odvisna od tega, kakšne so predpostavke o naravi turbulentnega toka.

Potrebeno je tudi pojasniti, da velja zgornja izpeljava le za volumsko porazdeljene izvore. Curle [3] je ustrezno posplošil Lighthillovo teorijo tudi na površinske izvore, za katere se izkaže, da imajo dipolarno naravo.

5 Izsevana akustična moč

Podobno kot v elektromagnetnem primeru nas tudi pri Lighthillovi analogiji zanima, koliko energije izsevajo akustični izvori na enoto časa, oziroma kakšna je njihova moc. V elektromagnetnem primeru na to vprašanje odgovorimo tako, da s pomočjo Poyntingovega vektorja izrazčunamo energijski tok skozi zaključeno površino daleč stran od izvorov. Sevalni del retardiranih potencialov je edini, ki prispeva k temu energijskemu toku. Da bi podoben račun napravili še za akustično polje, moramo najprej ugotoviti, kako je definirana moč akustičnega valovanja v primeru Lighthillove analogije. O tem namreč nismo povedali še nič.

Ponovimo za začetek nekaj osnovnih pojmov iz teorije zvočnega valovanja. Predpostavimo, da imamo opravka z idealno tekočino, kar je večinoma kar ustrezna predpostavka. Začnimo torej z ohranitvenim zakonom za energijo neviskozne tekočine, ki se glasi [1]

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \int_0^\rho \frac{pd\rho}{\rho} \right) d^3 \mathbf{r} = - \int_{\partial V} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d^2 \mathbf{r}, \quad (25)$$

D/Dt je tu seveda zopet substancialni odvod, ki smo ga vpeljali že v En. 1. Zgornja enačba ni nič drugega kot zakon o ohranitvi energije in pravi, da je vsota substancialnega odvoda gostote energije in divergence gostote energijskega toka (po tem ko površinski integral z Gaussovim izrekov preoblikujemo v divergenco) enako nič. Gostota celotne energije oziroma bolj natančno proste energije, ki je podana z izrazom $\frac{1}{2} \rho v^2 + \int_0^\rho \frac{pd\rho}{\rho}$ in je enaka vsoti kinetične energije in pa tlačne energije gibanja tekočine, se pri gibanju tekočine spreminja zato, ker v gibajoči se volumen doteča (ali pa iz njega odteka) energijski tok z gostoto $p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$.

Če sedaj od zgornje enačbe odštejemo še ustrezne člene za statičen primer podan z $p = p_0$, potem sledi, da je gostota zvočne energije, ki je seveda kar enaka celotni energiji, v sevalnem območju akustičnega sevanja enaka

$$w = \frac{1}{2} \rho v^2 + \int_0^\rho \frac{(p - p_0)d\rho}{\rho}, \quad (26)$$

medtem ko je gostota energijskega toka zvočnega valovanja podana z

$$\mathbf{j} = (p - p_0)\mathbf{v}. \quad (27)$$

V sevalnem približku tudi, kot že vemo, velja En. 22, in zato dobimo Eulerjevo enačbo v obliki

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (28)$$

kjer smo po predpostavki zopet zanemarili viskoznost in nelinearne člene v hitrosti. Zgornjo enačbo razpišemo kot

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \cong \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \cong \frac{x_i}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (29)$$

katere rešitev je podana z

$$\mathbf{v} \cong \frac{(p - p_0)}{\rho_0 c_0} \mathbf{n} \quad (30)$$

kjer je \mathbf{n} že prej definirani smerni vektor. Gostoto toka zvočne energije lahko potemtakem zapišemo kot

$$\mathbf{j} = (p - p_0) \mathbf{v} = \frac{(p - p_0)^2}{\rho_0 c_0} \mathbf{n}. \quad (31)$$

Sedaj ko vemo, kako se gostota energijskega toka izaža z akustičnimi polji, lahko v sevalnem področju potemtakem celotno moč akustičnih izvorov zapišemo v obliki

$$\mathcal{P} = \oint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint \frac{c_0^3(\rho - \rho_0)^2}{\rho_0} dS = \oint \frac{(p - p_0)^2}{\rho_0 c_0} dS. \quad (32)$$

To je hkrati tudi osnovna enačba, ki jo potrebujemo za to, da bi izračunali izsevano moč v Lighthillovi analogiji. Če iz retardirane rešitve Lighthillove enačbe izluščimo sevalni del akustičnih polj, lahko s pomočjo zgornje enačbe izaračunamo, koliko energije na časovno enoto odnese akustično sevanje. Toliko o osnovnih pojmih akustike, sedaj pa se povrnimo nazaj k Lighthillovi enačbi in njenim rešitvam.

6 Lighthillov ” v^8 “ zakon

Kar nas čaka sedaj je, da združimo skupaj retardirano rešitev Lighthillove enačbe, ki opisuje oddaljena akustična polja, in pa definicijo celotne izsevane moči, ki smo jo izpeljali ravnokar. To nam bo omogočilo, da bomo celotno izsevano moč povezali z lastnostmi turbulentnih izvorov, ki jih vsebujejo komponente Lighthillovega tenzorja. Lotimo se tega načrta.

Privzemimo, da Lighthillov tenzor določajo prostorsko omejeni turbulentni izvori, ki jih popišemo z različno velikimi turbulentnimi vrtinci. V skladu s Kolmogorovim [1] vpeljemo značilno hitrost v in pa dimenzijo ℓ turbulentnega vrtinca. Statistične fluktuacije hitrosti v različnih delih turbulentnega toka, ki so med seboj oddaljeni za več kot ℓ vzamemo za neodvisne.

Torej predpostavimo, da turbulentni tok v volumnu V_0 generira V_0/ℓ^3 med seboj nedvisnih turbulentnih vrtincev. To pomeni, da lahko v volumskem integralu v enačbi En. 24 integriramo po vsakem vrtincu posebej in pri integralu ustreznno centriramo koordinatni sistem na ta vrtinec. Velikost volumskega integrala po enem vrtincu je potemtakem

$$\int_V \rho_0 v_i(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}) v_j(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}) d^3 \mathbf{r}' \sim \rho_0 v^2 \ell^3. \quad (33)$$

Velikostni red časovnega odvoda je ob identičnih predpostavkah $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{v}{\ell}$. Za celoten sistem V_0/ℓ^3 turbulentnih vrtincev tako dobimo

$$(\rho - \rho_0) \sim \frac{V_0}{\ell^3} \times \frac{1}{4\pi c_0^4 r} \times \left(\frac{v}{\ell}\right)^2 \times \rho_0 v^2 \ell^3 = \frac{V_0}{\ell^3} \frac{\ell \rho_0 v^4}{4\pi c_0^4 r}. \quad (34)$$

V tej sliki torej vsak od V_0/ℓ^3 med seboj neodvisnih turbulentnih vrtincev prispeva k celotni akustični moči člen

$$\mathcal{P}_\ell = \oint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{c_0^3(\rho - \rho_0)^2}{\rho_0} 4\pi r^2 = \frac{c_0^3}{\rho_0} \left(\frac{\ell \rho_0 v^4}{4\pi c_0^4 r} \right)^2 4\pi r^2 = \frac{\ell^2 \rho_0 v^8}{4\pi c_0^5}. \quad (35)$$

Celotna izsevana akustična moč turbulentnih izvorov je potem takem

$$\mathcal{P} \cong \frac{V_0}{\ell^3} \mathcal{P}_\ell = \frac{\rho_0 v^8}{4\pi \ell c_0^5} V_0 = \frac{\rho_0 c_0^3}{4\pi \ell} M^8 V_0. \quad (36)$$

To je znameniti **Lighthillov "v⁸" zakon** [4], ki podaja celotno izsevano akustično moč turbulentnih izvorov. M je Machovo število oz. razmerje v/c_0 . Izsevana akustična moč torej narašča z osmo potenco lokalnih turbulentnih hitrosti v akustičnem izvoru.

Ocenimo še velikost akustične emisije turbulentnih izvorov. Energija, ki jo moramo na časovno enoto dovajati zunanjim izvorom, da poganjajo turbulentne vrtince, mora biti velikostnega reda

$$\mathcal{P}_0 \cong \frac{v}{\ell} \frac{1}{2} \rho_0 v^2 V_0. \quad (37)$$

Izkoristek turbulentne akustične emisije η , definiran kot razmerje med izsevano akustično močjo in celotno močjo, ki je potrebna za vzdrževanje turbulentnega toka izvorov, lahko torej ocenimo kot

$$\eta \sim \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \sim M^5. \quad (38)$$

Za Machova števila, ki so manjša od 0.4, kar je realistična ocena za običajne turbulentne izvore, ima akustična emisija izkoristek manj kot 1%. Lighthill je prvi ocenil, da akustična emisija turbulentnih izvorov predstavlja le zelo majhen delež celotne energije ujetne v turbulentno gibanje. Lighthillov pristop je pomembno prispeval k teoriji hrupa v letalstvu in aerodinamiki na splošno.

Kljub temu, da je izsevana akustična energija relativno majhna v primeri s celotno energijo gibanja tekočine, pa je po absolutni vrednosti lahko še vedno zelo velika. Doslej največji hrup (ločimo seveda med hrupom in pokom), ki ga je proizvedel človek (še vedno precej patetično v primerjavi s tem, kar zmore Narava), je hrup ob vzletu rakete Apollo IV. Modul Apollo IV je poganjala raketa Saturn V, s petimi F1 raketnimi motorji, z izstopno hitrostjo plinov okrog 3000 m/s (prva stopnja 2989.1 m/s, druga in tretja

stopnja 4177.6 m/s). Velika izstopna hitrost plinov v raketnih motorjih je pri vzletu povzročila potresne valove, merljive celo v zvezni državi New Jersey, ki je 1400 km oddaljena od izstrelitelja v Cape Canaveralu na Floridi. Akustični hrup pri vzletu, ki ga je generiral turbulentni tok izstopnih plinov petih raketnih motorjev pa je povzročil hrup z jakostjo okrog 200 dB² celo na razdalji nekaj sto metrov³! Lighthillov ” v^8 ” zakon!

Izjemno močan hrup pogorilcev⁴ pri reakcijskih letalskih motorjih, ki dodatno pospešijo izpušne pline potem, ko že oddajo večino svoje energije reakcijski turbini, je posledica velike hitrosti plinov med izstopom iz turbine in izstopno šobo reakcijskega motorja, kjer se tudi vnovič dodaja pogonsko gorivno zmes. Zaradi te velike hitrosti in pa Lighthillovega ” v^8 ” zakona se za nekaj velikostnih redov poveča hrup reakcijskega motorja s prižganimi pogorilci. V civilnem letalstvu so zato le-ti prepovedani.

7 Zaključno modrovanje

Uspelo nam je torej izračunati, kakšno akustično moč oziroma kako močan hrup, seva gibanje tekočine, ki ga opišemo z lokalizirano, torej prostorsko omejeno turbulentco. Primerov takega gibanja imamo v Naravi in vsakdanjem življenju veliko. Lighthill je pokazal, da je moč tega hrupa precej manjša od celotne moči, ki se veže na turbulentno gibanje. Turbulentni hrup je torej v splošnem šibak. Kljub temu pa zelo hitro raste s tipično hitrostjo turbulentnega gibanja, ki ga povzroča. Ni seveda nobenega pametnega razloga, da ta hitrost ne bi mogla biti nadzvočna in mnogokrat tudi je. V tem primeru je turbulentni hrup lahko precej impresiven in ga tudi zlahka zaznamo. Kako pa vemo, kdaj imamo opravka s turbulentnim hrupom in kdaj le-ta nastaja na kakšen drug način? Da bi odgovorili na to vprašanje se moramo najprej posvetiti frekvenčnemu spektru turbulentnega hrupa, kar bomo storili v drugem delu tega prispevka.

References

- [1] R. Podgornik *Mehanika kontinuov* (pisni materiali za študente, <http://www-f1.ijs.si/rudi/self/kontinui.html>, 2005).
- [2] R. Podgornik *Elektromagnetno polje* (pisni materiali za študente, <http://www-f1.ijs.si/rudi/self/emp.html>, 2005).
- [3] M.S. Howe *Theory of Vortex Sound* (Cambridge University Press, Cambridge) (2003).

² $dB = 10 \log_{10}(P/P_0)$, kjer je P akustični povprečni tlak, $P_0 = 2 \times 10^{-6} N/m^2$.

³Za primerjavo: v diskovem klubu je akustični hrup dobre rock zasedbe približno 100 dB.

140 dB pa je največji industrijsko dovoljen hrup **z uporabo** ustrezne zaščite.

⁴angl.: afterburners

- [4] M.J. Lighthill, *On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory*, *Proc. Roy. Soc. London A* **211** (1952) 564-587. M.J. Lighthill, *On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound*, *Proc. Roy. Soc. London A* **211** (1954) 1-32.
- [5] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence* , (The MIT Press, Boston, Mass, 1972)