

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
ODDELEK ZA FIZIKO

# Mehurčki v zvočnem polju: Bjerknesove interakcije

## Seminar

Avtor: Nika Oman  
Mentor: prof. dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, september 2008

### Povzetek

Zvočno polje povzroči volumske oscilacije mehurčka v tekočini; zaradi gradienta tlačnega polja se pojavi primarna Bjerknesova sila, ki povzroči translacijsko gibanje mehurčka. Opisali bomo odziv sferičnega mehurčka na časovno spremenljivo tlačno polje v nestisljivi tekočini in v približku majhnih amplitud oscilacij izračunali primarno Bjerknesovo silo. Sekundarna Bjerknesova sila je posledica dodatne spremembe tlačnega polja okoli mehurčka zaradi volumskih oscilacij. Velikost in predznak sile sta odvisna od lastnosti mehurčkov in vzbujevalnega zvočnega polja. V modelu brez upora raziščemo značilnosti relativnega gibanja za sistem dveh mehurčkov.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Primarna Bjerkneseva sila</b>	<b>1</b>
2.1	Rayleigh - Plessetova enačba . . . . .	2
2.2	Sila v približku majhnih amplitud . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Sekundarna Bjerkneseva sila</b>	<b>6</b>
3.1	Tlačno polje nihajočega mehurčka in sila med dvema mehurčkoma . . . . .	6
3.2	Klasifikacija parov mehurčkov . . . . .	7
3.3	Model sklopitve sistema dveh mehurčkov . . . . .	8
3.4	Enačbe gibanja sistema dveh mehurčkov . . . . .	8
3.4.1	Dinamika ne-resonančnega sistema dveh mehurčkov . . . . .	10
3.4.2	Dinamika resonančnega sistema dveh mehurčkov . . . . .	13
3.5	Primerjava eksperimentalnih podatkov z napovedjo modela . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Zaključek</b>	<b>17</b>

# 1 Uvod

Bjerknesove interakcije je skupno ime za sile, ki delujejo na zračne mehurčke v tekočini, ki jo vzbujamo z zvočnim poljem. Leta 1906 sta pojav prva raziskala C. A. Bjerknes in njegov sin V. F. K. Bjerknes, po katerih je interakcija dobila ime. Opazila sta, da stoječe zvočno valovanje vzbudi nihanje mehurčka, ki povzroči gibanje proti maksimumu/minimumu tlaka ali proti vozlišču stoječega vala. Ta vpliv tlačnega gradienta na gibanje mehurčka imenujemo primarna Bjerknesova sila. Smer sile je odvisna od razmerja lastne frekvence nihanja mehurčka in frekvence vzbujevalnega zvočnega valovanja. Zaradi oscilacij mehurčkov se spremeni tlačno polje tako, da se, poleg translacijskega gibanja, med posameznimi mehurčki pojavi privlačna ali odbojna sila - sekundarna Bjerknesova sila. Bjerknes je pojasnil pojav obeh, primarnih in sekundarnih sil, s principom "kinetičnega vzgona". Ta pravi, da je vsako telo, ki se giblje v pospešeni tekočini, pod vplivom kinetičnega vzgona, ki je sorazmeren produktu pospeška tekočine  $a$  in mase tekočine, ki jo telo izpodrine  $F_B \sim a\rho V$ .

Pojav je bil od svojega odkritja deležen veliko eksperimentalnih in teoretičnih obravnav. Primarno Bjerknesovo silo je opazoval že Bjerknes in postavil tudi teoretične temelje razlage, zadovoljiv matematični opis pa je doživela z uvedbo Rayleigh-Plessetove enačbe. Kornfeld in Suvorov (1944) sta pri svojih poskusih opazovala interakcijo med mehurčki, ki so se včasih zaradi privlaka združevali, včasih odbijali, poročata pa tudi o t.i. "plešočih mehurčkih", ki se gibljejo po nenavadnih "cik-cakastih" trajektorijah [3]. Prve matematične modele teh pojavov so predstavili Kapustina (1970), Crum (1975), Prosperetti (1977) in drugi, podrobnejšo obravnavo pa sta z uporabo Lagrangeovega formalizma podala Barbat in Ashgriz (1999, 2004). Nekaj primerov njenih izračunov bom predstavila v tem seminarju.

Bjerknes je s svojim odkritjem dinamike nihajočih teles v tekočini želel razložiti tudi dinamiko v elektromagnetnem in gravitacijskem polju. Analogija se je zdela verjetna, saj so vse sile linearno odvisne od radija telesa in padajo s kvadratom razdalje od središča. Razlaga z nihajočimi telesi ni bila uspešna; čeprav je analogija s Keplerjevim problemom dveh teles koristna pri matematični obravnavi gibanja dveh mehurčkov, pa se samo gibanje in parametri, ki ga določajo, od gravitacijskega primera razlikujejo.

## 2 Primarna Bjerknesova sila

Zvočno polje povzroči volumske oscilacije mehurčka v tekočini. Če je tlačni gradient tega zvočnega polja neničelen, se pojavi sklopitev z oscilacijami mehurčka, kar povzroči translacijsko silo na mehurček. To je primarna Bjerknesova sila, njena smer pa je odvisna od velikosti (radija) mehurčka. Resonančni radij je radij mehurčka, ki ob dani frekvenci zvočnega polja povzroči volumske oscilacije, ki so v resonanci z zvočnim poljem. V polju stoječih zvočnih valov se mehurčki z manjšim radijem od resonančnega zbirajo v zgoščinah/redčinah, mehurčki z večjim radijem pa v vozliščih stoječega vala.

Na telo z volumnom  $V$  v tekočini pod vplivom tlačnega gradienta  $\nabla p$  deluje sila  $\vec{F} = -V\nabla p$ . Če se ti dve količini spreminjata s časom (oscilirata), je rezultanta sil na telo časovno povprečje sile  $\vec{F}$ .

$$\vec{F} = -\langle V(t)\nabla p(t) \rangle \quad (2.1)$$

Odziv sferičnega mehurčka na časovno spremenljivo tlačno polje v nestisljivi tekočini opisuje Rayleigh-Plessetova enačba, ki jo lahko izpeljemo iz energijskega ravnovesja sistema [6].

## 2.1 Rayleigh - Plessetova enačba

V nestisljivi viskozni tekočini, ki jo vzbujamo s časovno spremenljivim tlačnim poljem  $p(t)$ , naj oscilira sferični mehurček z ravnovesnim radijem  $R_0$ . Hitrost nestisljive tekočine  $u(r, t)$  pada s kvadratom razdalje  $r$ :

$$u(r, t) = \frac{R^2(t)}{r^2(t)} \dot{R}(t),$$

kjer je  $R(t)$  radij mehurčka in  $\dot{R}(t)$  hitrost stene mehurčka. Ko se radij mehurčka spremeni z ravnovesne vrednosti  $R_0$  na neko novo vrednost  $R(t)$ , se zaradi razlike tlaka v središču mehurčka in tlaka, ki bi bil na tem mestu, če mehurčka ne bi bilo, opravi delo na mehurčku. Za vrednost tlaka na mestu mehurčka v primeru njegove odsotnosti vzamemo vrednost  $p_\infty = p_0 + p(t)$  tlaka v tekočini zelo daleč od mehurčka. Razlika med tem delom in delom tlaka ob zunanji meji mehurčka  $p_L$ , je enaka kinetični energiji tekočine  $\Phi_{KE}$ :

$$\Phi_{KE} = \frac{1}{2} \rho_0 \int_R^\infty u^2 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho_0 R^3 \dot{R}^2, \quad (2.2)$$

kjer je  $\rho_0$  gostota tekočine (kostanta),  $r$  pa radialna koordinata. To izenačimo z razliko dela:

$$\int_{R_0}^R (p_L - p_\infty) 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho_0 R^3 \dot{R}^2, \quad (2.3)$$

Če je hidrostatski tlak v tekočini s površinsko napetostjo  $\gamma$  enak  $p_0$ , je tlak znotraj mehurčka z radijem  $R_0$  v tej tekočini enak  $p_0 + (2\gamma/R_0)$ . Tlak plina (ne pare) v mehurčku je potem  $p_0 + (2\gamma/R_0) - p_v$ , kjer je  $p_v$  parni tlak. Ob spremembi hidrostatskega tlaka na  $p_\infty$ , se bo radij mehurčka spremenil na  $R$ , tlak znotraj mehurčka pa bo, ob predpostavki idealnega plina, enak:

$$\left( p_0 + \frac{2\gamma}{R_0} - p_v \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa},$$

kjer je  $\kappa$  politropni koeficient (za adiabatne spremembe je to adiabatni koeficient). Upoštevamo še viskoznost tekočine ( $\eta$ ) in tlak v tekočini tik ob površini mehurčka zapišemo kot:

$$p_L = \left( p_0 + \frac{2\gamma}{R_0} - p_v \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - \frac{2\gamma}{R} - \frac{4\eta\dot{R}}{R}. \quad (2.4)$$

Dobljeni izraz (2.4) vstavimo v enačbo (2.3), jo odvajamo po  $R$ , kjer upoštevamo:

$$\frac{\partial \dot{R}^2}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{R}^2}{\partial t} = 2\ddot{R}.$$

Dobimo Rayleigh-Plessetovo enačbo, ki opisuje oscilacije radija mehurčka zaradi tlačnega gradienta:

$$p_L - p_\infty = \rho_0 \left( R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right),$$

oz., če razpišemo razliko tlakov:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_0} \left[ \left( p_0 + \frac{2\gamma}{R_0} - p_v \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - \frac{2\gamma}{R} - \frac{4\eta\dot{R}}{R} - p_0 - p(t) \right]. \quad (2.5)$$

V približku majhnih amplitud se enačba (2.5) dovolj poenostavi, da lahko raziščemo obnašanje nihajočih mehurčkov.

## 2.2 Sila v približku majhnih amplitud

Oblika časovno spremenljivega tlaka naj bo kosinusna z amplitudo  $A$  in krožno frekvenco  $\omega$ :

$$p(t) = A \cos(\omega t).$$

Če zanemarimo viskoznost in parni tlak ter predpostavimo majhne amplitude nihanja mehurčka, se enačba (2.5) poenostavi in dobimo rešitev za harmonične oscilacije radija mehurčka:

$$R(t) = R_0(1 + \epsilon \cos(\omega t + \phi)),$$

kjer definiramo odzivno amplitudo  $\epsilon$  in odzivni fazni zamik  $\phi$  [3]:

$$\epsilon = \frac{A}{\rho_0 \omega_0^2 R_0^2 \left[ (q^2 - 1)^2 + 4\delta^2 q^2 \right]^{1/2}}, \quad (2.6)$$

$$\phi = \arctg \left( \frac{2\delta q}{q^2 - 1} \right). \quad (2.7)$$

$\omega_0$  je resonančna frekvenca mehurčka in je odvisna od ravnovesnega radija mehurčka  $R_0$ ,  $q$  pa je frekvenčni indeks:

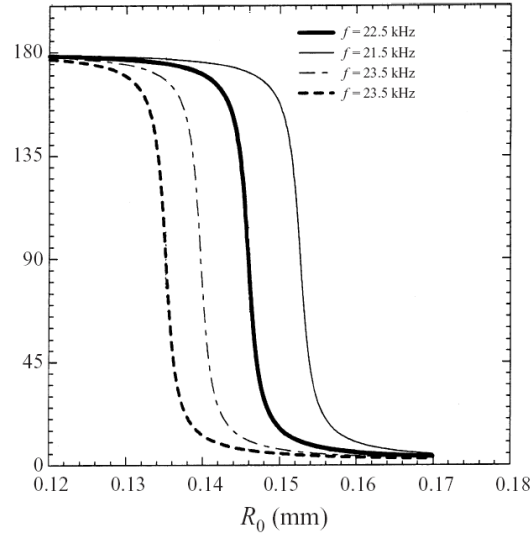
$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_0^2 \rho_0} \left[ 3\kappa \left( p_0 + \frac{2\gamma}{R_0} \right) - \frac{2\gamma}{R_0} \right],$$

$$q = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

$\delta$  je brezdimenzijski koeficient dušenja, ki vsebuje prispevke viskoznosti ter termičnih in akustičnih efektov. Podobno kot  $\omega_0$  lahko ob konstantni frekvenci vzbujevalnega tlačnega polja definiramo resonančni radij  $R_\tau$  (Minnaertov radij), pri katerem je lastna frekvenca mehurčka ravno enaka vzbujevalni frekvenci [5]. Pri obravnavi resonančnega odziva sistema navadno spreminjamo frekvenco vsiljenega nihanja in nato opazujemo odziv sistema. V našem primeru pa bo vsiljena frekvenca konstantna, opazovali pa bomo resonančni odziv mehurčkov v odvisnosti od njihovega radija. Oscilacije mehurčkov ustrezajo rezultatom vsiljenega harmoničnega nihanja. Fazni odziv oscilacij mehurčka je prikazan na Sliki 1. Če je resonančna frekvenca mehurčka, kot jo po zgornji enačbi določa njegov radij, dosti večja od vzbujevalne frekvence tlačnega polja, bo mehurček osciliral z enako fazo kot vzbujevalno polje. Dosti manjši mehurčki - z višjo resonančno frekvenco - pa bodo oscilirali s faznim zamikom  $\pi$  glede na tlačno polje. Ravno to pa je vzrok za osnovni rezultat primarne Bjerkneseve sile: sila  $\vec{F} = -\langle V(t) \nabla p(t) \rangle$  kaže v eno smer za mehurčke z ravnovesnim radijem  $R_0 < R_\tau$  in v drugo za mehurčke z ravnovesnim radijem  $R_0 > R_\tau$ .

Imejmo polje stoječega valovanja  $p(y, t)$  [2]:

$$p(y, t) = p_0 + 2A \sin(ky) \cos(\omega t),$$



**Slika 1:** Fazna razlika oscilacij mehurčka glede na vzbujevalno polje v odvisnosti od ravnovesnega radija pri različnih vzbujevalnih frekvencah  $f$  [3].

potem je

$$\nabla p(y, t) = 2kA \cos(ky) \cos(\omega t). \quad (2.8)$$

Mehurček naj se nahaja v tem polju na mestu  $y$  in če je  $2A \ll p_0$ , bo mehurček osciliral linearno:

$$R(t) = R_0 (1 - \xi \cos(\omega t + \phi)).$$

Negativni predznak smo vzeli, ker pozitivni zvočni tlak povzroči zmanjšanje volumna (radija), ko nihata z isto fazo. Amplituda oscilacij radija  $\xi$  sledi oscilacijam tlačnega polja:

$$\xi = \epsilon \sin(ky).$$

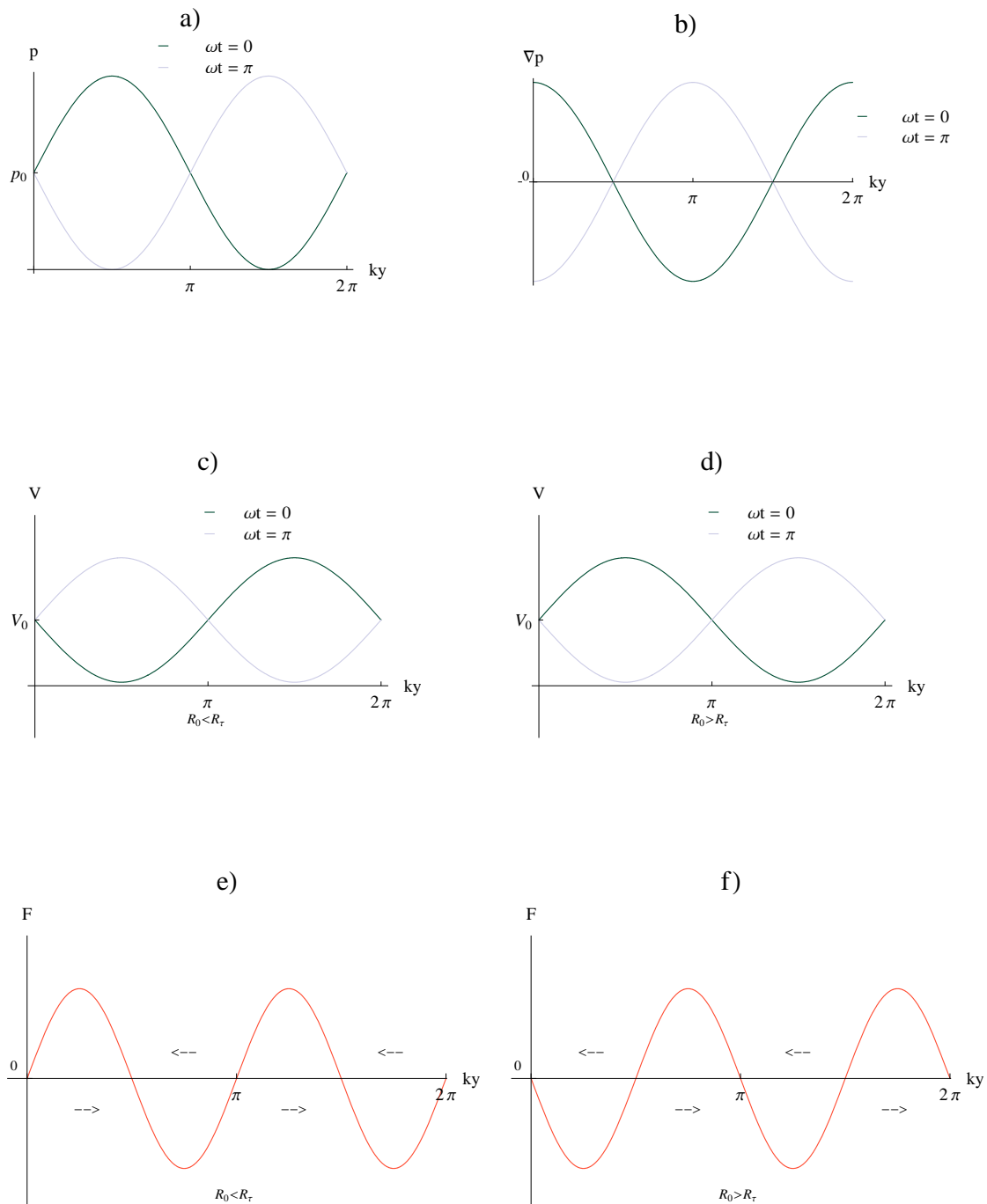
Volumen mehurčka  $V(t) = 4\pi R(t)^3/3$  lahko iz enačbe za  $R(t)$  aproksimiramo do prvega reda  $\epsilon$ :

$$V(t) = V_0 \left( 1 - \frac{3\epsilon}{R_0} \sin(ky) \cos(\omega t + \phi) \right), \quad (2.9)$$

kjer je  $V_0 = 4\pi R_0^3/3$ . Sedaj lahko vstavimo izraza (2.8) in (2.9) v enačbo (2.1) in dobimo izraz za primarno Bjerknesovo silo:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2R_0} [3AkeV_0 \sin(2ky)]; R_0 < R_\tau (\phi = 0), \\ F &= -\frac{1}{2R_0} [3AkeV_0 \sin(2ky)]; R_0 > R_\tau (\phi = \pi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Grafično so poteki funkcij prikazani na Sliki 2.



**Slika 2:** Na grafu a) je prikazan zvočni val  $p$  (ob dveh različnih časih -  $\omega t$ ), graf b) prikazuje  $\nabla p$ ; grafični prikaz oscilacij volumna mehurčka za primera  $R_0 < R_\tau$  - slika c) in  $R_0 > R_\tau$  - slika d); na slikah e) in f) je prikazana sila na mehurček, še dodatno pa je označena smer sile v posameznih območjih. Če zadnja dva grafa primerjamo s sliko a), se lepo vidi, da manjši mehurčki ( $R_0 < R_\tau$ ) potujejo proti maksimu/minimu tlaka, večji ( $R_0 > R_\tau$ ) pa proti vozliščem. Grafi narisani po vzoru [2].

### 3 Sekundarna Bjerkneseva sila

Obravnavali bomo sistem dveh mehurčkov v tekočini pod vplivom zvočnega polja. Kot smo že videli, zvočno polje v tekočini povzroči oscilacije mehurčka, ki se nahaja v njej. Zaradi teh oscilacij se dodatno spremeni tlačno polje, ki ga čuti drugi mehurček (prav tako prvi mehurček čuti spremenjeno polje zaradi nihanja drugega), zato se med njima pojavi sila. Osnovni izvor sile je še vedno vsiljeno zvočno polje, vendar jo, ker je interakcija med dvema mehurčkoma posledica 'sekundarnih' valov, ki jih povzročajo njune oscilacije, imenujemo *sekundarna Bjerkneseva sila*.

Zgodnje teoretične obravnave sekundarne Bjerkneseve sile (Kapustina - 1970) so predvidevale le privlak med dvema mehurčkoma. Uporaba Lagrangeovega formalizma (Zabolotskaya - 1984) so pokazale, da je sila lahko tudi odbojna in da celo med gibanjem obrne znak, če mehurčke vzbujamo s frekvenco, ki se le malo razlikuje od njunih resonančnih frekvenc.

Sprememba tlačnega polja, ki jo povzroči nihajoč mehurček, povzroči spremembo v fazi in amplitudi oscilacij mehurčka, ker pa bo sila odvisna od razdalje mehurčkov, se z razdaljo tudi ti parametri spreminjajo; to lahko vodi v obrat predznaka sile in tudi gibanje obrne smer. Obnašanje se lahko ponavlja in dobimo nov vzorec gibanja, translacijske oscilacije. Skupno imamo torej tri različne vzorce gibanja v binarnem sistemu mehurčkov, ki jih povzroči sekundarna Bjerkneseva sila: odboj, privlak in translacijske oscilacije. Pri opisu dinamike sistema dveh mehurčkov se bomo omejili na gibanje vzdolž zveznice njunih središč in proučili pogoje, ki vodijo v različne vzorce gibanja.

#### 3.1 Tlačno polje nihajočega mehurčka in sila med dvema mehurčkoma

Imejmo mehurček v nestisljivi tekočini, ki niha tako, da njegova oblika ostaja ves čas sferična. Sekundarno tlačno polje  $p'(r, t)$ , ki ga povzročijo oscilacije tega mehurčka je (Prosperetti - 1984):

$$p'(r, t) \approx -\frac{\rho_0 \omega^2 R_0^3 \epsilon}{r} \cos(\omega t + \phi), \quad (3.1)$$

Predpostavili smo majhne amplitude nihanja in tlačno polje zapisali le do prvega reda  $\epsilon$ . Odzivno amplitudo  $\epsilon$  in odzivno fazo  $\phi$  smo ob istih predpostavkah iz Rayleigh-Plessetove enačbe izračunali pri obravnavi primarne Bjerkneseve sile in ju podajata enačbi (2.6) in (2.7). Amplituda in faza vsote prispevkov primarnega in sekundarnega tlačnega polja imata radialno prostorsko odvisnost. Ko pa se fazna razlika dovolj približa eni izmed mejnih vrednosti (0 ali  $\pi$ ), pa ta odvisnost faze izgine in je od radialne komponente odvisna le še amplituda  $\epsilon$ .

Za mehurčke z ravnovesnim radijem večjim od resonančnega je  $\phi \approx \pi$  in časovno spremenljivo tlačno polje okoli mehurčka je enako:

$$p(r, t) \approx \left( A + \frac{\rho_0 \omega^2 R_0^3 \epsilon}{r} \right) \cos(\omega t); R_0 > R_\tau (\phi = \pi), \quad (3.2)$$

za manjše mehurčke s  $\phi \approx 0$  pa je časovno spremenljivo tlačno polje:

$$p(r, t) \approx \left( A - \frac{\rho_0 \omega^2 R_0^3 \epsilon}{r} \right) \cos(\omega t); R_0 < R_\tau (\phi = 0). \quad (3.3)$$

Silo prvega mehurčka (indeks 1) na drugi mehurček (indeks 2) izračunamo po znani formuli:

$$\mathcal{F} = -\langle V_2(t) \nabla p_1'(t) \rangle.$$



V gornji izraz vstavimo tlačno polje, ki ga podaja enačba (3.1) z ustreznimi količinami za mehurček 1 ( $R_{01}, \epsilon_1, \phi_1$ ) in povprečimo po času. Tako dobimo izraz za sekundarno Bjerknesevo silo:

$$\mathcal{F}_{12} = -\frac{2\pi\rho_0\omega^2 R_{01}^3 R_{02}^3}{r^2} \epsilon_1 \epsilon_2 \cos\phi \Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \phi), \quad (3.4)$$

kjer je  $\phi$  fazna razlika med oscilacijami obeh mehurčkov  $\phi = \phi_2 - \phi_1$ ,  $\Psi$  pa je:

$$\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \phi) = 1 - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\cos\phi} + \frac{1}{4} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) + 2\epsilon_1 \epsilon_2 \cos\phi + \mathcal{O}(\epsilon_1^i \epsilon_2^j); i + j \geq 3. \quad (3.5)$$

Izkaže se [3], da moramo pri sili upoštevati člene višjih redov  $\epsilon$ , saj nam da linearna aproksimacija ničelno silo med mehurčkoma. S členi do vključno drugega reda  $\epsilon$  dobro opišemo le silo med mehurčkoma z lastnima frekvencama daleč od vzbujevalne frekvence ( $\phi_i = 0$  ali  $\phi_i = \pi$ ), takrat je  $\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \phi) \approx 1$ . Polje sile je v tem primeru enako:

$$\mathcal{F}_{12} = -\frac{2\pi\rho_0\omega^2 R_{01}^3 R_{02}^3}{r^2} \epsilon_1 \epsilon_2 \cos\phi. \quad (3.6)$$

Za opis sile med mehurčkoma z medsebojno fazno razliko  $\phi \approx \pi/2$  oz., ko je  $\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \phi) \approx 1 - \epsilon_1 \epsilon_2 / \cos\phi$ , pa iz enačbe (3.4) dobimo naslednjo aproksimacijo polja sile [3]:

$$\mathcal{F}_{12} = -\frac{2\pi\rho_0\omega^2 R_{01}^3 R_{02}^3}{r^2} \epsilon_1 \epsilon_2 (\cos\phi - \epsilon_1 \epsilon_2). \quad (3.7)$$

Sekundarno tlačno polje spremeni porazdelitev tlaka okoli obeh mehurčkov in amplituda efektivnega vzbujanja se spreminja z njuno medsebojno razdaljo. To vodi v spremembo odziva amplitud  $\epsilon_i$  in faz  $\phi_i$  obeh mehurčkov in tudi razlika  $\cos\phi - \epsilon_1 \epsilon_2$  se spreminja z medsebojno razdaljo  $r$ ; ta odvisnost je odgovorna za pojav translacijskih oscilacij.

### 3.2 Klasifikacija parov mehurčkov

Da bi lažje prepoznali pogoje, ki vodijo v različne vzorce gibanja, razdelimo pare mehurčkov v več razredov. Iz enačbe (3.4) vidimo, da bomo gibanje klasificirali glede na fazno razliko med oscilacijami mehurčkov  $\phi$ . Smiselna klasifikacija sistemov dveh mehurčkov vsebuje naslednje tri razrede [3]:

1. *Ne-resonančni par*:  $\phi_1$  in  $\phi_2$  sta oba daleč od  $\pi/2$  ( $q_1$  in  $q_2$  sta daleč od vrednosti 1). V tem primeru je dovolj, da upoštevamo izraz za silo do drugega reda  $\epsilon$  in enačba (3.6) dobro popiše interakcijo. Možna rezultata sta privlak in odboj mehurčkov, ne obstaja pa ravnovesna vrednost  $r$ .
2. *Resonančni par*: ena faza je blizu  $\pi/2$  (npr.  $\phi_1 \approx \pi/2$ ,  $q_1 \approx 1$ ), druga pa se bliža  $\pi$  ( $\phi_2 \approx \pi$ ,  $q_2 < 1$ ),  $R_{01}$  in  $R_{02}$  pa imata podobni vrednosti ( $R_{01} \approx R_{02}$ ). V tem primeru je fazna razlika  $\phi \approx \pi/2$  in  $\cos\phi \sim \mathcal{O}(\epsilon_1 \epsilon_2)$  in pri opisu interakcije uporabimo izraz (3.7). Amplituda tlačnega polja okoli mehurčka 1 se povečuje s padanjem razdalje med mehurčkoma, večja se tudi odzivna amplituda  $\epsilon_1$ . Pod določenimi pogoji se gibanje prične z medsebojnim približevanjem, ko pa se člen  $\epsilon_1 \epsilon_2$  povečuje, se interakcija spremeni v odbojno. V tem primeru je možen obstoj stabilne ravnovesne vrednosti  $r$ .
3. *Anti-resonančni par*:  $\phi_1 \approx \pi/2$  ( $q_1 \approx 1$ ),  $\phi_2 \approx 0$ , ( $q_2 > 1$ ),  $R_{01} \approx R_{02}$ . Tudi tu za izračun interakcije uporabimo enačbo (3.7). Z manjšanjem razdalje pa se v tem primeru  $\epsilon_1$  zmanjšuje. Če se gibanje prične s približevanjem, se člen  $\epsilon_1 \epsilon_2$  še zmanjšuje in povzroči

še večji medsebojni privlak. Če pa pričnemo z odbojem, pa večanje člena  $\epsilon_1\epsilon_2$  povzroči še večjo odbojno silo. V tem primeru je možen obstoj labilne ravnovesne vrednosti  $r$ .

### 3.3 Model sklopitve sistema dveh mehurčkov

Ob gornjih spoznanjih glede translacijskega gibanja in oscilacij obeh mehurčkov je smiselno, da namesto dveh sklopljenih Rayleigh-Plessetovih enačb za odziv sistema dveh mehurčkov konstruiramo sklopitveni model, ki poenostavi odziv amplitude oscilacij.

Oscilacije ne-resonančnih mehurčkov so popolnoma neodvisne in količine  $\epsilon_i$  in  $\phi_i$  se ne spreminjajo z razdaljo  $r$ . Ta predpostavka dobro velja za medsebojne razdalje večje od 3-4  $R_0$  [3].

Za resonančne in anti-resonančne mehurčke pa lahko definiramo sklopitveni koeficient  $k_{21}$ , s pomočjo katerega popišemo radialno odvisnost amplitude oscilacij za sekundarno Bjerknesevo interakcijo. Predpostavimo da je faza med gibanjem ves čas konstantna, zato tlačno polje na površino mehurčka 1 deluje z efektivno amplitudo, ki jo podaja enačba (3.2):  $A_{ef} = A + \rho_0\omega^2 R_{02}^3 \epsilon_2 / r$ . Nato s pomočjo enačbe (2.6) zapišemo sklopitveni koeficient in novo amplitudo oscilacij ( $\epsilon_{1s}$ ). Enako uporabimo enačbi (2.6) in (3.3) za opis anti-resonančnih mehurčkov in dobimo:

$$k_{21} = -\frac{\rho_0\omega^2 R_{02}^3 \epsilon_2}{A}, \quad (3.8)$$

$$\epsilon_{1s} = \epsilon_{1\infty} \left( 1 \pm \frac{k_{21}}{r} \right); \begin{cases} + & \text{resonančni par} \\ - & \text{anti-resonančni par,} \end{cases} \quad (3.9)$$

kjer je  $\epsilon_{1\infty}$  amplituda odziva brez sklopitve (pri neskončni razdalji med mehurčkoma) in jo podaja enačba (2.6).

Sedaj lahko sekundarno Bjerknesevo silo zapišemo za posamezne razrede parov mehurčkov:

$$\mathcal{F}_{12}(r) = \mathcal{F}_{21}(r) = -2\pi\rho_0\omega^2 R_{01}^3 R_{02}^3 \Phi(r), \quad (3.10)$$

$$\Phi(r) = \frac{\epsilon_1\epsilon_2 \cos\phi}{r^2}; \quad \text{ne-resonančni par}$$

$$\Phi(r) = \epsilon_{1\infty}\epsilon_2 \left[ \frac{m}{r^2} \mp \frac{nk_{21}}{r^3} \right]; \begin{cases} - & \text{resonančni par} \\ + & \text{anti-resonančni par,} \end{cases}$$

$$m = \cos\phi - \epsilon_{1\infty}\epsilon_2,$$

$$n = 2\epsilon_{1\infty}\epsilon_2 - \cos\phi. \quad (3.11)$$

### 3.4 Enačbe gibanja sistema dveh mehurčkov

Pri obravnavi gibanja sistema dveh mehurčkov v tekočini pod vplivom zvočnega polja se bomo omejili na gibanje vzdolž zveznice njunih središč. Ker za sekundarno Bjerknesevo silo velja  $|\mathcal{F}_{21}| = |\mathcal{F}_{12}|$ , ta ne vpliva na gibanje skupnega težišča. Zanimarimo sile upora, tako da bo sistem konzervativen, oz. da bo eden izmed integralov gibanja kar polna energija sistema. Ta pristop nam omogoči tudi analitične rešitve enačb gibanja. Ocena je [3], da je napaka zaradi

neupoštevanja upora znatna le pri zelo majhni medsebojni oddaljenosti mehurčkov, tam pa tudi naš model sile izgubi veljavnost, zato bo model dober le pri večjih medsebojnih razdaljah.

Da upoštevamo učinek pospešene tekočine, v kateri se sistem mehurčkov nahaja, moramo uvesti t.i. virtualno ali inducirano maso mehurčka, ki je enaka polovici mase tekočine, ki jo mehurček izpodrine. Volumen mehurčka seveda oscilira, a ker je perioda oscilacij majhna v primerjavi s časovno skalo translacijskega gibanja, lahko vzamemo, da je inducirana masa enega mehurčka konstantna in enaka:

$$m_i = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R_{0i}^3. \quad (3.12)$$

Da bi prišli do enačb gibanja, se bomo problema lotili z Lagrangeovim formalizmom. Pomagali si bomo s konceptom reducirane mase, ki ga poznamo iz obravnave Keplerjevega problema dveh teles, kjer uporabimo Lagrangeovo funkcijo za delec z reducirano maso v polju centralne sile. Reducirana masa je definirana kot:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

kjer sta v našem primeru  $m_1$  in  $m_2$  definirani v enačbi (3.12). Če uvedemo še razmerje velikosti mehurčkov  $\Delta = \frac{R_{02}}{R_{01}}$ , se reducirana masa mehurčkov glasi:

$$\mu = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R_{01}^3 \frac{\Delta^3}{1 + \Delta^3}.$$

Lagrangeova funkcija za naš sistem je:

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} - \mathcal{U}.$$

$\mathcal{W} = \mu u^2/2$  je kinetična energija relativnega gibanja,  $u$  pa relativna hitrost mehurčkov.  $\mathcal{U}$  je potencial, ki generira polje centralne sile:

$$\mathcal{F}(r) = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}.$$

Funkcija  $\mathcal{U}(r)$  ima različno obliko za različne razrede parov mehurčkov, kot smo jih klasificirali v prejšnjem poglavju. Za ne-resonančne mehurčke je potencialna energija sorazmerna  $1/r$  in med gibanjem ne more obrniti predznaka:

$$\mathcal{U}(r) = -2\pi\rho_0\omega^2 R_{01}^3 R_{02}^3 \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\cos\phi}{r}; \quad \text{ne-resonančni par} \quad (3.13)$$

Za resonančne in anti-resonančne mehurčke pa ima  $\mathcal{U}(r)$  še dodaten člen sorazmeren  $1/r^2$ , ki je posledica sklopitve oscilacij. Ta člen povzroči možnost obrata predznaka sile in obstoj ravnovesne vrednosti  $r$ .  $\mathcal{U}(r)$  se v tem primeru glasi:

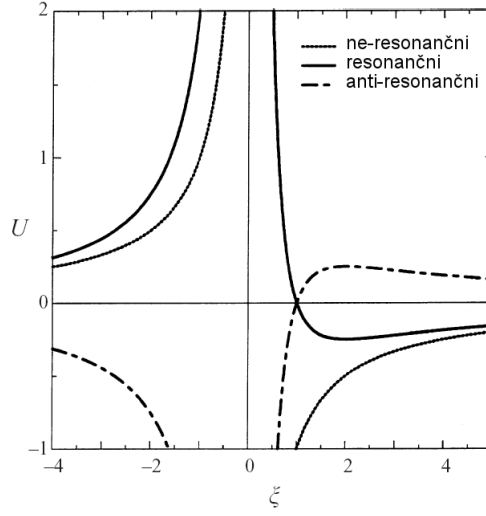
$$\mathcal{U}(r) = -2\pi\rho_0\omega^2 R_{01}^3 R_{02}^3 \epsilon_{1\infty} \epsilon_2 \left[ \frac{m}{r^2} \mp \frac{nk_{21}}{r^3} \right]; \quad \begin{cases} - & \text{resonančni par} \\ + & \text{anti-resonančni par.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Iz Lagrangeove enačbe za naš sistem,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right),$$

dobimo enačbo gibanja za relativno gibanje mehurčkov po zveznici njunih središč:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}. \quad (3.15)$$



**Slika 3:** Potek potenciala  $U(\xi)$  za vse razrede parov mehurčkov [3].

Če uvedemo referenčno razdaljo  $R_{01}$  in referenčni časovni interval  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega$ , lahko prevedemo enačbo (3.15) v brezdimenzijsko obliko. Tako se ta enačba glasi z novima spremenljivkama  $x = r/R_{01}$  in  $\tilde{t} = t/\mathcal{T}$ :

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} = -\frac{\mathcal{K}}{2x^2} + \frac{\mathcal{B}}{x^3}, \quad (3.16)$$

Oblika  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{B}$  je različna za različne razrede sistema dveh mehurčkov.

### 3.4.1 Dinamika ne-resonančnega sistema dveh mehurčkov

Gibanje opisuje enačba (3.16) s koeficientoma  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{B}$  za primer ne-resonančnih mehurčkov:

$$\mathcal{K} = 24\pi^2 (1 + \Delta^3) \epsilon_1 \epsilon_2 \cos\phi,$$

$$\mathcal{B} = 0.$$

Enačbo (3.16) še dodatno preoblikujemo tako, da spremenljivki  $x$  in  $\tilde{t}$  skaliramo s koeficientom  $\mathcal{K}$  in dobimo nelinearno diferencialno enačbo:

$$\xi = \mathcal{K}x,$$

$$\tau = \mathcal{K}^2 \tilde{t},$$

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = -\frac{1}{2\xi^2}.$$

S pomočjo gornje enačbe zapišemo dinamični sistem v kanonični obliki:

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{1}{2\xi^2}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = w. \quad (3.17)$$

Zdaj lahko izpišemo potencialno energijo  $U(\xi) = -1/\xi$  in polno energijo sistema  $E(\xi, w) = U(\xi) + w^2$ . Na Sliki 3 je prikazana potencialna energija za vse razrede. Za ne-resonančne mehurčke funkcija  $U(\xi)$  nima minimov in maksimov, zato za ta sistem ne obstaja ravnovesno stanje. Leva veja potencialne energije ( $\xi < 0$ ) predstavlja odbojno silo ( $\cos\phi < 0$ ), desna pa privlačno silo ( $\cos\phi > 0$ ).

Polna energija je konstantna in jo dobimo iz začetnih pogojev  $\xi_0, w_0$ :

$$E(\xi, w) = E(\xi_0, w_0) = E_0;$$

$$\xi_0 = \mathcal{K}x_0, \quad w_0 = \frac{v_0}{\mathcal{K}} = \frac{v_{20} - v_{10}}{\mathcal{K}},$$

kjer je  $x_0$  začetna razdalja med mehurčkoma,  $v_0$  pa njuna začetna relativna hitrost. Zdaj lahko narišemo trajektorije za ne-resonančne mehurčke pri različnih začetnih pogojih v fazni ravnini  $(\xi, w)$ :

$$w = \pm (E - U)^{1/2} = \pm \left( E + \frac{1}{\xi} \right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Območje možnih vrednosti v faznem prostoru  $(\xi, w)$  je omejeno s pogojem  $r \geq R_{01} + R_{02}$  oz., če to prevedemo v mejno vrednost za  $\xi$ ,  $\xi \geq \mathcal{K}(1 + \Delta)$ .

### Mehurčka enakih velikosti

Na Sliki 4 so prikazane trajektorije v fazni ravnini  $(\xi, w)$  za poseben primer mehurčkov enakih velikosti ( $\Delta = 1$ ).

Negativna polna energija (določena z začetnimi pogoji) vodi v združitev mehurčkov, ne glede na začetno gibanje sistema: približevanje ( $w < 0$ ) ali oddaljevanje ( $w > 0$ ) v prostoru  $(\xi, \tau)$ . Pravo gibanje v realnem prostoru določa še vrednost koeficienta  $\mathcal{K}$ , in sicer približevanje:  $w > 0, \mathcal{K} < 0$ ; oddaljevanje:  $w > 0, \mathcal{K} > 0$ . Pri začetnem pogoju  $w > 0$ , se bosta mehurčka oddaljevala dokler razdalja med njima ne bosegla mejne vrednosti  $\xi_{max} = -1/E$ , nato pa se bosta začela približevati do združitve obeh mehurčkov.

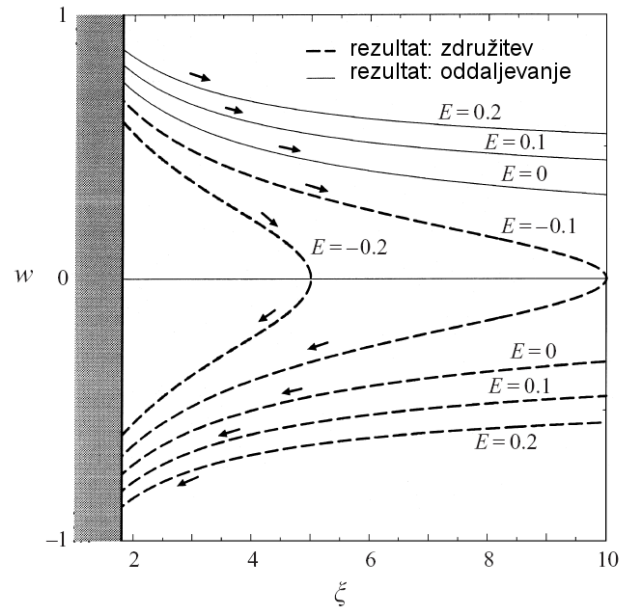
Pozitivna polna energija ( $E \geq 0$ ) vodi v medsebojno oddaljevanje (sipanje), če je začetni pogoj  $w > 0$  in v približevanje in končno združitev, če je na začetku  $w < 0$ .

Definiramo lahko tudi ubežno hitrost, tako da bo pri vsaki začetni razdalji  $x_0 = r_0/R_0$  polna energija sistema enaka 0. Tako bo  $E = 0$  predstavljala minimalno skupno energijo in ubežna hitrost minimalno začetno hitrost, pri katerih gibanje vodi v sipanje kljub privlačni Bjerkesovi sili:

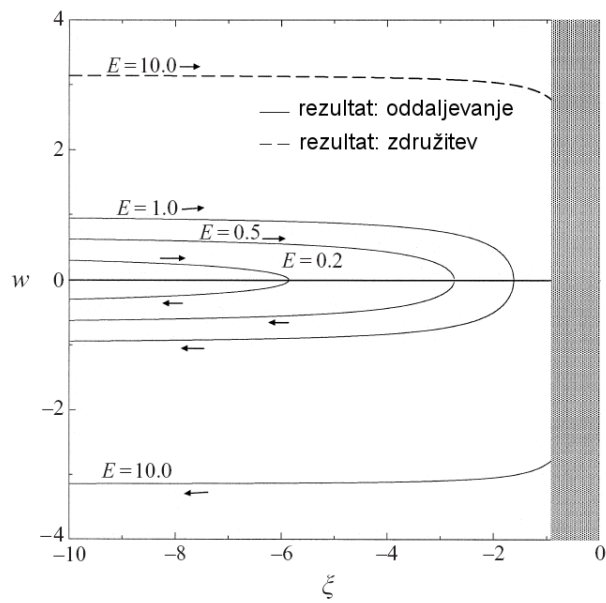
$$v_{ub} = 2\sqrt{3} \frac{\epsilon}{\sqrt{x_0}} \omega R_0;$$

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2, \quad R_0 = R_{01} = R_{02}.$$

Izkaže se [3], da je ubežna hitrost največja, če sistem vzbujamo z akustičnim poljem s frekvenco blizu lastnim frekvencam mehurčkov ( $q \approx 1$ ).



Slika 4: trajektorije v faznem prostoru  $(\xi, w)$  za ne-resonančne mehurčke enakih velikosti [3].



Slika 5: trajektorije v faznem prostoru  $(\xi, w)$  za ne-resonančne mehurčke različnih velikosti [3].

### Mehurčka različnih velikosti

Imamo dva različno velika mehurčka, ki ju vzbujamo z akustičnim poljem tako, da je  $q_1 > 1$  in  $q_2 < 1$ . Za majhne amplitude vzbujevalnega polja se bosta mehurčka odbijala in koeficient  $\mathcal{K}$  bo negativen. Posledično v fazni ravnini  $(\xi, w)$  pridejo v poštev le vrednosti  $\xi < \xi_{lim} = \mathcal{K}(1 + \Delta)$ . V tem primeru je predznak  $\mathcal{K}$  fiksni (negativen) in  $w > 0$  predstavlja oddaljevanje v realnem prostoru,  $w < 0$  pa približevanje.

Slika 5 predstavlja trajektorije, ki smo jih dobili iz enačbe (3.18). Tu so možne le pozitivne vrednosti energije, obstaja pa tudi mejna vrednost energije  $E_m = U(\xi_{lim})$ . Za energije  $0 < E < E_m$  se gibanje konča s sipanjem ne glede na začetno relativno hitrost. Za  $E > E_m$  se bosta ob začetnem približevanju mehurčka združila kljub odbojni Bjerknesevi sili.

Iz mejne vrednosti energije  $E_m$  lahko pri fiksni začetni razdalji  $x_0 = r_0/R_{01}$  izračunamo minimalno relativno hitrost, ki je potrebna za združitve obeh mehurčkov [3]:

$$v_m = -\omega R_{01} \sqrt{6\epsilon_1\epsilon_2} \left[ \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) - \Delta + \Delta^2 - \frac{1}{x_0} \Delta^3 \right]^{1/2}.$$

#### 3.4.2 Dinamika resonančnega sistema dveh mehurčkov

Gibanje opisuje enačba (3.16) s koeficientoma  $\mathcal{K}$  in  $\mathcal{B}$  za primer resonančnih mehurčkov:

$$\mathcal{K} = 24\pi^2 (1 + \Delta^3) m,$$

$$\mathcal{B} = 12\pi^2 \Delta (1 + \Delta^3) \frac{nk_{21}}{R_{02}}.$$

$m$  in  $n$  sta definirana v (3.11). Podobno kot v primeru ne-resonančnih mehurčkov prepisemo enačbo (3.16) v dinamični sistem v kanonični obliki. Spremenljivki  $x$  in  $\tilde{t}$  skaliramo s parametrom  $\sigma$ , ki je razmerje med privlačnimi in odbojnimi silami:

$$\xi = \sigma x,$$

$$\tau = \mathcal{B}\sigma^2 \tilde{t},$$

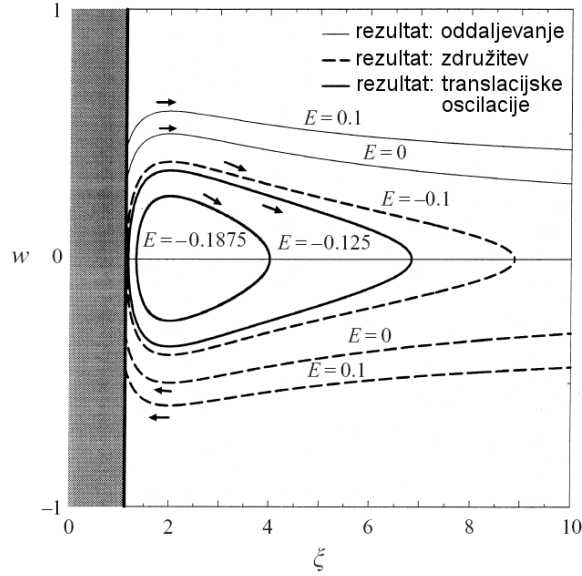
$$\sigma = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{B}},$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi^3} \right].$$

Dinamični sistem se v primeru resonančnega para mehurčkov glasi:

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi^3} \right], \quad \frac{d\xi}{d\tau} = w. \quad (3.19)$$

Potencialna energija je sedaj  $U(\xi) = -1/\xi + 1/\xi^2$  (Slika 3). Polna energija sistema  $E(\xi, w) = U(\xi) + w^2$  je konstantna in jo dobimo iz začetnih pogojev  $(\xi_0, w_0)$ . Gibanje bomo opazovali v območju



**Slika 6:** trajektorije v faznem prostoru  $(\xi, w)$  za resonančne in anti-resonančne mehurčke [3].

$$\epsilon_{1\infty}\epsilon_2 < \cos\phi < 2\epsilon_{1\infty}\epsilon_2, \quad (3.20)$$

saj tu dobimo stabilno ravnovesno vrednost  $r$  in tudi obnašanje sistema v tem območju ustreza našim predpostavkam brez dodatnih omejitev. Na manjših razdaljah od te ravnovesne vrednosti je sila odbojna, na večjih pa privlačna. Izkaže se [3], da dosežemo pogoj (3.20) pri majhnih amplitudah vzbujevalnega polja  $le$ , če sta oba mehurčka (skoraj) enakih velikosti oz. pri  $\Delta \approx 1$ .

Iz pogoja (3.20) sledi, da pri potencialu  $U(\xi)$  (Slika 3) upoštevamo le vejo s pozitivnimi  $\xi$ . Obstoj minima  $U(\xi)$  resonančnih mehurčkov nam zagotavlja stabilno ravnovesno vrednost  $r$ , obstoj maksima  $U(\xi)$  pri anti-resonančnih mehurčkih pa labilno ravnovesno vrednost  $r$ . Polna energija je navzdol omejena z  $E_{min} = -1/4$ , ki ustreza stanju stabilnega ravnovesja v mirovanju za  $\xi_r = 2$ .

S pomočjo relacije

$$w = \pm(E - U)^{1/2} = \pm \frac{(E\xi^2 + \xi - 1)^{1/2}}{\xi} \quad (3.21)$$

narišemo trajektorije v faznem prostoru  $(\xi, w)$  - Slika 6.

### Negativna polna energija sistema

Iz enačbe (3.21) dobimo dve rešitvi  $\xi_1$  in  $\xi_2$  za vsako negativno vrednost polne energije. Razvoj sistema je omejen s tema dvema vrednostima  $\xi_2 < \xi_1$  in trajektorija je sklenjena krivulja v faznem prostoru  $(\xi, w)$ , zato se lahko pojavi periodično gibanje (translacijske oscilacije). Če pa je  $\xi_2 < \xi_{lim}$ , se bosta mehurčka združila v prvem ciklu oscilacij. Pogoj za tak dogodek je:

$$E > \frac{1 - 2\sigma}{4\sigma^2}.$$



Ta pogoj združimo z ostalimi v tej obravnavi:  $-1/4 < E < 0$ . Sedaj lahko opišemo vsako gibanje pri danih začetnih pogojih in fiksni  $\sigma$ .

Če je  $0 < \sigma < \frac{1}{2}$  in  $-\frac{1}{4} < E < 0$ , so odbojne Bjerkneseve sile dovolj močne, da vzdržujejo periodično gibanje mehurčkov med mejama  $\xi_1$  in  $\xi_2$ . Enako velja pri pogojih  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  in  $-\frac{1}{4} < E < \frac{1-2\sigma}{4\sigma^2}$ . Amplituda oscilacij je odvisna od značilnosti radialnih oscilacij posameznih mehurčkov ( $\phi$ ,  $\epsilon_i$ ,  $q_i$ ), razmerja velikosti  $\Delta$  in začetnih pogojev, ki določajo vrednost polne energije sistema.

Če je  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  in  $\frac{1-2\sigma}{4\sigma^2} < E < 0$ , se mehurčka združita v prvem ciklu oscilacij.

Združitev mehurčkov se zgodi tudi v primeru  $\sigma \geq 1$ , saj so odbojne sile prešibke, da bi ustavile približevanje in mehurčka se združita v prvem ciklu oscilacij za vsako polno energijo  $-\frac{1}{4} < E < 0$ .

### Pozitivna polna energija sistema

V primeru pozitivne polne energije je ena izmed rešitev enačbe (3.21) negativna ( $\xi_2 < 0$ ), druga pa pozitivna ( $\xi_1 > 0$ ). Ker obravnavamo sistem, za katerega velja pogoj (3.20), so možne samo pozitivne vrednosti  $\xi$ . Gibanje je zato omejeno s  $\xi > \xi_1 > 0$ . Tako začetno približevanje vsebuje dovolj kinetične energije, da premaga odbojne sile in mehurčka se združita. Prav tako začetno oddaljevanje premaga privlačne sile in mehurčka se oddaljujeta v neskončnost.

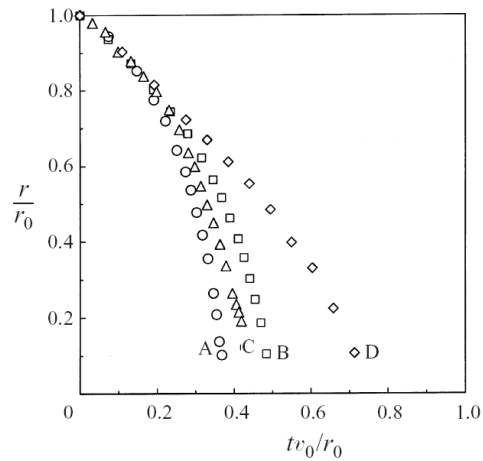
Pogledamo pa lahko, ali obstaja maksimum hitrosti, ki ga doseže relativno gibanje dveh mehurčkov. Izkaže se [3], da za  $0 < \sigma \leq 1$  hitrost doseže maksimum v minimumu potencialne energije. V primeru  $\sigma > 1$  pa se hitrost pri približevanju nenehno povečuje, pri oddaljevanju pa nenehno zmanjšuje.

### 3.5 Primerjava eksperimentalnih podatkov z napovedjo modela

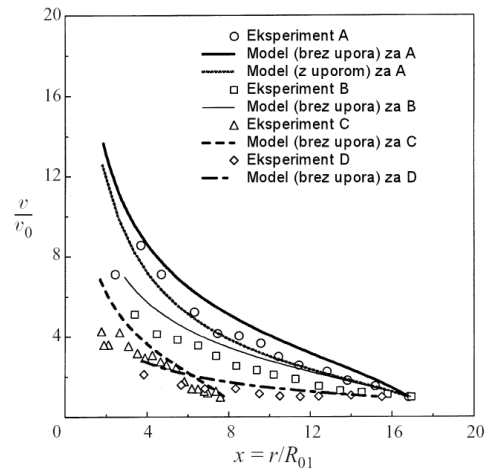
Da bi ovrednotili zgornjo teoretično obravnavo sekundarne Bjerkneseve interakcije, primerjajmo naše napovedi z izmerjenimi podatki [3]. Pri eksperimentu so izvedli meritve pri štirih različnih parih mehurčkov z različnimi začetnimi pogoji in pri različnih amplitudah vsiljenega tlačnega polja, frekvenca le-tega pa je bila povsod enaka,  $\omega = 22.5kHz$ .

Eksperiment	$R_{01}$ (mm)	$R_{02}$ (mm)	$A$ (kPa)	$r_0$ (mm)	$v_0$ (mm s <sup>-1</sup> )
A	2.402	1.952	33	42.79	18.9
B	1.583	1.417	21	28.67	26.3
C	1.661	0.779	18	12.82	42.3
D	1.546	1.289	15	26.55	43.7

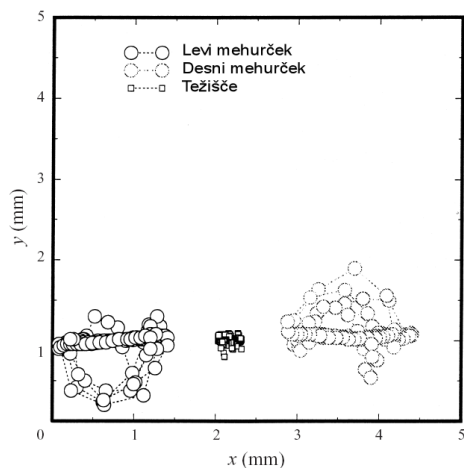
**Tabela 1:** vrednosti parametrov štirih opazovanih sistemov mehurčkov, in sicer: radij obeh mehurčkov, amplituda vzbujevalnega polja ( $A$ ), začetna medsebojna razdalja ( $r_0$ ) in začetna relativna hitrost ( $v_0$ ) [3].



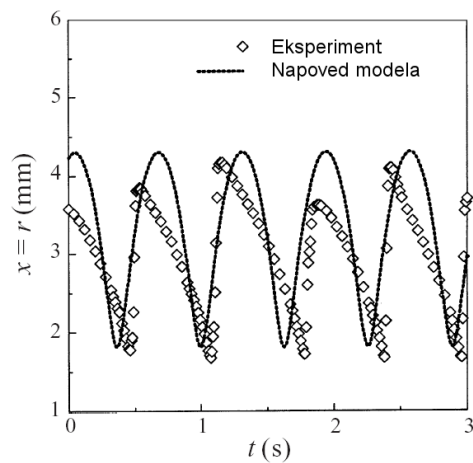
**Slika 7:** razdalja med mehurčkoma v odvisnosti od časa za primere približujočih se mehurčkov. Razdaljo umerimo z začetno razdaljo  $r_0$ , časovno skalo pa z razmerjem začetne razdalje in začetne hitrosti  $r_0/v_0$  [3].



**Slika 8:** Spreminjanje relativne hitrosti z medsebojno razdaljo za primere približujočih se mehurčkov: primerjava eksperimenta s teoretično napovedjo [3].



**Slika 9:** Krožno gibanje dveh mehurčkov skoraj enakih velikosti, ki ju vzbujamo s frekvenco blizu njunih lastnih frekvenc. Parametri eksperimenta so:  $R_{01} = 0.146\text{mm}$ ,  $R_{02} = 0.137\text{mm}$ ,  $q_1 = 1.0079$ ,  $q_2 = 0.93861$ ,  $A = 1.35\text{kPa}$  [3].



**Slika 10:** Primerjava meritev s teoretično napovedjo translacijskih oscilacij v smeri  $x$  [3].

Na Sliki 7 vidimo časovno odvisnost razdalje med mehurčkoma v primerih približevanja (in združitve) mehurčkov. V začetni fazi prevladuje učinek začetne kinetične energije in hitrost se skorjda ne spreminja. Ta faza traja dalj časa za večje začetne hitrosti in manjše amplitude zvočnega polja (primer D). V naslednji fazi pa se že pozna interakcija, ki inducira pospešek: večja je amplituda vsiljevanega polja, večji je pospešek proti združitvi mehurčkov. To se vidi iz naklonov krivulj ( $A > B > C > D$ ).

Na Sliki 8 lahko primerjamo izračunano spreminjanje relativne hitrosti z medsebojno razdaljo z izmerjenimi vrednostmi. Ujemanje je precej dobro, a konzervativni model, ki ne upošteva sile upora, napove večjo relativno hitrost. Napaka se povečuje, ko se mehurčka približujeta in je znatna, ko se razdalja zmanjša na približno 3 radije. Tam ima večji vpliv tako sila upora kot tudi sklopitev oscilacij mehurčkov.

Na Sliki 10 primerjamo izračunano časovno odvisnost razdalje med mehurčkoma v primeru translacijskih oscilacij z izmerjenimi vrednostmi. Izmerjena medsebojna razdalja se giblje med vrednostima  $x_{min} = 14R_0$  in  $x_{max} = 29R_0$  s frekvenco  $f = 1.67Hz$ . Teorija za te vrednosti napove  $x_{min} = 12.4R_0$  in  $x_{max} = 29.5R_0$  in frekvenco  $f = 1.58Hz$ . Vidimo, da je ujemanje dobro.

## 4 Zaključek

V seminarju sem predstavila principe delovanja primarne in sekundarne Bjerkneseve interakcije. Osnova za matematično obdelavo problema je Rayleigh - Plessetova enačba, ki opiše odziv sferičnega mehurčka na časovno spremenljivo tlačno polje v nestisljivi tekočini. V splošnem jo rešujemo numerično, ob predpostavki majhnih amplitud nihanja mehurčka pa nam aproksimacije dajo dovolj dobre rešitve za proučevanje osnovnih principov primarne Bjerkneseve interakcije. Ugotovili smo, da sta radij mehurčka in frekvenca vzbujevalnega polja parametra, ki določata smer in velikost sile.

Za opis gibanja sistema dveh mehurčkov pod vplivom sekundarne Bjerkneseve interakcije smo uporabili Lagrangeov formalizem. V modelu, ki ne upošteva sile upora, smo obravnavali sklopitev oscilacij obeh mehurčkov, nato pa iz gibalnih enačb izračunali trajektorije različnih sistemov mehurčkov. Iz modela smo razbrali parametre, ki povzročijo različne relativne vzorce gibanja sistema dveh mehurčkov: približevanje in združitve, oddaljevanje v neskončnost ter translacijske oscilacije. Teoretične napovedi smo nato primerjali z eksperimentalnimi rezultati in ugotovili dobro medsebojno ujemanje.

## Literatura

- [1] L. A. CRUM, *Bjerknes forces in a stationary sound field*, J. Acoust. Soc. Am. **57**, 1363 (1975).
- [2] T. G. LEIGHTON, A.J. WALTON, M.J. PICKWORTH, *Primary Bjerknes forces*, Eur. J. Phys. **11**, 47 (1990).
- [3] T. BARBAT, N. ASHGRIZ, C. G. - S. LIU, *Dynamics of two interacting bubbles in an acoustic field*, J. Fluid Mech. **389**, 137 (1999).
- [4] R. METTIN, I. AKHATOV, U. PARLITZ, C. D. OHL, W. LAUTERBORN, *Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field*, Physical review E **56**, 2924 (1997).
- [5] I. AKHATOV, R. METTIN, C. D. OHL, U. PARLITZ, W. LAUTERBORN, *Bjerknes force threshold for stable single bubble sonoluminescence*, Physical review E **55**, 3747 (1997).
- [6] T. G. LEIGHTON, *Derivation of the Rayleigh - Plesset equation in terms of volume*, ISVR Technical Report No. **308**, (2007).