Osnovne ideje mehanike Cosseratovih materialov

Jure Žalohar
Koroška cesta 12,
4000 Kranj, Slovenija

Uvod

Idejo, da deformacijo telesa opišemo z translacijskimi in rotacijskimi prostostnimi stopnjami, sta prva predstavila brata Cosserat leta 1909 (Forest 2000, 2005). Takšen kontinuum danes imenujemo Cosseratov, pripada pa večji skupini **generaliziranih kontinuumov**, ki vključujejo višje odvode deformacijskega polja, dodatne prostostne stopnje in nelokalne konstitutivne enačbe in/ali karakteristične dolžine, kot parametre, ki opišejo mikrostrukturo snovi (Forest in Sievert 2003, Forest 2005). **Kontinuumi višjega reda** vključujejo višje odvode deformacijskega polja, **kontinuumi višje stopnje** pa vključujejo dodatne prostostne stopnje (npr. neodvisna rotacija v Cosseratovem kontinuumu). Razvoj matematičnega aparata, ki opisuje takšne kontinuume, je v zadnjem času zelo hiter predvsem na račun močnejših in hitrejših računalnikov, ki omogočajo različna numerična modeliranja pri študiju lokalizacijskih fenomenov in nelinearnih elastoplastičnih ali elastoviskoplastičnih konstitutivnih zakonov za generalizirane kontinuume. Omogočajo pa tudi načrtovanje in interpretacijo laboratorijskih eksperimentov (Forest in Sievert 2003).

V tem besedilu opisujem kinematiko in dinamiko deformacij Cosseratovega kontinuuma v skladu s formulacijo, ki jo najdemo v številnih članki Samuela Foresta in soavtorjev oziroma sodelavcev (glej literaturo). Forest predstavlja formulacijo opisa plastičnih, elastoplastičnih ali elastoviskoplastičnih deformacij Cosseratovih kontinuumov, ki je zelo pregledna in elegantna in se bo v prihodnosti verjetno »prijela«, čeprav obstajajo številne alaternative (glej npr. Grammenoudis 2003). Matematični opis plastičnih, elastoplastičnih ali elastoviskoplastičnih deformacij je zelo uporaben tudi na področju razumevanja lomnih in kataklastičnih deformacij, ki so pomembne v seizmologiji in strukturni geologiji. Če je v namen razumevanja plastičnosti Cosseratovega kontinuuma na voljo razmeroma veliko literature, pa so lomne in kataklastične deformacije kamnin kot Cosseratovega kontinuuma še razmeroma slabo raziskane. Vidnejše oziroma pomembnejše prispevke, ki obravnavajo to problematiko, so objavili le Unruh et al. (1991), Twiss in Unruh (1998), Cladouhos in Allmendinger (1993) ter Figueiredo et al. (2004). Unruh et al. (1991) so postavili osnovni model, ki lomne in kataklastične deformacije opisuje v okviru teorije Cosseratovih kontinuumov. Twiss in Unruh (1998) sta pisala o utemeljenosti hipoteze, da lomne in kataklastične deformacije opisujemo v okviru Cosseratove teorije. Clodouhos in Allmendinger (1992) ter Figueiredo et al. (2004) pa so se ukvarjali z rotacijami posameznih blokov med drsnimi sistemi (prelomi) in možnostjo merjenja teh rotacij.

1.1 Virtualna gibanja Cosseratovega kontinuuma

V klasičnem kontinumu opišemo deformacijo kamnin z vektorjem premika, torej s tremi prostostnimi stopnjami. Deformacijo Cosseratovih (ali tudi mikropolarnih) kontinumov pa opišemo z dvema vektorskima poljema ali tudi **virtualnima gibanjima**: s **translacijskim vektorskim poljem** $\vec{u}$ in z **mikrorotacijskim vektorskim poljem** $\vec{\phi}^{Cosserat}$, torej s šestimi prostostnimi stopnjami. Translacijsko polje $\vec{u}$ opisuje premik neke točke telesa pri deformaciji, mikrorotacijsko polje $\vec{\phi}^{Cosserat}$ pa opisuje rotacijo tega delčka telesa v koordinatnem sistemu, v katerem je rotacija (makrorotacija) celotnega telesa enaka nič. Zanima nas, od česa je odvisna smer relativnega gibanja na meji med dvema delčkoma v Cosseratovem kontinuumu.

Označimo premik dveh delčkov oziroma mikroelementov kontinuuma z $\vec{u}_1$ oziroma z $\vec{u}_2$. Pri translacijskem gibanju mikroelementa še rotirata glede na lokalni koordinatni sistem, ki je pripet na celoten medij, in sicer za $\vec{\phi}_1$ in $\vec{\phi}_2$. Celoten relativni premik na meji med mikroelementoma je:

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{12} + \frac{L}{2}\left(\vec{n} \times \vec{\phi}_{12}\right) = \vec{u}_{12} - \frac{L}{2}\left(\vec{\phi}_{12} \times \vec{n}\right), \tag{1.1.1}$$

kjer je $\vec{u}_{12} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ razlika med premikom prvega in drugega mikroelementa, $\vec{\phi}_{12} = \vec{\phi}_2 + \vec{\phi}_1$ je relativna vrednost zasuka prvega mikroelementa glede na drugega, L je razdalja med težiščema teh dveh mikroelementov, $\vec{n}$ pa je normala ploskve, ki razmejuje mikroelementa med seboj. Uporabimo zvezo:

$$\vec{\phi}_{12} \times \vec{n} = -\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}_{12}, \tag{1.1.2}$$

pa dobimo:

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{12} + \frac{L}{2}\left(\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}_{12}\right)\vec{n} = \vec{u}_{12} + \frac{L}{2}\left(\underline{\varepsilon} \cdot \left(\vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2\right)\right)\vec{n}\,. \tag{1.1.3}$$

Tukaj je $\underline{\varepsilon}$ permutacijski tenzor. Običajno predpostavimo, da sta zasuka prvega in drugega mikroelementa enaka, torej $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}_2$. V tem primeru imamo $1/2\left(\vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2\right) = \vec{\phi} = \vec{\phi}^{Cosserat}$ in zato:

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{12} + L\left(\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}^{Cosserat}\right)\vec{n}\,. \tag{1.1.4}$$

Gledamo majhne (infinitezimalne) deformacije, zato velja:

$$\vec{u}_{12} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \mathbf{u}\vec{r}_2 - \mathbf{u}\vec{r}_1 = \mathbf{u}\left(L\vec{n}\right) = L\left(\mathbf{u}\vec{n}\right), \tag{1.1.5}$$

saj je razlika med lego prvega in drugega mikroelementa $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ enaka $L\vec{n}$. Vpeljali smo še **tenzor deformacije** $\mathbf{u} = u_{ij} = \partial u_j / \partial x_i = \vec{u} \otimes \vec{\nabla}$ ali tudi **gradientni tenzor deformacije**. Ta vsebuje informacijo o pravi deformaciji telesa in o njegovi globalni rotaciji – makrorotaciji. Zgornjo enačbo za $\vec{u}_{rel}$ lahko zapišemo takole:

$$\vec{u}_{rel} = L\left[\mathbf{u} + \underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}^{Cosserat}\right] = L\left[\mathbf{u} - \mathbf{W}^C\right]\vec{n}\,, \tag{1.1.6}$$

kjer je $\underset{\sim}{\mathbf{W}}^C = -\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}^{Cosserat}$ **Cosseratov tenzor mikrorotacije**. Definirajmo še **Cosseratov tenzor deformacije** $\mathbf{e}$ in **torzijsko-ukrivljenostni tenzor** $\boldsymbol{\kappa}$ (Forest 2000):

$$\mathbf{e} = \vec{u} \otimes \vec{\nabla} + \underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}^{Cosserat}, \qquad \boldsymbol{\kappa} = \vec{\phi}^{Cosserat} \otimes \vec{\nabla}\,. \tag{1.1.7}$$

Gradient deformacije, $\mathbf{u} = \vec{u} \otimes \vec{\nabla}$, lahko razstavimo v simetrični in antisimetrični del, $\left(\vec{u} \otimes \vec{\nabla}\right)^{(S)} + \left(\vec{u} \otimes \vec{\nabla}\right)^{(A)}$, zato lahko Cosseratov tenzor deformacije zapišemo kot:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}^{(S)} + \mathbf{u}^{(A)} - \mathbf{W}^C = \mathbf{u}^{(S)} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{W}^C = -\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}^{Cosserat}\,. \tag{1.1.8}$$

Pri tem smo vpeljali **tenzor relativne mikrorotacije**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}^{(A)} - \mathbf{W}^C = \mathbf{W}^{macro} - \mathbf{W}^C = -\underline{\varepsilon} \cdot (\vec{\phi}^{macro} - \vec{\phi}^{Cosserat}) = -\,\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\varphi}. \tag{1.1.9}$$

Tukaj je $\mathbf{W}^{macro} = -\underline{\varepsilon} \cdot \vec{\phi}$ antisimetrični del gradienta deformacije, ki ga imenujemo ponavadi kar **tenzor makrorotacije** z aksialnim vektorjem $\vec{\phi}^{macro}$. Razliki $\left(\vec{\phi}^{macro} - \vec{\phi}^{Cosserat}\right)$ pa rečemo **relativna mikrorotacija**. Podobno simetričnemu delu gradienta deformacije, $\mathbf{u}^{(S)}$, pravimo **makrodeformacijski tenzor**, saj opisuje globalno deformacijo medija.

1.2 Metoda virtualne moči

Princip virtualne moči ali tudi d'Alembertov princip predpostavlja, *da je virtualno delo vseh sil, ki delujejo na izbran element telesa glede na Galilejev koordinatni sistem enako nič, za kakršnokoli virtualno gibanje.* Sile, ki sodelujejo pri tem so: **zunanje sile**, ki so posledica interakcije telesa z drugimi telesi v okolici, in **notranje oz. interne sile**, ki so posledica interakcij med posameznimi deli znotraj telesa. Pri tem je pomemben tudi **aksiom virtualnega dela notranjih sil**: *Virtualno delo notranjih sil, ki delujejo na subdomeno $D \subset \Omega$ je invariantno glede na kakršnokoli spremembo koordinatnega sistema opazovalca.* Spremembe koordinatnega sistema opazovalca opišemo z Evklidsko transformacijo, to je s katerokoli časovno odvisno homogeno translacijo in rotacijo:

$$\vec{x}\,' = \mathbf{Q}(t)\vec{x} + \vec{b}\,(t), \tag{1.2.1}$$

kjer je $\mathbf{Q}$ ustrezni ortogonalni tenzor, točneje tenzor rotacije. Z drugimi besedami, virtualno delo internih sil je enako ne glede na opazovalni sistem opazovalca. Ta aksiom je ekvivalenten izjavi: *Delo internih sil je nič za vsako togo gibanje telesa.*

Virtualno moč $P^{(i)}$ internih sil lahko izrazimo z gostoto moči $p^{(i)}$:

$$P^{(i)} = -\int_D p^{(i)} dv \,, \tag{1.2.2}$$

kjer je dv diferencial volumna subdomene $D \subset \Omega$. Za gostoto moči $p^{(i)}$ predpostavimo, da je linerano odvisna od obeh možnih vitrualnih gibanj $\vec{u}$ in $\vec{\phi}$:

$$p^{(i)} = \boldsymbol{\sigma} : \left(\dot{\vec{u}} \otimes \vec{\nabla} - \dot{\mathbf{W}}^c\right) + \boldsymbol{\mu} : \left(\dot{\vec{\phi}} \otimes \vec{\nabla}\right). \tag{1.2.3}$$

Pri tem so $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\vec{u} \otimes \vec{\nabla} - \mathbf{W}^C$ in $\vec{\phi} \otimes \vec{\nabla}$ objektivne količine, kar pomeni, da se transformirajo kot objektivni tenzorji pri prehodu med koordinatnimi sistemi (Forest 2005). Cosseratov tenzor deformacije $\vec{u} \otimes \vec{\nabla} - \mathbf{W}^C$ predstavlja pravzaprav relativno deformacijo glede na koordinatni sistem, ki je »pritrjen« na mikrostrukturo. Gradient $\vec{\phi} \otimes \vec{\nabla}$ predstavlja torzijsko – ukrivljenostni tenzor, tenzorja $\boldsymbol{\sigma}$ in $\boldsymbol{\mu}$ pa imenujemo **tenzor napetosti** in **tenzor gostote navora**. V splošnem sta ta dva tenzorja nesimetrična.
Za tenzor napetosti in tenzor gostote navora predpostavimo, da sta (skoraj povsod) zvezno diferenciabilna. Iz zgornjih dveh enačb z uporabo Gaussovega teorema pridemo do relacije:

$$P^{(i)} = \int_D \left(\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right)\dot{\vec{u}} + \left(\boldsymbol{\mu} \cdot \vec{\nabla}\right)\dot{\vec{\phi}} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{W}}^C\right) dv - \int_{\partial D} \left(\boldsymbol{\sigma}\dot{\vec{u}} + \boldsymbol{\mu}\dot{\vec{\phi}}\right) \vec{n} \; ds \,, \tag{1.2.4}$$

kjer je ∂D rob subdomene D. Enotski vektor $\vec{n}$ predstavlja normalo na katerikoli del roba te subdomene. $\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$ pa prestavlja divergenco tenzorja napetosti.

Virtualno moč **zunanjih napetosti** lahko razdelimo v virtualno moč **volumskih sil**:

$$P^{(d)} = \int_D \left(\vec{f} \cdot \dot{\vec{u}} + \vec{c} \cdot \dot{\vec{\phi}}\right) dv \tag{1.2.5}$$

in v virtualno moč **kontaktnih sil**:

$$P^{(c)} = \int_{\partial D} \left(\vec{t} \cdot \dot{\vec{u}} + \vec{m} \cdot \dot{\vec{\phi}}\right) ds \,. \tag{1.2.6}$$

Vse te definicije virtualnih moči so linearno odvisne od virtualnih gibanj in njihovih prvih gradientov. Pravzaprav členi, ki so linearno odvisni od $\vec{u} \otimes \vec{\nabla}$ in $\vec{\phi} \otimes \vec{\nabla}$ v enačbah (1.2.5) in (1.2.6) niso bili napisani, ker nimajo ekvivalentov v enačbah za moč internih sil. Vektor $\vec{t}$ predstavlja **površinsko gostoto sil** (= napetost ob drsnem sistemu), vektor $\vec{m}$ pa predstavlja **površinsko gostoto navora**.

Moč internih sil definiramo kot nasprotno vrednost časovnemu odvodu kinetične energije:

$$P^{(a)} := -\dot{K} = -\int_D \left(\rho\vec{a} \cdot \dot{\vec{u}} + \rho I \vec{\Gamma} \cdot \dot{\vec{\phi}}\right) dv \,. \tag{1.2.7}$$

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{\Gamma}$ predstavljata dejanski pospešek in mikrorotacijo. Gostoto snovi pa označimo z ρ. V zgornji enačbi smo vpeljali tudi **izotropični mikrorotacijski vztrajnostni moment** I.

1.3 Ravnotežne enačbe

Glede na princip virtualnega dela, se mora celotna virtualna moč vseh sil izničiti na vsaki subdomeni $D \subset \Omega$ in za vsako virtualno gibanje, ki ga opišemo z $\dot{\vec{u}}$ in $\vec{\phi}$. Torej:

$$P^{(i)} + P^{(d)} + P^{(c)} + P^{(a)} = 0 \,. \tag{1.3.1}$$

Substitucija enačb (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6) in (1.2.7) v enačbo (1.3.1) vodi do naslednje variacijske enačbe:

$$\begin{aligned}&\int_D \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\vec{\nabla}+\vec{f}-\rho\vec{a}\right)\cdot\dot{\vec{u}}\;dv+\int_D\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\vec{\nabla}+\vec{c}-\underline{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}-\rho I\vec{\Gamma}\right)\cdot\dot{\vec{\phi}}\;dv\\&-\int_{\partial D}\left(\boldsymbol{\sigma}\vec{n}-\vec{t}\right)\cdot\dot{\vec{u}}\;ds-\int_{\partial D}\left(\boldsymbol{\mu}\vec{n}-\vec{m}\right)\cdot\dot{\vec{\phi}}\;ds=0\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

Najprej predpostavimo, da sta virtualni gibanji $\dot{\vec{u}}$ in $\dot{\vec{\phi}}$ izbrani tako, da sta enaki nič izven subdomene D (Forest 2005). V zgornji vsoti mora biti zato volumski integral enak nič. To pomeni, da mora biti integrand enak nič kjerkoli v notranjosti subdomene D, kjer je le-ta kontinuirana. Hitrost in mikrorotacija sta lahko variirana neodvisno, kar vodi do **ravnovesnih enačb**:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}\cdot\vec{\nabla}+\vec{f}=\rho\ddot{\vec{u}},\\&\boldsymbol{\mu}\cdot\vec{\nabla}-\underline{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}+\vec{c}=\rho I\ddot{\vec{\phi}}\;.\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

Tu smo oznake za pospešek in za mikrorotacijo zamenjali z dejanskimi virtualnimi gibanji. Zgornje ravnovesne enačbe upoštevamo v enačbi (1.3.2), ki se nato poenostavi v površinske integrale, ki so enaki nič za vsa virtualna gibanja. Posledično sta napetost in površinska gostota navora linearna funkcija normale $\vec{n}$:

$$\vec{t}=\boldsymbol{\sigma}\vec{n}\quad\text{in}\quad\vec{m}=\boldsymbol{\mu}\vec{n},\quad\forall\vec{x}\in\partial D\,.\tag{1.3.4}$$

Te enačbe se nanašajo na rob subdomene D, kjer sta vektorja $\vec{t}$ in $\vec{m}$ definirana.

1.4 Homogenizacijske metode za Cosseratove materiale

Polikristal lahko obravnavamo kot heterogen Cosseratov material, če je sestavljen iz agregata samostojnih Cosseratovih zrn. Homogenizacijske metode nam omogočajo študij obnašanja takšnih heterogenih Cosseratovih materialov (Forest et al. 2000). Obstajajo številne metode homogenizacije Cosseratovih materialov, vendar bomo tu omenili le *metodo Hill-Mandel.*

Namen je nadomestiti heterogen material z homogenim nadomestnim medijem (HNM). Če nadomestni medij obravnavamo kot Cauchyjev kontinuum, potem imamo za povprečno gostoto moči internih sil:

$$\left\langle\boldsymbol{\sigma}:\dot{\mathbf{e}}+\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}\right\rangle=\boldsymbol{\Sigma}:\dot{\mathbf{E}}\,,\tag{1.4.1}$$

kjer je $\mathbf{E}$ efektivni simetrični deformacijski tenzor, $\boldsymbol{\Sigma}$ pa je efektivni simetrični napetostni tenzor. Če pa je HNM obravnavan kot Cosseratov kontinuum pa imamo:

$$\left\langle\boldsymbol{\sigma}:\dot{\mathbf{e}}+\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}\right\rangle=\boldsymbol{\Sigma}:\dot{\mathbf{E}}+\mathbf{M}:\dot{\mathbf{K}}\,.\tag{1.4.2}$$

Tu sta $\mathbf{M}$ in $\mathbf{K}$ efektivni tenzor gostote navora in efektivni torzijsko ukrivljenostni tenzor. Pri tem $\mathbf{E}$ in $\boldsymbol{\Sigma}$ nista več nujno simetrična. Druga možnost homogenizacije je seveda bolj splošna in vsebuje prvo kot poseben primer, če je karakteristična dolžina zelo majhna. Določitev efektivnih lastnosti temelji na robnih pogojih na robu volumna V. Robni pogoji morajo biti taki, da ustrezajo enemu od zgornjih dveh enačb. Preprosta generalizacija klasičnih homogenih robnih pogojev je:

$$\vec{u}=\mathbf{E}\cdot\vec{x}\quad\text{in}\quad\vec{\phi}=\mathbf{K}\cdot\vec{x}\quad\forall\vec{x}\in\partial V\,.\tag{1.4.3}$$

Tenzorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{K}$ sta v naprej določena in konstantna. Sledi:

$$\mathbf{E}=\left\langle\vec{u}\otimes\vec{\nabla}\right\rangle\quad\text{in}\quad\mathbf{K}=\left\langle\boldsymbol{\kappa}\right\rangle.\tag{1.4.4}$$

Pogoj $\left\langle\boldsymbol{\sigma}:\dot{\mathbf{e}}+\boldsymbol{\mu}:\dot{\boldsymbol{\kappa}}\right\rangle=\boldsymbol{\Sigma}:\dot{\mathbf{E}}+\mathbf{M}:\dot{\mathbf{K}}$ je potem avtomatično izpolnjen za naslednjo definicijo efektivnega napetostnega tenzorja:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\left\langle\boldsymbol{\sigma}\right\rangle\quad\text{in}\quad\mathbf{M}=\left\langle\boldsymbol{\mu}+\left(\underline{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}\right)\otimes\vec{x}\right\rangle=\left\langle\mu_{ij}+\varepsilon_{imn}\sigma_{mn}x_j\right\rangle\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\,.\tag{1.4.5}$$

V zgornjih enačbah smo zanemarili prisotnost makrorotacij določenih na robu ∂V . Te makrorotacije označimo z $\mathbf{W}_{\partial}^{macro}$. Potemtakem bi morali pisati:

$$\left\langle \vec{u} \otimes \vec{\nabla} \right\rangle = \mathbf{E} + \mathbf{W}_{\partial}^{macro} \quad \text{in} \quad \mathbf{K} = \langle \boldsymbol{\kappa} \rangle \tag{1.4.6}$$

1.5 Linearna Cosseratova elastičnost

V linearni teoriji centrosimetričnih in izotropnih mikropolarnih kontinuumov je prosta energija Ψ odvisna od mikrorotacije in od makrodeformacije:

$$\rho\Psi = A_0 + \frac{1}{2} E_{ijkl} e_{ij} e_{jk} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl} \,. \tag{1.5.1}$$

Možne so tudi razširitve, ki upoštevajo anizotropijo in centronesimetričnost (noncentrosymmetric micropolar elasticity), česar pa tule ne bomo upoštevali. Tenzor napetosti in tenzor gostote navora definiramo kot:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \mathbf{e}} = E_{ijkl} e_{kl}, \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = C_{ijkl} \kappa_{kl}. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

V primeru izotropne elastičnosti dopolnemo dve Laméjevi konstanti s 4 dodatnimi parametri, tako da imamo (Forest et al. 1997):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \mathbf{1} \ \mathrm{Tr}(\mathbf{e}) + 2\mu \mathbf{e}^{(\mathrm{S})} + 2\mu_c \mathbf{e}^{(\mathrm{A})} \\ \boldsymbol{\mu} &= \alpha \mathbf{1} \ \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\kappa}) + 2\beta \boldsymbol{\kappa}^{(\mathrm{S})} + 2\gamma \underset{\sim}{\boldsymbol{\kappa}}^{(\mathrm{A})} \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

2 Cosseratov opis plastičnih deformacij

2.1 Enačbe stanja

Deformacijo Cosseratovega kontinuma lahko razstavimo v dve komponenti: v elastični in plastični del. Za infinitezimalne deformacije lahko napišemo (Forest et al. 1997, Forest in Sievert 2003):

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{e} + \mathbf{e}^{p}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^{e} + \boldsymbol{\kappa}^{p} \,. \tag{2.1.1}$$

Specifična interna energija ε , entropija η in Helmholtzeva prosta energija $\Psi = \varepsilon - T\eta$ so funkcije stanja in internih spremenljivk. Energijski princip bomo zapisali takole (Forest in Sievert 2003):

$$\rho\dot{\varepsilon} = p^{(i)} - \vec{Q} \cdot \vec{\nabla} \,, \tag{2.1.2}$$

kjer je $\vec{Q}$ vektor toplotnega toka. Prosta energija je odvisna od elastične deformacije, torzijske ukrivljenosti in interne spremenljivke q , ki je povezana utrjevanjem materiala pri napredujoči deformaciji (material hardening). Intrinzična disipacija pri izotermni spremembi je zato:

$$\begin{aligned} D &= \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \rho\dot{\Psi} = \\ &= \left[\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{e}}\right] : \dot{\mathbf{e}}^{e} + \left[\boldsymbol{\mu} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{e}}\right] : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{e} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^{p} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{p} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

K disipaciji prispevajo le plastične deformacije, zato iz zgornje enačbe lahko razberemo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{e}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{e}}, \quad R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q} \,. \tag{2.1.4}$$

Te enačbe imenujemo **enačbe stanja**. Vpeljali smo tudi termodinamično silo R , ki je povezana z interno spremenljivko q. Glede na te enačbe zapišemo sedaj disipacijo kot:

$$D := \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^p + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p + R\dot{q}\,. \tag{2.1.5}$$

Učinkovit način, kako zagotovimo pozitivno definitnost disipacije za katerikoli termodinamični proces je, da predpostavimo obstoj t.i. **disipacijskega potenciala** $\Omega(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, R)$, ki ga imenujemo tudi viskoplastični potencial ali tudi psevdo-potencial disipacije. Pri tem naj velja:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \quad \dot{q} = \frac{\partial \Omega}{\partial R}. \tag{2.1.6}$$

Te enačbe opisujejo **plastično tečenje** in jih imenujemo tudi **evolucijske enačbe** za interno spremenljivko. Materiali, katerih deformacijo lahko pišemo s takšnim potencialom, se imenujejo **standardni generalizirani materiali**. Definirajmo še **dualni potencial** $\Omega^*\left(\dot{\mathbf{e}}^p, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p, \dot{q}\right)$, in sicer tako, da velja:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\mathbf{e}}^p}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p}, \quad R = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{q}}. \tag{2.1.7}$$

2.2 Opis plastičnosti

V preteklosti so za opis plastičnih deformacij uporabili dva različna modela potencialov. V prvem modelu je potencial funkcija tenzorja napetosti in tenzorja gostote navora, torej $\Omega(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, R)$, v drugem modelu pa je potencial vsota dveh neodvisnih funkcij, od katerih je ena odvisna od tenzorja napetosti, druga pa od tenzorja gostote navora:

$$\Omega_{tot} = \Omega(\boldsymbol{\sigma}, R) + \Omega_c(\boldsymbol{\mu}, R_c). \tag{2.2.1}$$

Oba modela upoštevata dejstvo, da se pri napredujoči plastični deformaciji napetosti skorajda ne spreminjajo, torej $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$. Napetosti so neodvisne od hitrosti deformacije. V prvem modelu definiramo eno samo **prožnostno funkcijo** $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, R)$ in en sam **plastični multiplikator** $\dot{p}$:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{p}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p = \dot{p}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \quad \dot{q} = -\dot{p}\frac{\partial f}{\partial R}. \tag{2.2.2}$$

V drugem modelu pa nastopata dve prožnostni funkciji $f(\boldsymbol{\sigma}, R, R_c)$ in $f_c(\boldsymbol{\mu}, R, R_c)$ in dva plastična multiplikatorja:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{p}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p = \dot{\kappa}\frac{\partial f_c}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \quad \dot{q} = -\dot{p}\frac{\partial f}{\partial R}, \quad q_c = -\dot{\kappa}\frac{\partial f_c}{\partial R_c}. \tag{2.2.3}$$

Najprej si poglejmo prvi model, kjer definiramo eno samo prožnostno funkcijo:

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, R) = J_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}) - R(p) \\ &J_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{a_1\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + a_2\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^{dT} + b_1\boldsymbol{\mu}^d : \boldsymbol{\mu}^d + b_2\boldsymbol{\mu}^d : \boldsymbol{\mu}^{dT}} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

tu je npr. $\boldsymbol{\sigma}^d$ deviatorični del tenzorja napetosti, $\boldsymbol{\sigma}^{dT}$ je transponiran deviatorični del tenzorja napetosti, $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ pa so materialni parametri. Plastično tečenje opišemo z enačbami:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{p}\frac{a_1\boldsymbol{\sigma}^d + a_2\boldsymbol{\sigma}^{dT}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu})}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p = \dot{p}\frac{b_1\boldsymbol{\mu}^d + b_2\boldsymbol{\mu}^{dT}}{J_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu})}, \\ &\dot{p} = \sqrt{\frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}\dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^p + \frac{a_2}{a_2^2 - a_1^2}\dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^{pT} + \frac{b_1}{b_1^2 - b_2^2}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p + \frac{b_2}{b_2^2 - b_1^2}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pT}}. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Po drugem zgoraj omenjenem modelu pa definiramo dve prožnostni funkciji:

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{\sigma}, R) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - R(p, \kappa), \quad f_c(\boldsymbol{\mu}, R_c) = J_2(\boldsymbol{\mu}) - R_c(p, \kappa), \\ &J_2 = \sqrt{a_1\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + a_2\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^{dT}}, \quad J_2(\boldsymbol{\mu}) = \sqrt{b_1\boldsymbol{\mu}^d : \boldsymbol{\mu}^d + b_2\boldsymbol{\mu}^d : \boldsymbol{\mu}^{dT}}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Imamo tudi dva plastična multiplikatorja:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}\dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^p + \frac{a_2}{a_2^2 - a_1^2}\dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^{pT}}, \quad \dot{\kappa} = \sqrt{\frac{b_1}{b_1^2 - b_2^2}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^p + \frac{b_2}{b_2^2 - b_1^2}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pT}} \tag{2.2.7}$$

Primer uporabe teh enačb predstavljajo plastične deformacije kristalov, ki jih opisujejo Forest et al. (1997, 2000). Forest in Sievert (2003) opisujeta tudi druge modele za opis plastičnih deformacij, ki vključujejo višje odvode deformacijskega polja. Takšne teorije spadajo v skupino **kontinuumov višjega reda** (*higher – grade* media)

2.3 Kinematika elastoplastičnih deformacij Cosseratovih materialov

Prožnost in utrjevanje snovi pri plastičnih deformacijah sta povezana večinoma z nastajanjem in rastjo populacije robnih in vijačnih dislokacij in dislokacijskih struktur v nekem določenem volumnu V. Dejanski mehanizmi, ki sodelujejo pri tem procesu so še vedno dokaj slabo poznani. Populacijo dislokacij opišemo v obliki korelacijske tenzorske funkcije (Forest et al. 2000). Naj bosta $\vec{\xi}$ in $\vec{b}$ **linijski vektor dislokacje** in **Burgerjev vektor**. Prva korelacijska funkcija je **tenzor gostote dislokacij**:

$$\boldsymbol{\alpha} = \left\langle \vec{b} \otimes \vec{\xi} \right\rangle, \tag{2.3.1}$$

kjer oklepaj pomeni ansambelsko povprečenje. Naslednja korelacijska funkcija pa je

$$\alpha_{ijkl}\left(\vec{x}, \vec{x}^*\right) = \left\langle \left(\vec{b} \otimes \vec{\xi}\right)\left(\vec{x}\right) \otimes \left(\vec{b} \otimes \vec{\xi}\right)\left(\vec{x}^*\right) \right\rangle = \alpha_{ijkl}\left(\vec{x} - \vec{x}^*\right), \tag{2.3.2}$$

pri čemer predpostavimo statistično uniformnost. Ena invarianta tenzorja α_{ijkl} je:

$$\alpha_{ijkl}\left(\vec{0}\right) = L / V = \rho\,, \tag{2.3.3}$$

kjer je L dolžina dislokacij v volumnu V, ρ pa je dislokacijska gostota. V modernejših teorijah plastičnih deformacij uporabljajo večinoma notranje spremenljivke, ki so kakorkoli povezane z disokacijsko gostoto ρ ne pa tudi s tenzorjem $\boldsymbol{\alpha}$. Takšen pristop se je pokazal kot uspešen pri opisu plastičnih deformacij kristalov pri tenezijskih, strižnih in do neke mere tudi nehomogenih deformacijskih pogojih. Količini $\boldsymbol{\alpha}$ in ρ predstavljata dva neodvisna opisa ene in iste populacije diskontinuitet, zato bi morali v principu obe nastopati v konstitutivnem zakonu (Forest et al. 1997).

Pomen tenzorja gostote dislokacij in njegovo povezavo z ostalimi količinami, ki opisujejo deformacijo Cosseratovih materialov, bomo nekoliko podrobneje opisali. Najprej zapišimo tenzorski gradient deformacije za infinitezimalne deformacije:

$$\mathbf{F} = \partial\vec{x}/\partial\vec{X} = \mathbf{1} + \mathbf{e}\,. \tag{2.3.4}$$

kjer je $\vec{x}$ pozicija nekega delčka materiala po deformaciji, $\vec{X}$ pa po njej. Tenzor $\mathbf{F}$ lahko razstavimo na elastični in plastični del (Fivel in Forest 2003):

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \tag{2.3.5}$$

Elastični del $\mathbf{E}$ je produkt distorzijskega tenzorja $\mathbf{S}^e$ in rotacijskega tenzorja $\mathbf{R}^e$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}^e \cdot \mathbf{R}^e\,. \tag{2.3.6}$$

Tako imamo:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F} = \mathbf{S}^e \cdot \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{P} = \left(\mathbf{1} + \mathbf{u}^e\right) \cdot \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\omega}^e\right) \cdot \left(\mathbf{1} + \mathbf{u}^p + \boldsymbol{\omega}^p\right) \\ &\approx \mathbf{1} + \mathbf{u}^e + \boldsymbol{\omega}^e + \mathbf{u}^p + \boldsymbol{\omega}^p \\ &\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{u}}^e + \dot{\boldsymbol{\omega}}^e + \dot{\mathbf{u}}^p + \dot{\boldsymbol{\omega}}^p \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Pri tem je $\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{W}^{Cosserat}$. Če je S neka ravna ploskev, ki vsebuje točko $\vec{x}$ in je omejena s krivuljo c, je Burgerjev vektor definiran kot (Forest et al. 1997):

$$\vec{b} = \oint_c \mathbf{E}^{-1} d\vec{x} = -\int_S \left(\mathbf{E}^{-1} \times \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{n} \; dS \quad . \tag{2.3.8}$$

Če je ploskev S dovolj majhna lahko postavimo

$$d\vec{b} = n\left(\vec{b} \otimes \vec{\xi}\right)\vec{n} \; dS = \boldsymbol{\alpha}\vec{n} \; dS \; , \tag{2.3.9}$$

kjer je n gostota dislokacij na enoto površine. Vidimo, da velja:

$$\boldsymbol{\alpha} = n\left(\vec{b} \otimes \vec{\xi}\right). \tag{2.4.10}$$

Za tenzor gostote dislokacij mora torej veljati (Forest et al. 1997, Fivel in Forest 2003):

$$\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{E}^{-1} \times \vec{\nabla} = -\varepsilon_{ikl} E^{-1}{}_{ik,l} \left(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right) = \mathbf{e}^e \times \vec{\nabla} = \left(\mathbf{u}^e + \boldsymbol{\omega}^e\right) \times \vec{\nabla} = \mathbf{u}^e \times \vec{\nabla} + \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{\nabla} \; . \tag{2.3.11}$$

Sedaj upoštevamo, da velja $\boldsymbol{\kappa} = \vec{\phi} \otimes \vec{\nabla}$ in $\dot{\boldsymbol{\omega}}^p = \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}}^e = \dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{1} \times \dot{\vec{\phi}}$. To pomeni, da $\boldsymbol{\omega}^p$ predstavlja relativno rotacijo materialnih koordinat glede na posamezen element telesa. Zadnji člen v zgornji enačbi nekoliko preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^e \times \vec{\nabla} &= \varepsilon_{jkl} \omega_{ik,l} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\
&= \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{ikm} \phi_{m,l} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\
&= \varepsilon_{klj} \varepsilon_{kmi} \kappa_{ml} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\
&= \left(\delta_{ml}\delta_{ij} - \delta_{il}\delta_{mj}\right) \kappa_{ml} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\
&= \left(\mathrm{Tr}\; \boldsymbol{\kappa}\right)\mathbf{1} - \boldsymbol{\kappa}^T
\end{aligned}$$

Torej:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}^e \times \vec{\nabla} - \boldsymbol{\kappa}^T + \left(\mathrm{Tr}\; \boldsymbol{\kappa}\right)\mathbf{1} \tag{2.3.12}$$

Če v tej enačbi zanemarimo člen $\mathbf{u}^e \times \vec{\nabla}$, dobimo:

$$\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\kappa}^T + \left(\mathrm{Tr}\; \boldsymbol{\kappa}\right)\mathbf{1} \, , \tag{2.3.13}$$

ki jo v inverzni obliki zapišemo takole:

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\; \boldsymbol{\alpha}\right)\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}^T. \tag{2.3.14}$$

Pomembno je, da enačba za tenzor gostote dislokacij vsebuje celotni torzijsko ukrivljenostni tenzor $\boldsymbol{\kappa}$. Ničesar zato *a priori* ne moremo vedeti o elastičnih ali plastičnih prispevkih (Forest et al. 1997). Torzijsko ukrivljenost materiala med drsnimi ploskvami lahko razstavimo na elastični in plastični del $\boldsymbol{\kappa}^e$ in $\boldsymbol{\kappa}^p$. Termodinamska sila, ki je povezana s $\boldsymbol{\kappa}^e$ je tenzor gostote navora, ki vpliva na ravnovesje materiala in zato nastopa v ravnovesnih enačbah. To je tudi razlog, da plastične deformacije opišemo v okviru Cosseratove teorije (Forest in Sievert 2000). Plastična deformacija Cosseratovih materialov je posledica zdrsov ob drsnih sistemih ali tudi dislokacijah. Za vsak drsni sistem definiramo:

$$\vec{m} = \vec{b}^s \big/ \left\|\vec{b}^s\right\| , \tag{2.3.15}$$

kjer je $\vec{b}^s$ Burgerjev vektor. Vektor $\vec{m} = \vec{b}^s \big/ \left\|\vec{b}^s\right\|$ predstavlja smer premika ob drsnem sistemu. Naj bo $\vec{n}$ normala na drsno ploskev. Plastični tenzor hitrosti deformacije definiramo kot:

$$\dot{e}^p = \sum_i \dot{\gamma}_i \mathbf{P}_i \, , \tag{2.3.16}$$

kjer je $\dot{\gamma}$ hitrost premikanja ob drsni ploskvi, $\mathbf{P}$ pa je **orientacijski tenzor** (Forest 1998). Indeks i označuje indeks drsne ploskve. Orientacijski tenzor je definiran kot

$$\mathbf{P} = \vec{m} \otimes \vec{n}. \tag{2.3.17}$$

Na podoben način formuliramo tudi plastično komponento torzijsko – ukrivljenostnega tenzorja. Najprej definiramo **torzijsko – ukrivljenostne orientacijske tenzorje** $\mathbf{Q}^{\perp}$ in $\mathbf{Q}^{\odot}$ (Forest et al. 1997, Forest 1998):

$$\mathbf{Q}_i^{\perp} = \vec{\xi}_i \otimes \vec{m}_i \quad \text{in} \quad \mathbf{Q}_i^{\odot} = \frac{1}{2}\mathbf{1} - \vec{m}_i \otimes \vec{m}_i \,, \tag{2.3.18}$$

kjer je $\vec{\xi} = \vec{n} \times \vec{m}$ linijski vektor dislokacije. Sledi:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^p = \sum_i \left[\frac{\dot{\theta}_i^{\perp}}{l_i^{\perp}} \mathbf{Q}_i^{\perp} + \frac{\dot{\theta}_i^{\odot}}{l_i^{\odot}} \mathbf{Q}_i^{\odot} \right]. \tag{2.3.19}$$

Pri tem sta $l^{\perp}$ in $l^{\odot}$ **karakteristični dolžini materiala**, $\theta^{\perp}$ in $\theta^{\odot}$ pa sta interni spremenljivki, ki imata v zgornji enačbi podobno vlogo kot velikost deformacije γ v enačbi (2.3.15). Indeks $\perp$ označuje ukrivljenost delčka materiala med drsnim sistemom zaradi robnih dislokacij, indeks $\odot$ pa označuje ukrivljenost zaradi vijačnih dislokacij. V nadaljnem besedilu bomo ponekod prisotnost vijačnih dislokacij zanemarili. Ustrezno interno spremenljivko bomo označili z θ, karakteristično dolžino pa z l^p.

2.4 Interpretacija multizdrsnega mehanizma plastičnosti

Glede na poglavje 1 opišemo rotacijo posameznega mikroelementa Cosseratovega materiala z vektorjem $\vec{\phi}$ oziroma $\vec{\phi}^{Cosserat} = \vec{\phi}$. Cosseratov tenzor mikrorotacije pa je $\mathbf{W}^{Cosserat} = -\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \vec{\phi}$. V koordinatnem sistemu rotirajočega se mikroelementa telesa izgleda rotacija materiala ravno v nasprotni smeri, torej $-\vec{\phi}$ in $\mathbf{W}^{-Cosserat} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \vec{\phi}$. Sedaj upoštevamo, da je smer relativnega gibanja na meji med dvema rotirajočima mikroelementoma odvisna od gradientnega tenzorja deformacije in od relativne mikrorotacije, pri čemer velja:

$$\vec{b} = \gamma \vec{m} = \gamma^s \vec{s} + \gamma^c \vec{c}$$

Glede na to definicijo mora torej veljati

$$\sum_i \dot{\gamma}_i^c \left(\vec{c}_i \otimes \vec{n}_i \right) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \vec{\phi} \quad \text{in} \quad \left[\sum_i \dot{\gamma}_i^c \left(\vec{c}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{S})} = \mathbf{0}\,. \tag{2.4.1}$$

Za plastično komponeneto Cosseratovega tenzorja deformacije zato dobimo:

$$\mathbf{e}^p = \sum_i \gamma_i \left(\vec{m}_i \otimes \vec{n}_i \right) = \sum_i \gamma_i^s \left(\vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right) + \sum_i \gamma_i^c \left(\vec{c}_i \otimes \vec{n}_i \right) \approx \vec{u} \otimes \vec{\nabla} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \vec{\phi}. \tag{2.4.2}$$

Pri tem smo privzeli, da je plastična komponeneta deformacije bistveno večja kot elastična. Za simetrični del plastične komponente Cosseratovega tenzorja deformacije dobimo

$$\left(\mathbf{e}^p \right)^{(\mathrm{S})} = \left[\sum_i \gamma_i \left(\vec{m}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{S})} = \left[\sum_i \gamma_i^s \left(\vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{S})} \approx \left[\vec{u} \otimes \vec{\nabla} \right]^{(\mathrm{S})}, \tag{2.4.3}$$

za nesimetrični del pa

$$\left(\mathbf{e}^p \right)^{(\mathrm{A})} = \left[\sum_i \gamma_i \left(\vec{m}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{A})} = \left[\sum_i \gamma_i^s \left(\vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{A})} + \left[\sum_i \gamma_i^c \left(\vec{c}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{A})} \approx \left[\vec{u} \otimes \vec{\nabla} \right]^{(\mathrm{A})} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \vec{\phi}\,. \tag{2.4.4}$$

Sledi:

$$\left[\sum_i \gamma_i^s \left(\vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right) \right]^{(\mathrm{A})} \approx \left[\vec{u} \otimes \vec{\nabla} \right]^{(\mathrm{A})} \tag{2.4.5}$$

Hkrati predstavlja izraz $\left[\vec{u} \otimes \vec{\nabla} \right]^{(\mathrm{A})} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \vec{\phi}$ tenzor relativne mikrorotacije $\mathbf{A}$. Zgornje zveze prepišemo v tri pomembne rezultate:

$$\mathbf{u}^{(\mathrm{S})} = \left[\sum_i \gamma_i \mathbf{P}_i \right]^{(\mathrm{S})} = \left[\sum_i \gamma_i^s \vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right]^{(\mathrm{S})},$$

$$\mathbf{W}^{macro} = \mathbf{u}^{(\mathrm{A})} = \left[\sum_i \gamma_i^s \vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right]^{(\mathrm{A})}, \tag{2.4.6}$$

$$\mathbf{A} = \left[\sum_i \gamma_i \mathbf{P}_i\right]^{(A)} .$$

2.5 Generaliziran Schmidov zakon

Tenzorja $\mathbf{e}^p$ in $\boldsymbol{\kappa}^p$ bi lahko izračunali iz enačb (2.3.15) in (2.3.18), vendar bi morali prej poznati vrednosti internih spremenljivk γ_i in θ_i. Začnimo s silo na enoto dolžine dislokacije, ki jo definiramo takole (Forest et al. 1997):

$$\vec{f} \cdot d\vec{x} = \vec{b} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}\vec{n}\right) dS = \left(\left(\vec{b}\boldsymbol{\sigma}\right) \times \vec{\xi}\right) \cdot d\vec{x} , \tag{2.5.1}$$

kjer je $\vec{n}\ dS = \vec{\xi} \times d\vec{x}$. Dislokacija se lahko premika v svoji ravnini le, če je komponeneta strižne sile v smeri premika:

$$\tau = \frac{1}{b}\vec{f} \cdot \left(\vec{n} \times \vec{\xi}\right) = \frac{1}{b}\boldsymbol{\sigma} : \left(\vec{b} \otimes \vec{n}\right) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} \tag{2.5.2}$$

večja od določene vrednosti. To je fizikalni pomen **Schmidovega kriterija**. Hitrost premikanja vzdolž i-tega drsnega sistema izračunamo po enačbi:

$$\dot{\gamma}_i = \left\langle \frac{\left|\tau_i - x_i\right| - r_s}{k_s} \right\rangle sign\left(\tau_s - x_s\right). \tag{2.5.3}$$

Pri tem je x_i interna kinematična spremenljivka, r_i pa izotropna utrjevalna spremenljivka. x_i in r_i pravzaprav predstavljata kohezijo in pa mejo prožnosti. Parametra n_i in k_i predstavljata viskoznostna parametra.

Podoben kriterij je tudi za ukrivljenostni tenzor. Obravnavajmo sistem robnih dislokacij, za katere naj bo $\underline{b} = b\underline{e}_1$, normala na ravnino drsnega sistema $\vec{z} = \vec{e}_2$ in $\vec{\xi} = -\vec{e}_3$. Pri majhnih deformacijah je ukrivljenost zaradi dislokacije enaka:

$$\boldsymbol{\kappa}^p = \frac{-nb}{l}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 .$$

Predpostavimo, da takšne geometrično nujne dislokacije nastanejo takrat, ko je lokalni moment $\boldsymbol{\mu} = m\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 \quad \left(m < 0\right)$ dovolj velik in z njim povezana ukrivljenost prevelika, da bi bila lahko akomodirana samo z elastičnimi deformacijami. Predpostavimo naslednji izraz za viskoplastično hitrost ukrivljanja:

$$\dot{\theta}_i = \left\langle \frac{\left|\boldsymbol{\mu} : \mathbf{Q}_i\right| - lr_i^c}{lk_i^c} \right\rangle sign\left(\boldsymbol{\mu} : \mathbf{Q}_i\right). \tag{2.5.4}$$

Pomen internih spremenljivk je podoben kot v enačbi za $\dot{\gamma}_i$.

2.6 Prosta energija in značilnosti utrjevanja

Ključni problem termodinamske analize konstitutivnega zakona za disipativen sistem je izbira relevantnih internih spremenljivk odkaterih je lahko odvisna prosta energija. Ta naj bi bila odvisna od deformacije, ukrivljenosti in temperature $\left(\mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}, T\right)$ oziroma od $\left(\mathbf{e}^e, \boldsymbol{\kappa}^e, T\right)$ ter še od sledečih internih spremenljivk:

- spremenljivke δ_i^G, kjer velja $\dot{\delta}_i^S = \left|\dot{\gamma}_i\right|$
- spremenljivke δ_i^G, kjer velja $\dot{\delta}_i^G = \left|b\dot{\theta}/l\right|$
- kinematske utrjevalne spremenljivke α_i

Postavimo, da je prosta energija kvadratna funkcija teh spremenljivk:

$$\begin{aligned}&\rho\psi\left(\mathbf{e}^e,\,\boldsymbol{\kappa}^e,\,T,\,\alpha_i,\,\delta_i^S,\,\delta_i^G\right)=\frac{1}{2}E_{ijkl}e_{ij}^e e_{kl}^e+\frac{1}{2}C_{ijkl}\kappa_{ij}^e\kappa_{kl}^e+\frac{1}{2}\sum_i c\alpha_i^2\\&+r_0\sum_i\delta_i^{S2}+\frac{1}{2}\sum_{j,i}h_{ij}\delta_i^S\delta_j^G+r_{c0}\sum_i\delta_i^{G2}+\frac{1}{2}\sum_{j,i}h_{ij}^c\delta_i^S\delta_j^G+\sum_{j,i}h_{ij}^I\delta_i^S\delta_j^G+f\left(T\right)\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

Za vsako populacijo dislokacij uporabimo **utrjevalno matriko** h_{ij} in h_{ij}^c. Interakcijo med različnimi dislokacijami pa opišemo z matriko h_{ij}^I. Če predpostavimo, da so termodinamske sile, ki so povezane s spremenljivkami δ_i^G ,δ_i^G in α_i naslednje: r_i , r_i^c in x_i , potem dobimo naslednje utrjevalne enačbe:

1. Izotropno utrjevanje

$$r_i=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\delta_i^S}=r_0+\sum_i h_{ij}\delta_j^S+\sum_i h_{ij}^I\delta_j^G\ ,\tag{2.6.2}$$

$$r_i^c=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\delta_i^G}=r_0^c+\sum_i h_{ij}^c\delta_j^G+\sum_i h_{ij}^I\delta_j^S\ .\tag{2.6.3}$$

Zaradi enostavnosti člena $h_{ij}^c\delta_j^G$ nismo rastavili na $h_{ij}^{c\perp}\delta_j^{G\perp}$ in $h_{ij}^{c\odot}\delta_j^{G\odot}$ da bi razločli prispevek robnih in vijačnih dislokacij. Isto velja za člen, ki vsebuje h_{ij}^I.

2. Kinematično utrjevanje

$$x_i=\rho\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}=c\alpha_i\ .\tag{2.6.4}$$

2.7 Disipacija

Sedaj, ko smo predstavili interne spremenljivke, dobimo za intrinzično disipacijo:

$$\dot{D}=\sum_i\left(\tau_i\dot{\gamma}_i-x_i\dot{\alpha}_i-r_i\dot{\delta}_i^S+\nu_i^\perp\dot{\theta}_i^\perp+\nu_i^\odot\dot{\theta}_i^\odot-r_i^{c\perp}\dot{\delta}_i^{G\perp}-r_i^{c\odot}\dot{\delta}_i^{G\odot}\right)\tag{2.7.1}$$

kjer je

$$\nu_i^\perp=\frac{1}{l}\boldsymbol{\mu}:\mathbf{Q}_i^\perp\qquad\text{in}\qquad\nu_i^\odot=\frac{1}{l}\boldsymbol{\mu}:\mathbf{Q}_i^\odot\ .\tag{2.7.2}$$

Naraščanje števila dislokacij in njihovo premikanje sta disipativna procesa. Prvi trije členi v zgornji enačbi za disipacijo vključujejo disipacijo zaradi drsenja, preostali členi pa vključujejo disipacijo zaradi naraščanja števila dislokacij. V nekaterih primerih lahko zadnji člen zanemarimo. Če pa nastopajo intenzivne rotacije posameznih delčkov telesa, pa je zadnji člen kljub temu lahko pomemben.

Nekaj dodatnih informacij o materialnih parametrih lahko izpeljemo iz entropijskega principa. **Evolucijsko pravilo** za α_i je $\dot{\alpha}_i=\dot{\gamma}_i-d\left|\dot{\gamma}_i\right|\alpha_i$ (Forest et al. 1997, Cailletaud et al. 2003). Upoštevajoč Schmidov zakon za $\dot{\gamma}_i$ in $\dot{\theta}_i$ ter definicije za δ_i^G in δ_i^G lahko zgornjo enačbo za disipacijo napišemo takole (Forest et al. 1997):

$$\begin{aligned}&\dot{D}=\sum_i\left(\left(\tau_i-x_i\right)sign\left(\dot{\gamma}_i\right)-r_i+cd\alpha_i^2\left|\dot{\gamma}_i\right|\right)\\&+\dot{\theta}_i^\perp\left(\nu_i^\perp-r_i^{c\perp}sign\left(\theta_i^\perp\right)\right)+\theta_i^\odot\left(\nu_i^\odot-r_i^{c\odot}sign\left(\theta_i^\odot\right)\right)\end{aligned}\tag{2.7.3}$$

Pozitivna definitnost te enačbe je dosežena, če je $cd>0$ in če je matrika $h_{ij}^{\perp,\odot}$ takšna, da je $r_i^{c\perp,\odot}$ vedno pozitiven (Forest et al. 1997).

3 Cosseratov opis lomnih in kataklastičnih deformacij

3.1 Osnovne predpostavke

Plastične deformacije so povezane s kinematiko dislokacij v materialu, v nasprotju pa so lomne in kataklastične povezane s kinematiko makroskopskih diskontinuitet – prelomov in razpok (Twiss in Unruh 1998). Pri tem se material deformira tudi elastično in plastično, vendar je deformacija materiala zaradi premikanja ob sistemih prelomnih diskontinuitet bistveno večja. Z lomnimi deformacijami označujemo v tem besedilu vse tiste deformacije medija, ki so povezne s premikom ob številnih družinah prelomnih diskontinuitet. Družine prelomnih diskontinuitet predstavljajo sistematično orientirane ploskve (drsne sisteme), ki so vzporedne in ob katerih pride do več ali manj vzporednega premikanja. Kataklastične deformacije pa se praviloma pojavljajo znotraj lomnih con in predstavljajo deformacijo drobirja v lomnih conah. Matematični opis pa je za oba tipa deformacij enak. Razumevanje lomnih in kataklastičnih deformacij je pomembno predvsem v seizmologiji in strukturni geologiji pri študiju deformacij kamnin v zemeljski skorji in študiju mehanizmov, ki so povezani z nastajanjem potresov.

V teoriji Cosseratovih kontinumov v nasprotju s klasičnim pristopom smer premika ob drsnih sistemih, ki omejujejo posamezne mikroelemente, ni odvisna od tenzorja napetosti, temveč od Cosseratovega tenzorja deformacije:

$$\gamma_i \vec{m}_i = L\Big(\mathbf{e}\cdot\vec{n}_i - \big(\mathbf{e} : \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i\big)\vec{n}_i\Big). \tag{3.1.1}$$

Tu je $\vec{m}_i$ enotski vektor v smeri premika ob i-tem drsnem sistemu, γ_i pa je velikost premika. Cosseratov tenzor deformacije vključuje tako relativno gibanje mikroelementov medija, kot tudi njihovo relativno rotacijo. Prispevek relativnega gibanja mikroelementov na smer premika ob drsnem sistemu je:

$$\gamma_i^s \vec{s} = L\Big(\mathbf{u}^{(S)}\cdot\vec{n}_i - \big(\mathbf{u}^{(S)}: \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i\big)\vec{n}_i\Big), \tag{3.1.2}$$

prispevek relativne rotacije mikroelementov pa je

$$\gamma_i^c \vec{c} = L\Big(\mathbf{A}\cdot\vec{n}_i - \big(\mathbf{A} : \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i\big)\vec{n}_i\Big). \tag{3.1.3}$$

Kjer velja:

$$\gamma_i \vec{m}_i = \gamma_i^s \vec{s}_i + \gamma_i^c \vec{c}_i \tag{3.1.4}$$

V teoriji Cosseratovih materialov na smer premikanja ob drsnih sistemih torej pomembno vplivajo tudi rotacije mikroelementov med drsnimi ploskvami (Twiss in Unruh 1998). Takšno možnost klasični pristop zanemari. Smer premika je tako odvisna od dveh tenzorjev: od makrodeformacijskega tenzorja $\mathbf{u}^{(S)}$ in od tenzorja relativne mikrorotacije $\mathbf{A}$. Hkrati zgornji račun pojasni, zakaj je smer premikov ob makroskopskih diskontinuitetah, kot so prelomi v Zemeljski skorji, premosorazmerna z velikostjo prelomov. Če je L razdalja med težiščema sosednjih blokov in S velikost mejne ploskve, potem predvidevamo, da velja $L = k_4\sqrt{S}$, kjer je k_4 neka geometrična konstanta (glej tudi poglavje 3.4).

Lomne in kataklastične deformacije matematično opišemo podobno kot plastične deformacije (Reches 1978, 1983, Marret in Allmendinger 1990, Kostrov 1974). Deformacijo medija v splošnem razstavimo na **e**lastični, **p**lastični in **l**omni oz. kataklastični člen:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^l \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^e + \boldsymbol{\kappa}^p + \boldsymbol{\kappa}^l. \tag{3.1.5}$$

Lomno komponento definiramo podobno kot plastično:

$$\mathbf{e}^l = \frac{1}{V}\sum_i \gamma_i\left(\vec{m}_i \otimes \vec{n}_i\right) = \frac{1}{V}\sum_i \gamma_i \mathbf{P}_i. \tag{3.1.6}$$

V bazi lastnih vektorjev $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3$ tenzorja makrodeformacije $\mathbf{u}^{(S)}$ lahko gradient deformacije $\vec{u}\otimes\vec{\nabla}$ zaradi premikov ob eni družini diskontinuitet napišemo kot

$$\vec{u}\otimes\vec{\nabla}=\gamma\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\lambda_1-\lambda_3}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Pri tem izberemo $\lambda_1=\gamma$ in $\lambda_3=-\gamma$ ter $\vec{n}=1/\sqrt{2}\cdot\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_3\right)$ in $\vec{m}=1/\sqrt{2}\cdot\left(-\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_3\right)$. Antisimetrični del tenzorskega gradienta deformacije predstavlja makrorotcijski tenzor. Ker v tem posebnem primeru velja

$$\left[\vec{u}\otimes\vec{\nabla}\right]^{(A)}=\frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{\nabla}\right)=-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot\vec{\phi}^{macro}=\gamma\vec{\lambda}_2, \quad (3.1.8)$$

je osni vektor makrorotacije vzporeden srednji lastni osi tenzorja makrodeformacije $\mathbf{u}^{(S)}$. Če so v mediju prisotne tudi družine prelomnih diskontinuitet z drugačno orientacijo, lahko smer osnega vektorja marorotacije $\vec{\phi}^{macro}$ bolj ali manj odstopa od srednje lastne osi tenzorja $\mathbf{u}^{(S)}$, vendar merjenja v naravi kažejo, da so ta odstopanja mnogokrat zanemarljiva (Twiss in Unruh 1998 ter lastne meritve). Prav tako osni vektor mikrorotacije $\vec{\phi}^{Cosserat}$ teži k vzporednosti z $\vec{\phi}^{macro}$. Tenzor relativne mikrorotacije $\mathbf{A}$ zato v bazi lastnih vektrojev $\vec{\lambda}_1$, $\vec{\lambda}_2$, $\vec{\lambda}_3$ tenzorja $\mathbf{u}^{(S)}$ definiramo kot (Twiss in Unruh 1998):

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -C\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}\\ 0 & 0 & 0\\ C\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3} & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \phi^{Cosserat}-\phi^{macro}\\ 0 & 0 & 0\\ \phi^{macro}-\phi^{Cosserat} & 0 & 0\end{pmatrix} \quad (3.1.9)$$

V bazi lastnih vektorjev tenzorja makrodeformacije tako Cosseratov tenzor deformacije zapišemo takole:

$$\mathbf{e}=\mathbf{u}^{(S)}+\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & -C\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ C\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3} & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}. \quad (3.1.10)$$

Parameter C je:

$$C=\frac{\phi^{macro}-\phi^{Cosserat}}{0,5\left(\lambda_1-\lambda_3\right)}. \quad (3.1.11)$$

Twiss in Unruh (1998) imenujeta ta parameter *vrtinčnostni parameter*, mi pa ga bomo imenovali *mikropolarni parameter*. Imenovalec v zgornjem ulomku je maksimalni možni strig, ki ga izračunamo iz lastnih vrednosti tenzorja makrodeformacije. Parameter C predstavlja posebno kinematsko prostostno stopnjo, ki opisuje normalizirano mero razlike med rotacijo celotnega kamninskega masiva ϕ^{macro} in rotacijo posameznih blokov med prelomnimi ploskvami $\phi^{Cosserat}$ (Twiss in Unruh 1998). Poleg mikropolarnega parametra C je pomemben še *mikropolarni parameter Rc*, ki ga definiramo kot:

$$Rc=\frac{\left\|\mathbf{e}^{(9)}\right\|-\left\|\mathbf{u}^{(S),(9)}\right\|}{\left\|\mathbf{e}^{(9)}\right\|}. \quad (3.1.12)$$

Tu je $\left\|\mathbf{e}^{(9)}\right\|=\left\|\left(e_{11},e_{22},e_{33},e_{12},e_{13},e_{23},e_{21},e_{31},e_{32}\right)\right\|$ in $\left\|\underset{\sim}{\mathbf{u}}^{(S),(9)}\right\|=\left\|\left(u_{11},u_{22},u_{33},u_{12},u_{13},u_{23},u_{21},u_{31},u_{32}\right)\right\|$. Parameter Rc opisuje normalizirano mero razlike med Cosseratovim tenzorjem deformacije in njegovo simetrično komponento, ki predstavlja makrodeformacijo.

Podobno kot smo prej definirali mikrorotacijski parameter Rc, lahko sedaj definiramo še makrorotacijski parameter *Rm,* ki definira oceno intenzivnosti makrorotacije:

$$Rm=\frac{\left\|\mathbf{u}^{(S),(9)}+\mathbf{W}^{(9),macro}\right\|-\left\|\mathbf{u}^{(S),(9)}\right\|}{\left\|\mathbf{u}^{(S),(9)}+\mathbf{W}^{(9),macro}\right\|}. \quad (3.1.13)$$

.3.2 Konstitutivni zakon

Za konstitutivno povezavo med deformacijami in napetostmi v primeru lomnih in kataklastičnih deformacij v približku pričakujemo podobno zvezo, kot v primeru trenjskega granularnega tečenja:

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} = 2\mu_{f}\mathbf{d}\,. \tag{3.2.1}$$

Tu je $\boldsymbol{\sigma}^{d}$ deviatorični del tenzorja napetosti, $\mathbf{d}$ je deviatorični del tenzorja deformacije, μ_f pa je strižna viskoznost (Dartevelle 2003). Ker se lomna in kataklastična deformacija (= deformacija povezana s premiki ob prelomih) akumulirata skozi daljša geološka obdobja in lahko dosežeta veliko intenzivnost, lahko predpostavimo, da so napetosti neodvisne od hitrosti deformacije (Kaspar 2002, Dartevelle 2003). Zgornja enačba je podobna konstitutivni enačbi za Newtonovske tekočine, vendar strižna viskoznost μ_f ne sme biti konstantna. Samo tako namreč tenzor napetosti ni odvisen od hitrosti deformacije. Glede na zgornjo enačbo tudi sklepamo, da so lastni vektorji tenzorja deformacije in tenzorja napetosti enaki. V nekoliko razširjeni obliki zato konstitutivni zakon zapišemo takole (Dartevelle 2003):

$$\boldsymbol{\sigma} = p_{r}\mathbf{1} + 2\mu_{f}\mathbf{e}, \tag{3.2.2}$$

V teoriji mikropolarnih (Cosseratovih) kontinumov moramo biti še nekoliko bolj previdni. Napetostni tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ namreč ni nujno simetričen (Forest 2000). V konstitutivni enačbi moramo zato upoštevati tudi njegovo antisimetrično komponento. Do možne in približne rešitve se dokopljemo s pomočjo enačb za plastično tečenje. V ta namen plastične in lomno-kataklastične deformacije združimo v **plastičnolomne deformacije**, ki jih opišemo s tenzorjema $\mathbf{e}^{lp} = \mathbf{e}^{p} + \mathbf{e}^{l}$ in $\boldsymbol{\kappa}^{lp} = \boldsymbol{\kappa}^{p} + \boldsymbol{\kappa}^{l}$. Predvidevamo, da je povezava med lomnimi, kataklastičnimi in plastičnimi deformacijami s tenzorjem napetosti odvisna od istih zakonov. Enačbe za lomnoplastično tečenje napišemo po vzoru enačb za plastično tečenje:

$$\dot{\mathbf{e}}^{lp} = \dot{p}\frac{a_1\boldsymbol{\sigma}^{d} + a_2\boldsymbol{\sigma}^{dT}}{J_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu})}, \quad \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{lp} = \dot{p}\frac{b_1\boldsymbol{\mu}^{d} + b_2\boldsymbol{\mu}^{dT}}{J_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu})},$$
$$\dot{p} = \sqrt{\frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}\dot{\mathbf{e}}^{lp} : \dot{\mathbf{e}}^{lp} + \frac{a_2}{a_2^2 - a_1^2}\dot{\mathbf{e}}^{lp} : \dot{\mathbf{e}}^{lpT} + \frac{b_1}{b_1^2 - b_2^2}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{lp} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{lp} + \frac{b_2}{b_2^2 - b_1^2}\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{lp} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{lpT}}\,.$$

Spomnimo se še naslednjih zvez:

$$f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},R) = J_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}) - R(p)$$
$$J_2(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}) = \sqrt{a_1\boldsymbol{\sigma}^{d} : \boldsymbol{\sigma}^{d} + a_2\boldsymbol{\sigma}^{d} : \boldsymbol{\sigma}^{dT} + b_1\boldsymbol{\mu}^{d} : \boldsymbol{\mu}^{d} + b_2\boldsymbol{\mu}^{d} : \boldsymbol{\mu}^{dT}}$$

Tu je npr. $\boldsymbol{\sigma}^{d}$ deviatorični del tenzorja napetosti, $\boldsymbol{\sigma}^{dT}$ je transponiran deviatorični del tenzorja napetosti, $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ pa so materialni parametri. V naslednjem koraku bomo predpostavili, da je tenzor napetosti $\boldsymbol{\sigma}$ dosti večji od tenzorja gostote navora $\boldsymbol{\mu}$, ki ga bomo zato zanemarili. To smemo storiti, ker predpostavimo, da je relativna mikrorotacija povsod v materialu enaka, torej $\vec{\phi} \otimes \vec{\nabla} = 0$. Enačbo za $\mathbf{e}^{lp}$ napišemo takole:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}^{lp} = \dot{p}\frac{a_1\boldsymbol{\sigma}^{d} + a_2\boldsymbol{\sigma}^{dT}}{J_2(\boldsymbol{\sigma})} = \frac{\dot{p}a_1}{J_2(\boldsymbol{\sigma})}\boldsymbol{\sigma}^{d} + \frac{\dot{p}a_2}{J_2(\boldsymbol{\sigma})}\boldsymbol{\sigma}^{dT} = \\ \frac{\dot{p}}{J_2(\boldsymbol{\sigma})}(a_1 + a_2)(\boldsymbol{\sigma}^{d})^{(\mathrm{S})} + \frac{\dot{p}}{J_2(\boldsymbol{\sigma})}(a_1 - a_2)(\boldsymbol{\sigma}^{d})^{(\mathrm{A})}.\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Zadnji člen lahko napišemo še drugače, če upoštevamo vzporednost med osnim vektorjem makrorotacije in osnim vektorjem mikrorotacije, torej tudi relativne mikrorotacije. Začnimo z ravnovesnimi enačbami v mikropolarnem kontinumu:

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\vec{\nabla} - \underline{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma} + \vec{c} = \rho I\ddot{\vec{\phi}}.$$

Spet zanemarimo tenzor gostote navora, saj predpostavimo, da je velikost relativne mikrorotacije povsod enaka, torej $\vec{\phi} \otimes \vec{\nabla} = 0$. Prav tako bomo zanemarili volumske navore $\vec{c}$, saj predvidevamo, da so le-ti v Zemelsjki skorji odsotni. Sledi:

$$-\underline{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \rho I\ddot{\vec{\phi}}\,.$$

Levo stran te zveze lahko izrazimo v smislu aksialnega vektorja naptostnega tenzorja $\boldsymbol{\sigma}$. Glede na relacijo:

$$2\overset{\times}{\vec{\sigma}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \,,$$

sledi:

$$\overset{\times}{\vec{\sigma}} = \frac{1}{2}\rho I \ddot{\vec{\phi}} \,. \tag{3.2.4}$$

To je zelo pomemben rezultat. Sklepamo, da se smer makrorotacije in relativne mikrorotacije ne spreminjata, zato predpostavimo še:

$$\ddot{\vec{\phi}} \parallel \vec{\phi} \;\text{ in }\; \ddot{\vec{\phi}} \parallel \left(\vec{\phi}^{\,macro} - \vec{\phi}^{\,Cosserat}\right),$$

zato je tudi osni vektor antisimetričnega dela tenzorja napetosti, $\overset{\times}{\vec{\sigma}}$, vzporeden vektorju $\vec{\phi}$. Torej:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{A})} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \overset{\times}{\vec{\sigma}} = -\frac{1}{2}\rho I \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \ddot{\vec{\phi}} \propto \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \vec{\phi}^{\mathrm{rel}} \propto \mathbf{A} \,. \tag{3.2.5}$$

Antisimetrična komponeneta tenzorja napetosti je torej sorazmerna antisimetrični komponeneti tenzorja $\mathbf{e}^{lp}$:

$$\left(\boldsymbol{\sigma}^{d}\right)^{(\mathrm{A})} = \frac{kJ_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}{\dot{p}}\dot{\mathbf{A}} = \frac{kJ_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}{\dot{p}}\left(\underset{\sim}{\dot{\mathbf{e}}}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} . \tag{3.2.6}$$

Tu je k neka konstanta, ulomek $J_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)/\,\dot{p}$ pa smo pisali, ker je tenzor napetosti neodvisen od hitrosti deformacije. Zato iz enačbe (3.2.3) sledi

$$\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{S})} + \left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} = \frac{\dot{p}}{J_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}\left(a_1 + a_2\right)\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{d}\right)^{(\mathrm{S})} + k\left(a_1 - a_2\right)\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} .$$

Očitno mora torej veljati:

$$\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{S})} = \frac{\dot{p}}{J_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}\left(a_1 + a_2\right)\left(\boldsymbol{\sigma}^{d}\right)^{(\mathrm{S})} , \tag{3.2.7}$$

$$\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} = k\left(a_1 - a_2\right)\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} \longrightarrow k\left(a_1 - a_2\right) = 1 \,. \tag{3.2.8}$$

Za konstitutivni zakon potem dobimo:

$$\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{d}\right)^{(\mathrm{S})} + \left(\boldsymbol{\sigma}^{d}\right)^{(\mathrm{A})} = \frac{J_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}{\dot{p}\left(a_1 + a_2\right)}\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{S})} + \frac{J_2\left(\boldsymbol{\sigma}\right)}{\dot{p}\left(a_1 - a_2\right)}\left(\dot{\mathbf{e}}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} . \tag{3.2.9}$$

Celoten tenzor napetosti lahko potem napišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= p_r\mathbf{I} + 2\mu_f\left(\mathbf{e}^{lp}\right)^{(\mathrm{S})} + 2\mu_c\left(\mathbf{e}^{lp}\right)^{(\mathrm{A})} \quad \text{oziroma} \\ \boldsymbol{\sigma} &= p_r\mathbf{I} + 2\mu_f\mathbf{u}^{(\mathrm{S})} + 2\mu_c\mathbf{A} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

kjer sta μ_f in μ_c viskoznostna parametra, p_r pa je hidrostatični tlak. Antisimetričen del tenzorja napetosti ima velik vpliv na velikost strižne napetosti ob prelomni diskontinuiteti. Napetost ob diskontinuiteti je:

$$\boldsymbol{\sigma}\vec{n} = p_r\vec{n} + 2\mu\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\vec{n} + 2\mu_c\mathbf{A}\vec{n} = p_r\vec{n} + 2\mu\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\vec{n} + 2\mu_c\,\overset{\times}{\vec{\alpha}} \times \vec{n} \,, \tag{3.2.11}$$

saj velja $\mathbf{A}\vec{n} = \overset{\times}{\vec{\alpha}} \times \vec{n}$, kjer je $\overset{\times}{\vec{\alpha}}$ osni vektor tenzorja relativne mikrorotacije $\mathbf{A}$. Vektorski produkt med normalo prelomne diskontinuitete $\vec{n}$ in osnim vektorjem $\overset{\times}{\vec{\alpha}}$ leži v ravnini diskontinuitete, zato člen $2\mu_c\mathbf{A}$ vpliva le na velikost strižne napetosti ob diskontinuiteti. V nesimetričnih napetostnih stanjih so zato strižne napetosti ob prelomnih diskontinuitetah lahko znatno večje kot v simetričnih napetostnih stanjih.

3.3 Multizdrsni mehanizem lomnih in kataklastičnih deformacij

Poenostavljeno si prelome predstavljamo kot ravnine, katerih orientacijo podamo z enostskim vektorjem normale $\vec{n}$. Smer premika ob prelomni ploskvi podamo z enotskim vektorjem $\vec{m}$. Pri tem velja $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$, saj sta ta dva vektorja med seboj pravokotna. Opazovanja v naravi kažejo, da je velikost premika ob prelomu odvisna od velikosti preloma oziroma od njegove dolžine (Main et al. 1999):

$$b \propto l^{\alpha} . \tag{3.3.1}$$

Najpogosteje znaša vrednost α okoli 1. Odvisnost velikosti premika od dolžine preloma je v tem primeru invariantna glede na merilo (Udias 1999). Prav tako so na podlagi seizmoloških analiz potresov in na podlagi opazovanj v naravi ugotovili, da je velikost premika odvisna od padca napetosti ob zdrsu (Udias 1999), zato zgornjo enačbo napišemo takole:

$$\frac{b}{l} = k\Delta\sigma . \tag{3.3.2}$$

Tu je k neka konstanta. Glede na splošne ugotovitve na področju mehanike kamnin (Jaeger in Cook 1969) lahko padec napetosti $\Delta\sigma$ ocenimo kot

$$\Delta\sigma = \tau - \tau_{res} . \tag{3.3.3}$$

Padec napetosti je povezan s padcem strižne trdnosti. Naj bo τ strižna trdnost pred zdrsom, τ_{res} pa residualna strižna trdnost po zdrsu. Zaradi trenja ob prelomni diskontinuiteti je residualna strižna trdnost lahko večja kot nič (Udias 1999, Jaeger in Cook 1969). Če je $\bar{\sigma}_n$ povprečna normalna napetost ob prelomni diskontinuiteti, lahko τ_{res} ocenimo na podlagi Amotonovega zakona trenja (Jaeger in Cook 1969) kot $\tau_{res} = \mu\bar{\sigma}_n$, kjer je μ koeficient trenja.
Pri opisu lomnih in kataklastičnih deformacij igra pomembno vlogo **deformacijski moment** M (Marrett in Almendinger 1990):

$$M = Sb , \tag{3.3.4}$$

ki je produkt površine preloma S in premika ob njem b. Soroden je seizmičnemu momentu v seizmologiji. Med njima velja zveza $M_s = GM$, kjer je G strižni modul kamnine (Marret in Almendinger 1990, Udias 1999). Glede na zgornje enačbe velja:

$$M = c\Delta\sigma S^{3/2} . \tag{3.3.5}$$

Obravnavamo namreč dvodimenzionalne prelomne diskontinuitete, kjer je $l \propto \sqrt{S}$ (Udias 1999). V zgornji enačbi je c neka konstanta. Porazdelitev števila prelomnih diskontinuitet oziroma prelomov glede na velikost opišemo z enačbo (Main 2000, Main et al. 1999, 2000):

$$n(M) = \frac{dN}{dM} = \frac{AB}{M^{B+1}} , \tag{3.3.6}$$

kjer sta A in B parametra porazdelitve. Parameter B ima lahko vrednosti med 1/3 in 1, najpogosteje pa njegova vrednost znaša okoli 2/3 (Main in Kyndi 2002). V samo fizikalno ozadje zgornje porazdelitvene funkcije se na tem mestu ne bomo spuščali. Povejmo pa, da zgornja porazdelitvena funkcija dobro opiše predvsem porazdelitev manjših prelomnih diskontinuitet, za večje prelome pa utegne porazdelitev nekoliko odstopati od tiste, ki jo napove zgornja enačba (Main 2000, Main et al. 1999, 2000). Izračunajmo sedaj število prelomov z deformacijskim momentom med M_1 in M_2 oziroma s površino med S_1 in S_2:

$$N(M_1 < M < M_2) = \int_{M_1}^{M_2} n(M)\,dM = A\left[\frac{1}{M_2^B} - \frac{1}{M_1^B}\right] = \frac{A}{(c\Delta\sigma)^B}\left[\frac{1}{S_2^{3B/2}} - \frac{1}{S_1^{3B/2}}\right]. \tag{3.3.7}$$

Celoten deformacijski moment pa je:

$$M_T = \int_0^{M_{max}} Mn(M)\; dM = \frac{AB}{1-B} M_{max}^{1-B} . \tag{3.3.8}$$

V tej porazdelitvi so prosti parametri trije: A, B in M_{max}. V približku pa lahko za največji prelom postavimo:

$$\log N = \log 1 = 0 \quad \text{oziroma} \quad 0 = \log A - B \log M_{max} . \tag{3.3.9}$$

Sedaj lahko pišemo:

$$M_T = \frac{B M_{max}}{1-B} . \tag{3.3.10}$$

V tej enačbi sta prosta parametra dva: B in M_{max}. Ker je vrednost parametra B enaka približno 2/3, je neznanka v tej enačbi le M_{max}.
Deformacijo zaradi premikov ob prelomnih diskontinuitetah oziroma prelomih ene družine izračunamo (Reches 1978, 1983, Marret in Almendinger 1990):

$$\mathbf{e}_k^l = \frac{M_k^T}{V} \mathbf{P}_k = \frac{M_k^{Ts}}{V} \left(\vec{s}_k \otimes \vec{n}_k \right) + \frac{M_k^{Tc}}{V} \left(\vec{c}_k \otimes \vec{n}_k \right) , \tag{3.3.11}$$

kjer indeks k označuje k-to družino prelomov, V pa je volumen medija z opazovano populacijo prelomov, M_k^T pa je celotni deformacijski moment za prelome k-te družine. Za celotno lomno deformacijo dobimo potemtakem:

$$\mathbf{e}^l = \sum_k \frac{M_k^T}{V} \mathbf{P}_k = \sum_k \frac{M_k^{Ts}}{V} \left(\vec{s}_k \otimes \vec{n}_k \right) + \sum_k \frac{M_k^{Tc}}{V} \left(\vec{c}_k \otimes \vec{n}_k \right) . \tag{3.3.12}$$

Pri tem enačbe, ki smo jih napisali na koncu poglavja 2.4 zapišemo takole:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(\mathrm{S})} &= \left[\sum_i \frac{M_i^T}{V} \mathbf{P}_i \right]^{(\mathrm{S})} = \left[\sum_i \frac{M_i^{Ts}}{V} \vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right]^{(\mathrm{S})} , \\ \mathbf{W}^{macro} = \mathbf{u}^{(\mathrm{A})} &= \left[\sum_i \frac{M_i^{Ts}}{V} \vec{s}_i \otimes \vec{n}_i \right]^{(\mathrm{A})} , \\ \mathbf{A} &= \left[\sum_i \frac{M_i^T}{V} \mathbf{P}_i \right]^{(\mathrm{A})} . \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Te enačbe predstavljajo **multizdrsni mehanizem lomnega oziroma kataklastičnega tečenja** in so ekvivalnetne enačbam za multizdrsni mehanizem plastičnosti v teoriji plastičnih deformacij. Pri lomni deformaciji so orientacijski tenzorji $\mathbf{P}_i$ določeni že vnaprej s Colulomb-Mohrovim kriterijem trdnosti (Jaeger in Cook 1969) ali pa z že prej obstoječimi ploskvami anizotropije v mediju, kot so naprimer plastnatost, prej obstoječe razpoke, skrilavost, klivaž itd. Pri homogenih deformacijskih pogojih pa je vrednost tenzorjev $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$ in $\mathbf{W}^{macro}$ določena z robnimi pogoji v skladu z enačbami, ki smo jih omenili v poglavju o homogenizacijskih metodah za Cosseratove materiale. Volumen medija V je ponavadi bistveno večji od karakteristične dolžine, zato je HNM Cauchyjev kontinuum. Za homogene razmere velja:

$$\mathbf{E} = \left\langle \vec{u} \otimes \vec{\nabla} \right\rangle = \left\langle \mathbf{u} \right\rangle \quad \text{oziroma} \quad \mathbf{u} = \mathbf{E} + \mathbf{W}_\partial^{macro} \quad \text{in} \quad \mathbf{W}^{macro} = \mathbf{W}_\partial^{macro} . \tag{3.3.14}$$

Tu smo z $\mathbf{W}_\partial^{macro}$ označili makrorotacijski tenzor, ki je določen na robu medija. Prosti parametri v zgornjih enačbah multizdrsnega mehanizma lomnega tečenja so torej $\mathbf{A}$, in M_i^T. Enačbi za $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$ in $\mathbf{W}^{macro}$ napišemo takole:

$$\begin{aligned} V u_{ij}^{Sim} &= \left(P_{ij1}^S,\, P_{ij2}^S,\, ...,\, P_{ijN}^S \right) \cdot \left(M_1^{Ts},\, M_2^{Ts},\, ...,\, M_N^{Ts} \right)^T , \\ V W_{ij} &= \left(W_{ij1}^S,\, \mathrm{W}_{ij2}^S,\, ...,\, \mathrm{W}_{ijN}^S \right) \cdot \left(M_1^{Ts},\, M_2^{Ts},\, ...,\, M_N^{Ts} \right) . \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Pravzaprav imamo 18 enačb za komponenete u_{ij}^{Sim} in W_{ij} in za N neznank. Ta sistem napišemo v obliki:

$$\underline{L} = \mathbf{H} \underline{M}^s . \tag{3.3.16}$$

Neodvisnih enačb je manj kot 18, in sicer 4 za tenzor $\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}$ in 2 za tenzor $\mathbf{W}^{macro}$, torej skupno 6. Če hočemo, da je sistem določen, mora biti število N enako 6, kar pomeni, da poljubne deformacijske robne pogoje lahko kompenzira najmanj 6 družin drsnih sistemov. V tem primeru je rešitev zgornje enačbe:

$$\underline{M}^s = \left(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{H} \right) \underline{L} . \tag{3.3.17}$$

Če je družin več, so nekatere nepotrebne in najbrž niso aktivne. Če pa je družin premalo, pa je sistem predoločen. V tem primeru robnih pogojev ni nujno mogoče popolnoma kompenzirati z zdrsi ob drsnih sistemih. Najbližja rešitev je dolčena z enačbo:

$$\underline{M}^s = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\underline{L}\,. \tag{3.3.18}$$

Verjetno pa se v mediju razvijejo nove geometrično nujne diskontinuitete. Najmanj drsnih sistemov je geometrično nujnih v primeru, če je makrorotacijski tenzor enak nič.

3.4 Relativna mikrorotacija pri lomnem in kataklastičnem tečenju

Vrednost tenzorja relativne mikrorotacije $\mathbf{A}$ ni neposredno odvisna od zgornjih enačb. Na vrednost relativne mikrorotacije vpliva porazdelitev prelomnih disokacij glede na velikost (enačba 3.3.6) in pa prostorska razporejenost diskontinuitet. Opazovanja v naravi kažjo, da smer vektorja relativne mikrorotacije $\vec{\phi}$ določa geometrija sistema prelomov na vsaj dva možna načina:

(1) Premik vzdolž presečnice med prelomi: Opazovanja prelomov in seizmične analze potresov (lastne meritve in analize) kažejo, da premiki ob prelomih težijo k vzporednosti s presečnico posameznih prelomov z drugimi prelomi. Imejmo dva preloma z velikostjo $S_1 = 1/k_{4,1}^2 \cdot L_1^2$ in $S_2 = 1/k_{4,2}^2 \cdot L_2^2$ in z normalama $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$. Presečnica $\vec{d}$ med tema dvema prelomoma je:

$$\vec{d} = \frac{\left(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right)}{\left\|\left(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right)\right\|}\,, \tag{3.4.1}$$

(2) Mikrorotacija zaradi povijanja največjih prelomov: je drugi mehanizem, ki določa smer mikrorotacije $\vec{\phi}$. V tem primeru je prelom sestavljen iz najman dveh segmentov z normalama $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$, smer striga $\gamma_i\vec{s} = \mathbf{u}^{(S)}\cdot\vec{n}_i - \left(\mathbf{u}^{(S)}\colon \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i\right)\vec{n}_i$ pa mora biti približno pravokotna na presečnico $\vec{d}$ med namišljenima ravninama z normalama $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$:

$$\vec{\phi} \parallel \vec{d} = \frac{\left(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right)}{\left\|\left(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right)\right\|}\,. \tag{3.4.2}$$

Smer relativne mikrorotacije torej kakorkoli določa geometrija sistema prelomov. Odgovor na vprašanje, od česa je odvisna velikost oziroma intenzivnost relativne mirkrotacije, pa je nekoliko daljši. Predvidevamo, da je intenzivnost relativne mikrorotacije odvisna od elastičnih lastnosti materiala med prelomnimi ploskvami in od geometrije sistema prelomov. Hkrati opazovanja v naravi kažejo, da je mikrorotacija odvisna tudi od gradienta velikosti premika ob različno velikih prelomih. Relativno mikrorotacijo definiramo kot:

$$\phi = \frac{\delta b}{l}\,. \tag{3.4.3}$$

Pri tem je δb razlika med velikostjo premika ob dveh različno velikih prelomih, ki omejujeta bloke materiala med prelomnima ploskvama, l pa je karakteristična velikost. Velja

$$b = c\Delta\sigma\sqrt{S} \longrightarrow \frac{db}{dS} = \frac{c\Delta\sigma}{\sqrt{S}}\,. \tag{3.4.4}$$

Ker je na eni strani prelom z velikostjo S_1 na drugi strani pa je prelom z velikostjo S_2 lahko pišemo:

$$\delta S = S_1 - S_2 = k_1 S\,. \tag{3.4.5}$$

Sledi:

$$\delta b = \frac{db}{dS}\delta S = k_1 c\Delta\sigma\sqrt{S}\,. \tag{3.4.6}$$

Ker je proces lomne deformacije v Zemeljski skorji fraktalen, je geometrija sistema prelomov na različnih karakterističnih velikostih enaka. To pomeni, da mora med površino prelomov, ki omejujejo bloke kamnin z določeno karakteristično velikostjo l veljati:

$$V = k_2 S^{3/2} = k_3 l^3, \quad \text{saj velja tudi} \quad S \sim l^2 \, . \tag{3.4.7}$$

Sledi

$$l = k_4 \sqrt{S} \ , \tag{3.4.8}$$

kjer so k_1, k_2, in k_3 različne konstante, ki so odvisne od geometrije sistema prelomov. Za mikrorotacijo potem dobimo

$$\phi = \frac{k_1 c \Delta\sigma}{k_4} = k_{geom} c \Delta\sigma \ . \tag{3.4.9}$$

Intenzivnost relativne mikrorotacije je po tej enačbi odvisna od elastičnih lastnosti snovi, torej od konstante c, od padca napetosti $\Delta\sigma$ in od geometrije sistema prelomov, torej od geometrične konstante k_{geom}. Intenzivnost mikrorotacije pa je neodvisna od karakteristične velikosti, kar smo tudi pričakovali glede na fraktalne lastnosti prelamljanja.

Zgornji rezultat še zdaleč ni dokončen. Mikrorotacija namreč ne nastopa samo na levi temveč tudi na desni strani enačbe v padcu napetosti $\Delta\sigma$. V resnici moramo ugotoviti, kako je intenzivnost relativne mikrorotacije odvisna od robnih pogojev $\mathbf{u}^{(S)}$ in $\mathbf{W}^{macro}$.

Začnimo z definicijo padca napetosti:

$$\Delta\sigma = \tau - \mu\sigma_n \, , \tag{3.4.10}$$

kjer je τ strižnanapetost ob prelomni diskontinuiteti, σ_n je normalna napetost, μ pa je koeficient trenja. Definirajmo orientacijska tenzorja $\mathbf{D}$ in $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \vec{n} \otimes \vec{d}, \\ \mathbf{N} &= \vec{n} \otimes \vec{n}. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Ne pozabimo, da je smer premika vzporedna presečnici preloma z nekim drugim prelomom, torej:

$$\vec{m} = \vec{d} \ . \tag{3.4.12}$$

Strižna napetost ob prelomu je $\tau = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$, normalna napetost pa je $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}$. Padec napetosti je potemtakem:

$$\Delta\sigma = \boldsymbol{\sigma} : \left(\mathbf{D} - \mu\mathbf{N}\right). \tag{3.4.13}$$

V to enačbo vstavimo konstitutivni zakon $\boldsymbol{\sigma} = p_r \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{u}^{(S)} + 2\mu_c \mathbf{A},$ pri čemer upoštevamo, da je prispevek antisimetričnega dela tenzorja napetosti k velikosti normalne napetosti enak nič (enačba 3.2.11):

$$\boldsymbol{\sigma}^{(A)} : \mathbf{N} = 0 \, . \tag{3.4.14}$$

Prispevek antisimetričnega dela tenzorja napetosti k velikosti strižne napetosti pa ni enak nič. Velja:

$$\begin{aligned} \gamma\vec{c} &= \vec{\phi} \times \vec{n} = \left(\phi \cdot sin\,\delta\right) \cdot \vec{d} \longrightarrow \gamma\vec{c} \cdot \vec{d} = \phi \cdot sin\,\delta \cdot cos\,\varphi \\ \gamma\vec{c} &= \mathbf{A}\vec{n} \longrightarrow \gamma\vec{c} \cdot \vec{d} = \left(\mathbf{A}\vec{n}\right) \cdot \vec{d} = \mathbf{A} : \mathbf{D}. \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Torej mora veljati:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(A)} : \mathbf{D} = 2\mu_c \mathbf{A} : \mathbf{D} = 2\mu_c \phi \cdot sin\,\delta \cdot cos\,\varphi. \tag{3.4.16}$$

V teh računih smo upoštevali, da vektor $\vec{c}$ oklepa z vektorjem $\vec{d}$ kot φ. Kot δ pa je med normalo $\vec{n}$ in vektorjem $\vec{\phi}$. Sedaj enačbo (3.4.9) napišemo v obliki:

$$\begin{aligned}\phi &= k_{geom} c\cdot\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) = k_{geom} c\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(S)} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) + k_{geom} c\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(A)} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) = \\ &= k_{geom} c\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(S)} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) + 2k_{geom} c\mu_c \mathbf{A} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) = \\ &= k_{geom} c\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(S)} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) + 2k_{geom} c\mu_c \cdot\phi\cdot sin\,\delta\cdot cos\,\varphi\end{aligned} \tag{3.4.17}$$

kjer smo upoštevali $\boldsymbol{\sigma}^{(A)} : \mathbf{N} = 0$ in $\boldsymbol{\sigma}^{(A)} : \mathbf{D} = 2\mu_c \mathbf{A} : \mathbf{D} = 2\mu_c\phi\cdot sin\,\delta\cdot cos\,\varphi$. Izrazimo $\vec{\phi}$ in dobimo rezultat:

$$\phi = F_{geom}\left(\mathrm{K}\cdot\mathrm{Tr}\left(\mathbf{u}^{(S)}\right)\mathbf{1} + 2\mu_f\mathbf{u}^{(S)}\right) : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}). \tag{3.4.18}$$

Pri tem smo vpeljali **geometrično konstanto** $F_{geom} = (k_{geom}c)/(1-2\mu_c c k_{geom}\cdot sin\,\delta\cdot cos\,\varphi)$, ki vključuje geometrijo sistema prelomov, elastične lastnosti materiala med prelomnimi ploskvami ter viskoznostni parameter $2\mu_c$. K pa je povprečni stisljivostni modul. Glede na dejstvo, da velja $\mathrm{K}\cdot\mathrm{Tr}\left(\mathbf{u}^{(S)}\right)\mathbf{1} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) = 0$, lahko pišemo:

$$\phi = F_{geom} 2\mu_f \mathbf{u}^{(S)} : (\mathbf{D}-\mu\mathbf{N}) \tag{3.4.19}$$

Ta enačba predstavlja zelo pomemben rezultat. Velikost relativne rotacije je premosorazmerna z globalno makrodeformacijo, odvisna pa je tudi od elastičnih in viskoznostnih lastnosti materiala in od geometrije sistema prelomov.

Ker je relativna mikrorotacija določena naprimer z dvema prelomoma z normalama $\underline{n}_1$ in $\underline{n}_2$, mora veljati naslednje:

$$\begin{aligned}\phi &= F^1_{geom} 2\mu_f \mathbf{u}^{(S)} : (\mathbf{D}_1-\mu\mathbf{N}_1), \\ \phi &= F^2_{geom} 2\mu_f \mathbf{u}^{(S)} : (\mathbf{D}_2-\mu\mathbf{N}_2).\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Različni prelomi morajo terej imeti različno vrednost geometrične konstante F_{geom}.

3.5 Relativna mikrorotacija zaradi premikov ob presečnici med prelomi

Nekoliko podrobneje si poglejmo relativno mikrorotacijo, ki nastane zaradi premikov ob presečnicah med prelomi. Smer striga ob dveh prelomih z normalama $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$ mora biti enaka in hkrati vzporedna s presečnico med prelomoma $\vec{d}$:

$$\begin{aligned}\gamma\vec{d} &= L_1\left(\mathbf{e}\vec{n}_1 - (\mathbf{e} : \vec{n}_1\otimes\vec{n}_1)\vec{n}_1\right) = \gamma^s_1\vec{s}_1 + \gamma^c_1\vec{c}_1, \\ \gamma\vec{d} &= L_2\left(\mathbf{e}\vec{n}_2 - (\mathbf{e} : \vec{n}_2\otimes\vec{n}_2)\vec{n}_2\right) = \gamma^s_2\vec{s}_2 + \gamma^c_2\vec{c}_2.\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Izenačimo in dobimo:

$$\underbrace{\gamma^s_1\vec{s}_1 - \gamma^s_2\vec{s}_2}_{\Delta\vec{s}} = -\left(\gamma^c_1\vec{c}_1 - \gamma^c_2\vec{c}_2\right). \tag{3.5.2}$$

Ker velja $\gamma^c\vec{c} = L\vec{\phi}\times\vec{n}$ sledi:

$$\Delta\vec{s} = -\,\vec{\phi}\times\underbrace{\left(L_1\vec{n}_1 - L_2\vec{n}_2\right)}_{\Delta\vec{n}}, \tag{3.5.3}$$

torej:

$$\Delta\vec{s} = -\,\vec{\phi}\times\Delta\vec{n}. \tag{3.5.4}$$

Vektorja $\Delta\vec{n}$ in $\Delta\vec{s}$ imata komponente $(\Delta n_1, \Delta n_2, \Delta n_3)$ oziroma $(\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3)$. Zgornjo enačbo lahko zapišemo tudi v takšni obliki:

$$\Delta\vec{s} = \mathbf{G}\vec{\phi}, \tag{3.5.5}$$

kjer je:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}0 & \Delta n_3 & -\Delta n_2\\ -\Delta n_3 & 0 & \Delta n_1\\ \Delta n_2 & -\Delta n_1 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.5.6}$$

Za vektor relativne mikrorotacije potem dobimo:

$$\vec{\phi}=\mathbf{G}^{-1}\Delta\vec{s}\ , \tag{3.5.7}$$

kjer je:

$$\mathbf{G}^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\Delta n_1}{2\Delta n_2\Delta n_3} & \dfrac{1}{2\Delta n_3} & -\dfrac{1}{2\Delta n_2}\\ \dfrac{1}{2\Delta n_3} & -\dfrac{\Delta n_2}{2\Delta n_1\Delta n_3} & -\dfrac{1}{2\Delta n_1}\\ -\dfrac{1}{2\Delta n_2} & -\dfrac{1}{2\Delta n_1} & -\dfrac{\Delta n_3}{2\Delta n_1\Delta n_2}\end{bmatrix}. \tag{3.5.8}$$

Enačba (3.5.7) predstavlja odvisnost vektorja relativne mikrorotacije od deformacijskih robnih pogojev. Hkrati veljata tudi enačbi (3.4.20) iz česar lahko potem izračunamo geometrični konstanti:

$$F_{geom}^{1,2}=\frac{\sqrt{\left(\mathbf{G}^{-1}\Delta\vec{s}\right)^2}}{\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\colon\ \left(\mathbf{D}_{1,2}-\mu\mathbf{N}_{1,2}\right)}\ . \tag{3.5.9}$$

Enačba (3.5.7) je neodvisna od velikosti prelomov S_1 in S_2, ki sta povezani z razdaljo med središči rotirajočih blokov L_1 in L_2. Ti dve količini sta zastopani tako v definiciji vektorja $\Delta\vec{n}$ kot tudi vektorja $\Delta\vec{s}$ in na vrednost produkta $\mathbf{G}^{-1}$ in $\Delta\vec{s}$ ne vplivata, če je le razmerje $L_1 : L_2$ neodvisno od merila opazovanja. Zaenkrat še nimamo nikakršnih podatkov o tem, kakšno naj bi to razmerje bilo. Teoretično lahko ugibamo, da je kakorkoli povezano s porazdelitvijo prelomov glede na velikost, naprimer z razmerjem $M_{max}^1 : M_{max}^2$. Morda ravno največji prelomi in njihova velikost določajo relativno mikrorotacijo, na manjšem merilu pa je zaradi samopodobnosti orientacija in velikost relativne mikrorotacije enaka.

Definirajmo vektor deformacijskega momenta $\vec{M}$, katerega velikost je enaka deformacijskemu momentu M, smer pa je enaka smeri premika $\vec{b}$:

$$\vec{M}=S\vec{b}=S\left(\gamma^s\vec{s}+\gamma^c\vec{c}\right)=S\gamma^s\vec{s}+S\gamma^c\vec{c}=\vec{M}^s+\vec{M}^c. \tag{3.5.10}$$

S tem vektor deformacijskega momenta razstavimo na prispevek zaradi makrodeformacije in na prispevek zaradi relativne mikrorotacije. Celotna makrodeformacijska komponenta deformacijski momenta M^{Ts} za dano družino prelomov je:

$$M_i^{Ts}=\frac{B}{1-B}M_{i,max}^s=\frac{B}{1-B}S_{i,max}L_{i,max}\left\|\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\vec{n}_i-\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\colon\ \left(\vec{n}_i\otimes\vec{n}_i\right)\right)\vec{n}_i\right)\right\|. \tag{3.5.11}$$

Sedaj upoštevamo, da velja $S=\left(1/k_4^2\right)L^2$, pa dobimo:

$$M_i^{Ts}=\frac{B}{1-B}\cdot\frac{1}{k_4^2}L_{i,max}^3\left\|\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\vec{n}_i-\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\colon\ \left(\vec{n}_i\otimes\vec{n}_i\right)\right)\vec{n}_i\right)\right\|.$$

Razmerje $L_1 : L_2$ je torej enako:

$$L_1 : L_2=\frac{L_{1,max}}{L_{2,max}}=\sqrt[3]{\frac{M_1^{Ts}\left\|\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\vec{n}_2-\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\colon\ \left(\vec{n}_2\otimes\vec{n}_2\right)\right)\vec{n}_2\right)\right\|}{M_2^{Ts}\left\|\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\vec{n}_1-\left(\mathbf{u}^{(\mathrm{S})}\colon\ \left(\vec{n}_1\otimes\vec{n}_1\right)\right)\vec{n}_1\right)\right\|}}\ . \tag{3.5.12}$$

Vrednosti M_1^{Ts} in M_2^{Ts} izračunamo iz enačb (3.3.17) ali (3.3.18). Zgornja ocena za razmerje $L_1 : L_2$ je seveda pravilna le, če sta konstanti B in k_4 enaki za obe družini prelomov.

3.6 Absolutna interna rotacija samopodobnega Cosseratovega materiala

Relativna mikrorotacija predstavlja opis relativne rotacije posameznih mikroelementov enega glede na drugega. Vendar to še ni tudi absolutna rotacija posameznih mikroelementov. Kamnine v Zemeljski skorji predstavljajo samopodoben material, ki ima fraktalne lastnosti. To pomeni, da je na vsakem merilu opazovanja proces prelamljanja videti enako. Geometrija sistema prelomov je neodvisna od merila opazovanja, kakor tudi relativna mikrorotacija. To pa pomeni, da so znotraj večjih rotirajočih blokov še manjši rotirajoči bloki. Celotna rotacija materiala na najmanjšem možnem merilu opazovanja l_0 je zato vsota rotacij na vseh večjih dimenzijah oziroma merilih.

Označimo razliko med dvema karakterističnima dimenzijama z δl. Potem je prispevek relativne mikrorotacije k celotni rotaciji mikroelementa na najmanjšem možnem merilu l_0 enak:

$$\delta l\left(\alpha\left(l_0\right)+\alpha\left(l_0+\delta l\right)+\ldots+\alpha\left(L_0\right)\right)\approx k\int_{l_0}^{L_0}\phi dl=k\phi L_0-k\phi l_0\approx k\phi L\ , \qquad (3.6.1)$$

kjer je k neka neznana konstanta, ki jo izračunamo takole:

$$\sum_i \alpha\left(l+i\delta l\right)=\ \Sigma_\alpha\left(L_0\right)=\frac{k\phi L_0}{\delta l}\longrightarrow k=\frac{\Sigma_\alpha\delta l}{\phi L_0}. \qquad (3.6.2)$$

Prispevek k rotaciji najmanjših mikroelementov do velikosti l je potemtakem:

$$\Sigma_\alpha\left(l\right)=\frac{k\phi l}{\delta l}=\Sigma_\alpha\left(L_0\right)\cdot\frac{l}{L_0}. \qquad (3.6.3)$$

Dejanska rotacija mikroelementa velikosti l pa je:

$$\alpha=\Sigma_\alpha\left(L_0\right)-\Sigma_\alpha\left(l\right)=\Sigma_\alpha\left(L_0\right)\cdot\left[1-\frac{l}{L_0}\right]. \qquad (3.6.4)$$

Karakteristično merilo za n-dimezionalne prelome definiramo takole:

$$\begin{aligned}&\text{Za 1-D prelome:}\quad l:=\sqrt{S}\\&\text{Za 2-D prelome:}\quad l:=S\\&\text{Za 3-D prelome:}\quad l:=S^{3/2}\end{aligned} \qquad (3.6.5)$$

Rotacija najmanjših blokov je enaka $\alpha_{max}=\Sigma_\alpha\left(L_0\right)$ in jo izmerimo z naprimer (paleo)magnetnimi merjenji. Rotacija na nekoliko večjem merilu pa je manjša in jo lahko izračunamo, če izmerimo velikost največjega preloma, ki je povezan z rotacijo regije:

$$\alpha\left(l\right)=\alpha_{max}\left[1-\frac{l}{L_0}\right]. \qquad (3.6.6)$$

Ni torej nujno, da je rotacija regije enaka rotaciji, ki jo izkazujejo bloki kamnin na merilu izdanka (npr. cestnega vseka, kamnoloma itd.), temveč je verjetno mnogo manjša, odvisno od velikosti največjega preloma L_0

Viri in Literatura

1. Cladouhos, T.T. and R.W. Allmendinger 1993: Finite strain and rotation from fault slip data., *J. Struct. Geol. 15*, 771-784.
2. Dartevelle, S. 2003: *Numerical and granulometric approaches to geophysical granular flows.*, Ph.D. thesis, Michigan Technological University, Michigan.
3. Figueiredo, R.P., E.A. Vargas, A. Moraes 2004: Analysis of bookshelf mechanisms using the mechanics of Cosserat generalized continua., *J. Struct. Geol.* 26, 1931-1943.
4. Fivel, M., S. Forest 2003: Plasticite cristalline et transition d'echelle: cas du monocristal., 17 p., Techniques de l'Ingenieur.

5. Forest, S. 1998: Modelling slip, kink and shear banding in classical and generalized single crystal plasticity., *Acta Mater.* 46, 3265-3281.
6. Forest, S. 2000: Cosserat Media., in *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, edited by K.H.J. Buschow, R.W. Cahn, M.C. Flemings, B. Ilschner, E.J. Kramer and S. Mahajan, pp. 1715-1718, Elsevier Science Ltd.
7. Forest, S., F. Barbe and G. Cailletaud 2000: Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials., *Int. J. Solids and Struct. 37*, 7105-7126.
8. Forest, S., G. Cailletaud and R. Sievert 1997: A Cosserat Theory for Elastoviscoplastic Single Crystals at Finite Deformation, *Arch. Mechan. 49*, 705-736.
9. Grammenoudis, P 2003: *Mikropolare Plastizität.*, Ph. D. Thesis., 122 p., University of Darmstadt.
10. Jaeger J.C. and N.G.W. Cook 1969: *Fundamentals of Rock Mechanics.*, Methuen London.
11. Kaspar, J.W. 2002: Constitutive Models for Engineering materials., in *Encyclopedia of Physical Science and Technology.*, Third Edition, Volume 3, pp. 603-633, Academic Press.
12. Kostrov, V.V. 1974: Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rocks., *Izv. Acad. Sci. USSR Phys. Solid Earth, Engl. Transl., 1*, 23-44.
13. Main I. G. 2000: Apparent Breaks in Scaling in the Earthquake Cumulative Frequency – Magnitude Distribution: Fact or Artifact?, *Bulletin of the Seismological Society of America* 90, str. 86 – 97.
14. Main I. G., D. Irving, R. Musson, A. Reading 1999: Constraints of frequency – magnitude relation and maximum magnitudes in the UK from observed seismicity and glacio – isostatic recovery rates., *Geophysical Journal International* 137, 535 – 550.
15. Main I. G., F. H. Al-Kyndi 2002: Entopy, energy, and proximity to criticality in global earthquake populations., *Geophysical Research Letters* 29, 10.1029/2001GL014078.
16. Main I. G., G. O'Brien, J. R. Henderson 2000: Statistical physics of earthquakes: Comparison of distribution exponents for surface area and potential energy and the dynamic emergence of log – periodic energy quanta., *Journal of Geophysical Research* 105, str. 6105 – 6126.
17. Marret, R. and R.W. Allmendinger 1990: Kinematic analysis of fault-slip data., *J. Struct. Geol. 12*, 973 – 986.
18. Onck, P.R. 2002: Cosserat modelling of cellular solids., *C. R. Mechanique 330*, 717-722.
19. Reches, Z. 1978: Analysis of faulting in three-dimensional strain field., *Tectonophysics 47*, 109-129.
20. Reches, Z. 1983: Faulting of rocks in three-dimensional strain fields II. Theoretical analysis., *Tectonophysics 95*, 133-156.
21. *Geophys. Res. 103*, 12,205 - 12,222.
22. Twiss, R.J., G.M. Protzman and S.D. Hurst 1991: Theory of slickenline patterns based on the velocity gradient tensor and microrotation., *Tectonophysics 186*, 215-239.
23. Cladouhous, T.T., R.W. Allmendinger 1993: Finite strain and rotation from fault-slip data., *J. of Struct. Geol. 15*, 771-784
24. Udias, A. 1999: *Principles of Seismology.*, Cambridge University Press, 475 pp.