

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO
PEDAGOŠKA SMER

Mateja Erjavec

POPULACIJSKA DINAMIKA ČLOVEŠTVA
Diplomsko delo

MENTOR: dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, 2012

Povzetek

V prvem delu diplomske naloge so predstavljeni neempirični modeli, ki pojasnjujejo rast populacije v preteklosti z uporabo diferencialnih enačb prvega reda. V nadaljevanju je predstavljena Kapitza fenomenološka teorija, v kateri domneva, da je rast populacije sebi podobna skozi celotno zgodovino človeštva in na podlagi tega so izpeljani vsi glavni rezultati teorije. Rast populacije je bila do pred kratkim odvisna od kvadrata celotnega prebivalstva, sedaj pa gremo skozi demografsko tranzicijo, po kateri bo prišlo do stabilizacije populacije. Glavna konstanta je reda 10^5 , mikroskopski parameter teorije pa je povprečna življenjska doba. S fenomenološko teorijo dobimo populacijsko dinamiko skozi celotno zgodovino in jo, glede na rast, razdelimo v 3 epohe. Oglejmo si še, kako se bo število ljudi spreminjalo v prihodnosti.

Ključne besede

populacija, demografska tranzicija, Kapitza, hiperbolična rast, epoha, limita populacije, stabilnost populacije, nova faza človeštva

Abstract

In the first part of the thesis offers a presentation of non-empirical models, which explain the growth of the population in the past by means of differential equations. In the next section, the phenomenological theory is dealt with. Kapitza assumes that the growth of population has been self-similar throughout the history of mankind on the basis of which, the main results of the theory are founded on. Until recently, population growth has depended on the square of the total population. However, we are now witnessing the demographic transition, which will result in a more stable population. The main constant is the order of 10^5 , while the microscopic parameter of the theory is the average lifespan. The phenomenological theory provides the dynamics of the population throughout history, which can be, given the growth, divided in 3 epochs. The remaining part of the thesis is concerned with how the number of people will continue to change in the future.

Key words

population, demographic transition, Kapitza, hyperbolic growth, epoch, limit of the population, population stability, new phase of mankind

Kazalo

1	Uvod	4
2	Demografska tranzicija	7
3	Linearna rast	12
4	Zgodovina	13
5	Neempirični modeli	18
5.1	Matematični model, ki upošteva nosilno kapaciteto Zemlje . . .	18
5.2	Matematični model, ki temelji na bruto domačem proizvodu . . .	19
5.3	Matematični model, ki upošteva pismenost populacije	21
5.4	Ocena modelov	21
6	Fenomenološka teorija	23
7	Epohe	32
8	Limita populacije in število ljudi, ki so kadarkoli živeli	34
9	Populacijska rast in model	35
10	Stabilnost populacije	38
11	Stabilnost rasti	39
12	Struktura časa in demografske periode	42
13	Prihodnost	46
13.1	Enačbe Volterra–Lotka za staro in novo fazo človeške populacije	47
13.1.1	Stabilnost modela plenilec–plen	49
13.2	Stabilnost populacije v prihodnosti	51
14	Zaključek	55

1 Uvod

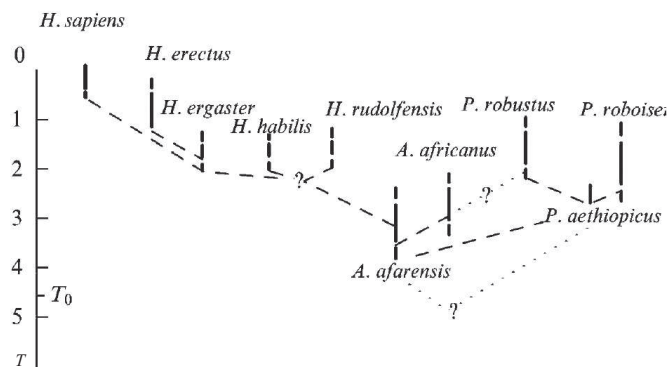
Človeštvo se trenutno sooča s precej različnimi težavami, od onesnženega okolja, revščine, lakote, globalnega segrevanja ozračja, brezposelnosti, razseljenosti, konfliktov, do družbene krize. Problemi so medsebojno povezani in vplivajo drug na drugega. Mogoče celo največji problem človeštva pa je številčnost človeške populacije in njena rast. V razvitih državah se je rast populacije praktično že ustavila, kar vodi do spremembe starostne strukture populacije. V državah v razvoju pa je rast še vedno zelo velika in prispeva k veliki večini globalnega povečanja števila prebivalcev.

Pri razlagi teh problemov imajo socialni znanstveniki in demografi veliko težav, saj se prepleta veliko stvari. Zato je potrebno najti drug pristop za ta zapleten sistem velikih razsežnosti. Temeljiti mora na opisu dinamike s fenomenološko interakcijo, ki upošteva vse relevantne faktorje: socialne, ekonomske, kulturne, moralne, etične in biološke, ki prispevajo k rasti populacije.

Za opis obnašanja molekul zraka v zaprti posodi potrebujemo matematičen model, ki ne bo napovedal dolgoročne dinamike sistema. Obnašanje molekul zraka lahko opišemo s preprostimi enačbami, ki opisujejo makrodinamiko glavnih parametrov. Podobno lahko naredimo tudi za človeško populacijo. Da dobimo demografsko prihodnost neke konkretne družine, potrebujemo kompleksen matematičen model. Za sistem, ki vključuje veliko število ljudi, pa bi potrebovali bolj preprost model.

Človeška vrsta se je pred 4–5 milijoni leti nazaj razvila iz človečnjakov ali hominidov (slika 1). Začetni proces človeškega razvoja spremljajo razne fluktuacije in pojav druge, vzporedne evolucijske linije (slika 1). V paleolitiku, 2–1,5 milijona let nazaj, se je pojavila prva človeška oblika v zgodovini, in sicer spretni človek ali *Homo habilis*, ki je začel z izdelavo orodja. Takrat se je pričelo sebi podobno širjenje populacije na podlagi socialnega in tehnološkega napredka. Naslednja stopnja v razvoju je bil *Homo erectus* ali pokončni človek. Pojavil se je v Afriki in se razširil v Evropo ter Azijo. Poznal in uporabljal je ogenj, kar je bil pomemben korak pri razvoju človeštva. Ko so le tega lahko tudi obvladovali, se je rodila tehnološka in informativna družba. Kasneje, v mlajšem paleolitiku, se je razvil *Homo sapiens*, in za njim, pred 40.000 leti, so se pojavili neandertalci (*Homo sapiens neanderthalensis*). Znali so uporabljati ogenj in izdelovati različno orodje ter orožje. Verjetno je v tem času prišlo tudi do razvoja govora. Neandertalci so bili že zelo podobni današnjemu človeku [1].

Antropologi in biologi navajajo, da se v biološkem smislu naša vrsta v zadnjih milijonih letih ni bistveno spremenila [2].



Slika 1: Filogenetska shema ločitve hominidov od hominoidov pred približno 4,5 milijoni leti. Prikazana je tudi vzporedna evolucijska linija. Vir: [3]

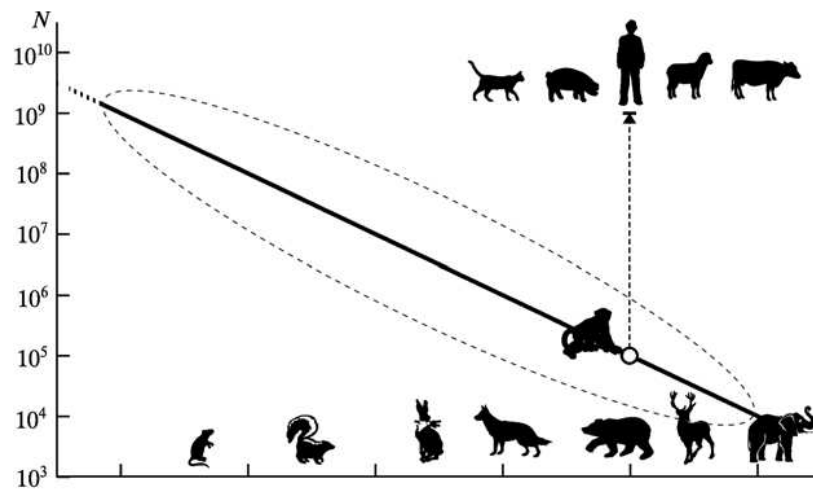
Ljudje pripadamo vrsti *Homo Sapiens* ter imamo enako število kromosomov, 46, po čemer se razlikujemo od ostalih primatov. Za razliko od živali, katerih populacija ima omejeno rast, odvisno od tega, koliko lahko dano okolje prenese, je človek dosegel vzdržno rast. Populacija ljudi je 10^5 -krat večje od drugih živali primerljive velikosti. Poleg ljudi so v istem rangu le še domače živali (slika 2).

Pred 2000 leti je človeška populacija po ocenah paelodemografov štela 300 milijonov. To število je naraščalo počasi in zelo dolgo časa se številčnost populacije ni spremenila. Človeštvo je potrebovalo kar 1600 let, da se je število podvojilo na 600 milijonov. V zadnjih dveh stoletjih, po industrijski revoluciji, je prišlo do hitrega povečanja človeške populacije [4]. Leta 1804 je populacija dosegla 1 milijardo ljudi, 123 let kasneje (leta 1927) 2 milijardi, leta 1960 (33 let kasneje) 3 milijarde, 14 let kasneje, leta 1974, 4 milijarde ter 5 milijard leta 1987 (13 let kasneje). 12 let kasneje, v letu 1999, nas je bilo 6 milijard. Po letu 1950 je človeštvo potrebovalo 40 let, da se je podvojilo od 2,5 milijarde na 5 milijard [5].

31. oktobra 2011 so strokovnjaki iz Združenih narodov sporočili, da nas je 7 milijard [6]. Trenutna svetovna populacija se dnevno poveča za približno 225.000 ljudi na dan, kar nam da 80 milijonov na leto [7]. Natančnejše število ljudi in globalno število rojstev in smrti na dan je dosegljivo na [7].

Ta pospešena rast vzbuja številne skrbi o trajanju le te in predvsem, da lahko človeštvo povzroči nepopravljivo škodo na ekosistemu, globalnih vremenskih sistemih itd..

Rast prebivalstva je po svetu zelo neenakomerno razporejena. Kar 97 %



Slika 2: Številčnost vrste glede na maso telesa. Populacija ljudi je 100.000-krat večja od drugih živali primerljive velikosti. Vir: [3]

celotnega povečanja prebivalstva se namreč dogaja v manj razvitih državah oz. v državah v razvoju (tabela 1). V razvitih državah se bojujejo z upadom števila prebivalstva in njihovim staranjem.

Območje	rast populacije (v milijardah)		
	1990	2000	2025
cel svet	5,3	6,3	8,5
razvite države	1,2	1,3	1,4
države v razvoju	4,1	5	7,1
Evropa	0,50	0,51	0,51

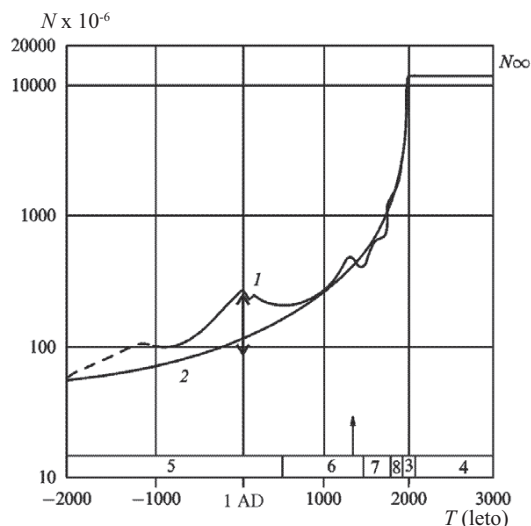
Tabela 1: Rast populacije [8].

2 Demografska tranzicija

Trenutno smo v obdobju demografske tranzicije, kar pomeni prehod med obdobjem hitre rasti populacije, ki mu sledi zmanjšanje hitrosti rasti in kasneje stabilizacija populacije (slika 3). Če do tranzicije ne bi prišlo, potem bi bilo na Zemlji leta 2000 že 8 milijard ljudi, kar je 2 milijardi več, kot jih je dejansko bilo.

Na sliki 3 je rast populacije prikazana skozi zadnjih 4000 let. Velikost populacije, N , je predstavljena na logaritemski skali kot funkcija časa. Na tej dvojni logaritemski skali bodo vse enačbe višjih stopenj prikazane z linearnimi črtami. Iz grafa lahko razberemo limito populacije, ki je $N_{\infty} = 12$ milijard.

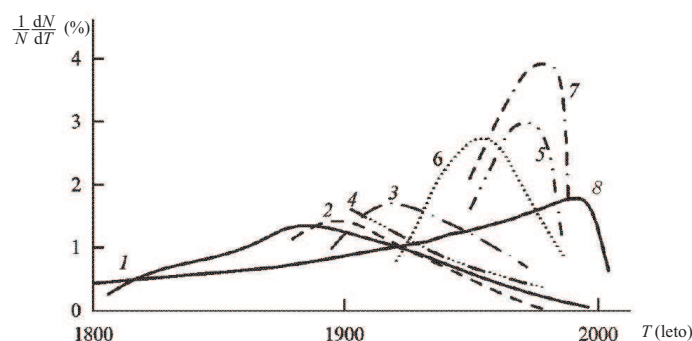
Demografsko tranzicijo je odkril francoski demograf Landry za francosko populacijo in jo smatral kot najpomembnejši dogodek v celotni zgodovini človeštva.



Slika 3: 1 – Število prebivalcev od 2000 pr. n. št. do leta 3000 n. št., 2 – populacijska katastrofa, 3 – demografska tranzicija, 4 – stabilizacija populacije, 5 – antična doba, 6 – srednji vek, 7 – moderni čas, 8 – nedavna zgodovina, ↑ – kuga. Limita populacije je $N_{\infty} = 12$ milijard. Vir: [3]

Kot začetek tranzicije označujemo točko, kjer je hitrost rasti populacije najvišja oz. kjer pade stopnja smrtnosti (slika 4). Konec tranzicije je v točki, kjer hitrost rasti najbolj pade. Trajanje tranzicije je zelo različno, giba pa se med 190 in 64 let. Prve države, ki so šle skozi tranzicijo so bile Francija,

Anglija in Švedska [3].

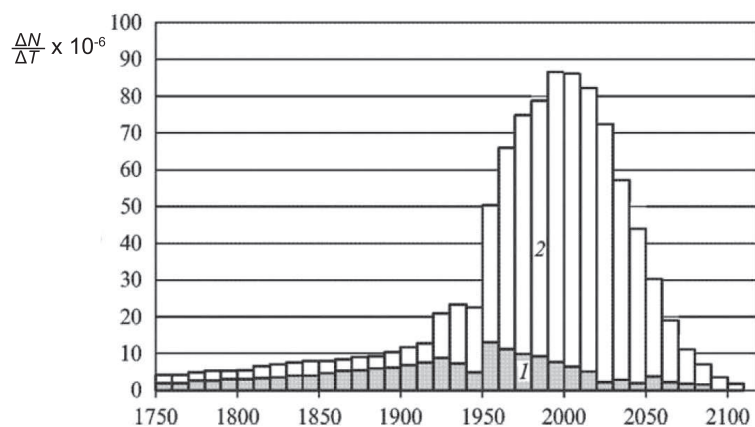


Slika 4: Relativna hitrost rasti med demografsko tranzicijo preide maksimum ter nato začne padati. 1 – Švedska, 2 – Nemčija, 3 – Rusija, 4 – ZDA, 5 – Mavritius, 6 – Šrilanka, 7 – Kostarika. Vir: [3]

Demografsko tranzicijo lahko uporabimo za posamezno državo, ali pa za celotno populacijo. Večina držav je trenutno v tretji stopnji, najbolj razvite pa so v četrti. Globalna demografska tranzicija se je začela v 60-ih letih prejšnjega stoletja in še traja (slika 5). Skupaj z njo je prišlo tudi do večih socialnih revolucij in kulturnega razvoja. Ni naključje, da je bila Francija prva država, kjer se je začela tranzicija, kmalu po tem pa je prišlo do znane francoske revolucije.

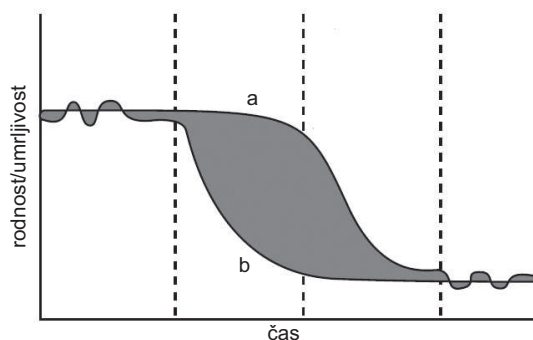
Demografska tranzicija razloži vzorec rasti populacije v štirih delih (slika 6). Na začetku sta tako rodnost kot umrljivost visoki, a obe približno enaki. V drugem delu se število smrti zniža, število rojstev pa ostane enako visoko, kar povzroči rast populacije. V tretji fazi se število rojstev zniža, kar je posledica ekonomskega razvoja, izboljšanja življenjskega standarda in razvoja zdravstva. V zadnji, četrti stopnji, pa sta obe, rodnost in umrljivost, nizki (približno 1 % na leto) in se rast populacije ustavi ter stagnira [3].

Na koncu demografske tranzicije hitrost rasti doseže 0. To se zgodi, ko se rodnost ustavi pri nadomestni stopnji 2,1, ko stopnja smrtnosti neha padati in ko se starostna struktura prebivalstva prilagodi rodnosti in smrtnosti po tranziciji [9]. Stopnja smrtnosti pa se verjetno še ne bo tako kmalu ustavila, saj se zaradi razvoja medicine in sprememb v načinu življenja, pričakovana življenjska starost povečuje. Do leta 2100 naj bi bila pričakovana življenjska doba med 66 in 97 let, medtem ko naj bi se do leta 2300 dvignila in naj bi bila med 87 in 106 leti [10].



Slika 5: Rast svetovne populacije v letih med 1750 in 2100. Letna rast je povprečena čez desetletje. 1 – Države v razvoju, 2 – razvite države. S sivo je označen naravni prirastek. Vir: [11]

Po podatkih Statističnega urada Republike Slovenije [12] je bilo v Sloveniji 1.1.2010 2.047.000 Slovencev. V letu 2010 se je rodilo 22.300 otrok, kar nam da 1,1 % stopnjo rojstev. Umrlo je 18.600 prebivalcev, kar nam da 1,0 % stopnjo smrti. Po teh podatkih je Slovenija v četrti fazi demografske tranzicije z nizko stopnjo rojstev in smrti.



Slika 6: Stopnje demografske tranzicije. V prvem delu sta rodnost in umrljivost visoki, v drugem delu se umrljivost zmanjša. V naslednjem delu se zmanjša tudi rodnost, v zadnjem delu pa sta obe nizki. a – rodnost, b – umrljivost. Siv del predstavlja naravno rast prebivalstva. Vir: [4]

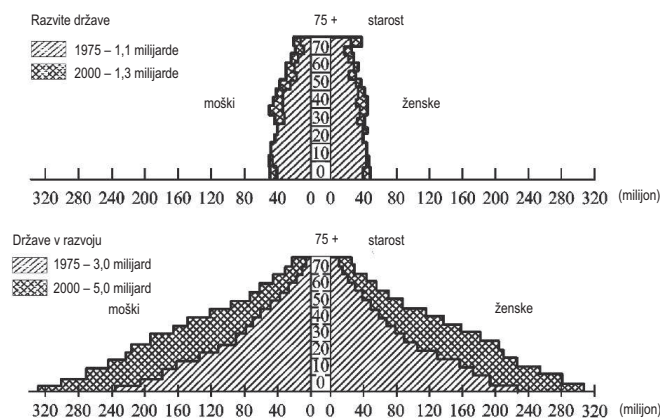
V modernem svetu se bo demografska tranzicija odvijala veliko hitreje kot v Evropi, kjer začetki tranzicije segajo v konec 18. stoletja. Bolj ko gre

demografska tranzicija h koncu, hitrejše so tranzicije v posameznih državah (slika 4), kar je posledica interakcij med državami. Vsaka država bo šla skozi demografsko tranzicijo, v kateri bo hitrost rasti dosegla maksimum, nato pa se bo število prebivalcev stabiliziralo. Na sliki 4 vidimo, kako se relativna hitrost rasti spreminja za posamezne države.

Število otrok na žensko se zmanjšuje in je sedaj padlo pod nadomestno stopnjo 2,1 otroka na žensko v večini razvitih držav. Natančneje, pod nadomestni nivo je padlo ali ga doseglo 82 držav, večina je v Evropi [13]. V Sloveniji pride na žensko 1,51 otroka. Globalno na žensko pride 2,6 otrok. Nadomestna stopnja je 2,1, ker 1 otrok od 21 umre preden doseže starost za razmnoževanje [14].

Najpomembnejši faktor, ki vpliva na spremembe med tranzicijo, je izobrazba žensk. Pomemben je tudi razvoj zdravstva, zaradi katerega je stopnja umrljivosti novorojencev nižja, daljša pa je življenjska doba [3].

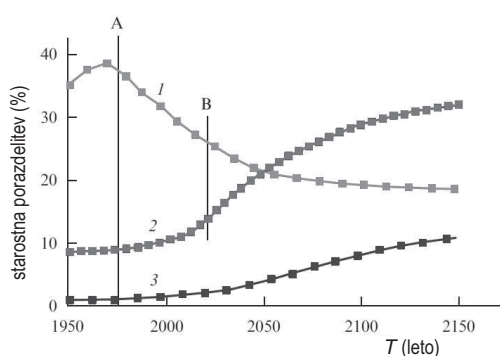
Ena izmed stalnih sprememb zaradi tranzicije je tudi starostna sprememba populacije (slika 7). Povprečna življenjska doba se je zvišala in sedaj znaša 65 let. V rastoči populaciji je največ otrok, najmanj pa starostnikov (slika 7, 8). V populaciji, ki je v tranziciji, je število ljudi v vseh starostnih intervalih približno enako. Te spremembe v starostni strukturi vodijo k zmanjšanju števila rojstev in povečanju števila starejših ter s tem vplivajo na rastoče stroške v zdravstvu, šolanju in zaposlitvi.



Slika 7: Razporejenost prebivalstva glede na starost in spol v razvitih državah (zgoraj) in državah v razvoju (spodaj). Vir: [3]

Demografsko tranzicijo spremljata ekonomska rast in preseljevanje ljudi s podeželja v mesta. Napoveduje se, da bo po koncu tranzicije, v mestih živelo 75 % svetovne populacije [14].

Demografsko tranzicijo želimo opisati z matematičnim modelom, ki temelji na demografskih podatkih. Le ti opisujejo spremembe v staranju prebivalstva in migracijah samo za posamezne države. Hitrost rasti je opisana z rodno-stjo in umrljivostjo ter ne upošteva, da je svetovna populacija neravnovesno razvijajoč dinamičen sistem. V matematičnem modelu pa je zajeta celotna populacija, ne glede na državo bivanja, starost, spol. Skupno število ljudi na svetu označimo z N . Svetovna populacija je razvijajoč in rastoč sistem, ki se spreminja s časom, $N(T)$, in zato lahko izdelamo matematičen model, ki opisuje vse spremembe v sistemu.



Slika 8: Spremembe v starostni strukturi populacije 1950–2150 po podatkih ZN. 1 – pod 14 let, 2 – nad 65 let, 3 – nad 80 let. A – države v razvoju, B – razvite države. Vir: [11]

Najprej pa se moramo vprašati, če svetovno populacijo sploh lahko vzamemo za sistem. Dandanes sploh ni dvoma o tem, saj je svet medsebojno povezan bolj kot kadarkoli. Regije, države, celine so med seboj povezane s trgovanjem, prevozništvom, migracijami in izmenjavo informacij. V preteklosti pa temu ni bilo tako. Hitrost rasti človeštva je bila počasnejša ter čas interakcije daljši, ampak odvisnost od globalne populacije ostaja, saj so se tudi vse relevantne spremembe dogajale počasneje [8].

Omenjeno je bilo, da je izmenjava informacij tista, ki je pomembna, da je populacija med sabo povezana in da jo obravnavamo kot sistem. Ampak informacija sama je pasivna in ne pripelje do rasti in razvoja človeštva. Postane pa lahko del ekonomskega razvoja in s tem pripomore pri rasti.

3 Linearna rast

Rast populacije in število prebivalcev predstavimo kot funkcijo časa. Za začetek si oglejmo linearno rast.

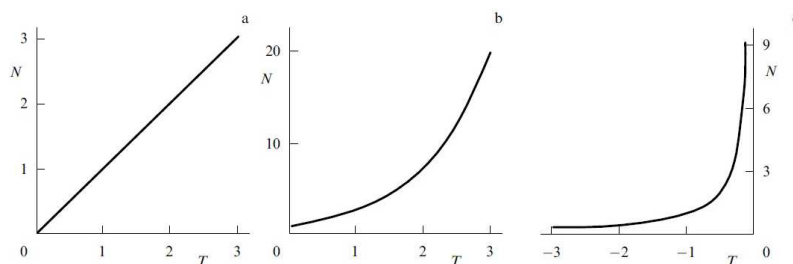
Linearna rast (slika 9a) je najpreprostejši primer rasti. Pri njej se populacija povečuje sorazmerno s časom

$$\frac{dN}{dT} = A, \quad (1)$$

iz česar dobimo

$$N = AT.$$

Začetni čas in populacijo zaradi enostavnosti postavimo na 0. Linearna rast ni odvisna od absolutne velikosti populacije.

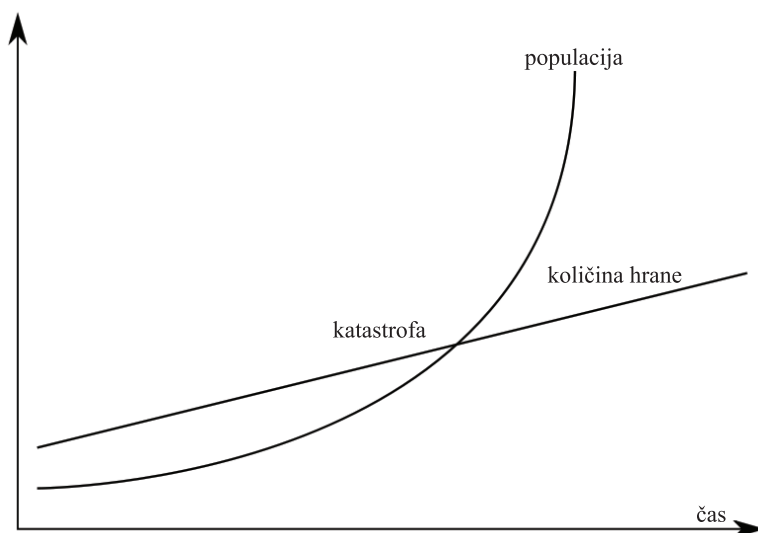


Slika 9: Modeli za a) linearno, b) eksponentno in c) hiperbolično rast. Vir: [15]

Globalna populacija se povečuje za približno 80–90 milijonov na leto, danes pa šteje več kot 7 milijard ljudi. Če tako hitrost rasti linearno ekstrapoliramo v preteklost, potem bi se lahko razvoj človeštva začel pred približno 80-imi leti [3]. To je seveda nesmiselno in vidimo, da je linearni model ter njegovo ekstrapoliranje zelo omejeno. Najti bomo torej morali kakšen drug matematičen model.

4 Zgodovina

Prvi, ki je podal matematičen model za rast populacije, je bil Thomas Malthus leta 1798, ko je izšel njegov Esej o prebivalstvu (Essay on the principle of population). Opazil je, da se je število evropskih priseljencev v Ameriki po njenem odkritju, podvojilo v 25 letih [3]. Priseljenci so imeli neomejene količine prostora in ostalih virov (hrane, energije, surovine, itd.). Malthus je poskušal najti povezavo med viri hrane in rastjo populacije. Predpostavil je, da produkcija hrane raste linearno in je počasnejša od eksponentne rasti prebivalstva (slika 10). Trdil je, da bo zaradi vojn, lakote in bolezni, prišlo do populacijske katastrofe ter se bo rast človeške populacije ustavila.



Slika 10: Malthus je trdil da se količina hrane povečuje linearno, populacija pa eksponentno. S tako dinamiko sčasoma pride do katastrofe. Vir: [16]

Šele po tem, ko je Malthus objavil svoje delo, je dinamika človeške populacije privabila tudi ostale. Njegove ideje so imele vpliv na številne ekonomiste, politike, demografe in filozofe. Ponovno se je zanimanje za njegovo delo pojavilo s poročilom Rimskega kluba leta 1972 [17], kjer so iskali posledice hitro rastočega svetovnega prebivalstva in omejenih zalog virov.

Malthusov model je prvi matematični model, ki opisuje rast populacije. Število posameznikov v populaciji ob času T označimo z $N(T)$. Z b in d označimo povprečno stopnjo rodnosti in umrljivosti na prebivalca. V času ΔT je število rojstev v populaciji $b\Delta TN$ in število smrti $d\Delta TN$. Število

ljudi N v času $T + \Delta T$ je

$$N(T + \Delta T) = N(T) + b\Delta TN(T) - d\Delta TN(T). \quad (2)$$

Enačbo (2) preoblikujemo

$$\frac{N(T + \Delta T) - N(T)}{\Delta T} = (b - d)N(T) \quad (3)$$

in pošljemo $\Delta T \rightarrow 0$. Dobimo

$$\frac{dN}{dT} = (b - d)N. \quad (4)$$

Označimo $r = b - d$. Hitrost rasti je sorazmerna z velikostjo populacije

$$\frac{dN}{dT} = rN. \quad (5)$$

Rešitev enačbe (5) je

$$N(T) = N_0 \exp(rT). \quad (6)$$

N_0 predstavlja začetno velikost populacije in če velja $r > 0$ dobimo eksponentno rast populacije (slika 9b).

Eksponentna rast je odvisna le od sposobnosti človeštva za razmnoževanje in ni odvisna od interakcij v sistemu. Če populacija nima naravnih omejitev, je njena rast eksponentna.

Če sedanjo stopnjo rasti v preteklost ekstrapoliramo eksponentno, pridemo do nesmiselnosti [3]. Predvidevajmo, da se je populacija v preteklosti podvojila na vsakih 40 let. Število ljudi v sedanjosti zapišemo z 2 potenco, dobimo $\sim 2^{32}$, kar pomeni 32 podvojitvenih časov, kar je 1280 let. Torej bi morala Adam in Eva živeti v 7. stoletju. Tudi če podvojitveno dobo povečamo na 400 let, bi se človeštvo pričelo v neolitiku. Takrat pa je bilo na Zemlji že 10–15 milijonov ljudi, torej ima tudi eksponentna rast omejen obseg.

Tako eksponentna kot linearna rast sta veljavni v krajšem časovnem intervalu, ne predstavljata pa dolgega časovnega razvoja rasti populacije.

Eksponentna rast populacije skozi daljše obdobje je nerealistična, saj se rast sčasoma ustavi zaradi prevelike porabe virov (prostor, hrana, itd.) in notranje omejitve (bolezni, umiranje zaradi pomanjkanja hrane, stalni stres zaradi prenaseljenosti, itd.). Tako situacijo imenujemo Malthusova katastrofa.

Verhulst je leta 1938 predlagal logistično enačbo [18], pri čimer je upošteval nosilno kapaciteto Zemlje K_z . Le ta nam pove številčnost populacije, ki jo Zemlja oz. okolje še lahko prenese. Trenutne ocene za K_z so zelo različne,

zaradi različnih predpostavk o standardu življenja in stopnji tehnološkega razvoja. V [19] je ocena 40–50 milijard, v [13] pa najdemo številko 1000 milijard, kar je 125-kratna populacija danes. To bi dosegli v primeru, da bi vsi reciklirali, vozili avtomobile na sončno energijo, živeli v majhnih, ti. sončnih domovih, učinkovito porabljali energijo itd.. Za mnoge pa so lakota, stradanje, bolezni, revščina, nepismenost, onesnaženost, brezposelnost in neplodna pokrajina znak, da že presegamo nosilno kapaciteto.

Logistična enačba ima obliko

$$\frac{dN}{dT} = rNF(N), \quad (7)$$

kjer funkcija $F(N)$ poskrbi za upoštevanje okolja. Populacija raste eksponentno s hitrostjo r , ko je N majhen, zato mora funkcija izpolnjevati pogoj $F(0) = 1$. Naslednji pogoj je $F(K_z) = 0$, kar pomeni da se rast populacije ustavi ko dosežemo nosilno kapaciteto. Upoštevamo še, da se populacija zmanjšuje, ko presežemo nosilno kapaciteto, $F(N) < 0$ ko $N > K_z$. Najpreprostejša funkcija, ki upošteva vse zgornje pogoje je $F(N) = 1 - N/K_z$. Linearno funkcijo $F(N)$ vstavimo v (7) in dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{dN}{dT} = rN \left(1 - \frac{N}{K_z}\right). \quad (8)$$

Ločimo spremenljivki $\frac{dN}{N(1-\frac{N}{K_z})} = r dT$ in integriramo

$$\int \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K_z}\right)} = \int r dT.$$

Razcepimo na vsoto parcialnih ulomkov

$$\int \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K_z}\right)} = \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1/K_z}{1 - N/K_z} \right) dN,$$

kar nam po integriranju da $\ln|N| - \ln\left|1 - \frac{N}{K_z}\right| = rT + c$. Sledi $\frac{N}{1-N/K_z} = C \exp(rt)$, kjer je C konstanta. Izpostavimo N

$$N = \frac{K_z C \exp(rT)}{K_z + C \exp(rT)}$$

in upoštevamo še začetni pogoj $N(0) = N_0$ ter dobimo izraz za konstanto C : $C = \frac{N_0 K_z}{K_z - N_0}$. Konstanto vstavimo v izraz za N in dobimo rešitev enačbe (8)

$$N(T) = \frac{N_0}{N_0/K_z + (1 - N_0/K_z) \exp(-rT)}. \quad (9)$$

Začetna maloštevilčna populacija s časom raste, vse dokler ne doseže nosilne kapacitete, nato se rast konča.

Ogledamo si rezultat enačbe (9) v limitnih primerih: a) $N(0) = N_0$; b) $\lim_{T \rightarrow \infty} N(T) = K_z$; c) $\lim_{K_z \rightarrow \infty} N(T) = N_0 \exp(rT)$. Rešitev za brezdimenzijsko logistično enačbo

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta(1 - \eta),$$

kjer je $\eta = N/K_z$, $\tau = rT$ vidimo na sliki 11. $\eta_0 = N_0/K_z$ je začetno stanje za brezdimenzijsko logistično enačbo.

Enačba (9) dokaj dobro opisuje rast manjših skupnosti, pri opisu dolgotrajne rasti človeške populacije pa se ne izkaže. Model nam ne pove, kdaj bomo izumrli. Tudi če štartamo z majhno populacijo, bo le ta vedno prišla do nosilne kapacitete K_z . Za človeško populacijo logistična enačba ni najboljša, saj ne upošteva tehnološkega razvoja, socioloških trendov in ostalih faktorjev. Kljub temu nekateri avtorji najdejo dobro ujemanje med demografskimi podatki in rešitvami logistične enačbe, spet drugi pa predlagajo model, ki temelji na premaknjeni logistični enačbi [20]

$$\frac{dN}{dT} = rN \frac{1 - N(T-t)}{K_z}. \quad (10)$$

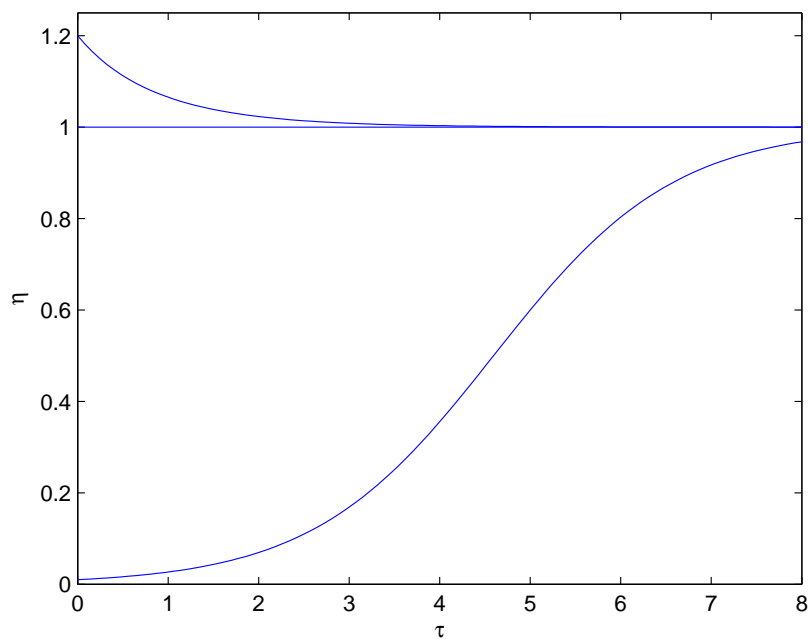
Prvi, ki je podal empirično enačbo za številčnost populacije je bil, von Foerster leta 1960

$$N(T) = \frac{179 \cdot 10^9}{(2027 - T)^{0.99}}. \quad (11)$$

Enačba opisuje hiperbolično rast svetovne populacije.

S pomočjo von Foersterjeve enačbe lahko izračunamo tudi svetovno populacijo izbranega leta [21], le malo jo moramo spremeniti. Za konstanto v števcu vzamemo $215 \cdot 10^9$. Poglejmo za leto 1970: najprej izračunamo, kako oddaljeno je leto 1970 od 2027 in dobimo 57. Sedaj pa konstanto $179 \cdot 10^9$ delimo z razliko med obema letoma ter dobimo 3,7719 milijarde ljudi. Po podatkih ameriškega urada za popis prebivalstva, U.S. Census Bureau-ja, in njihovem poročilu l.2006, je svetovna populacija leta 1970 štela 3,7081 milijard ljudi, seveda pa ta podatek ni nujno točen, saj popisa prebivalstva v tistem letu v mnogih državah ni bilo ali pa ni zanesljiv. Kljub temu pa ocena po von Foersterjevi enačbi pade v napako empiričnih ocen.

Za leto 1900 je razlika let 127. Ko delimo konstanto C s 127 dobimo 1,693 milijarde, kar prav tako pade v empirično oceno takratne populacije (1,600–1,710 milijarde). Za leto 1800 je dobimo 0,947 milijarde, empirične ocene pa so med 0,900 in 0,980 milijarde.



Slika 11: Prikaz logistične rasti pri začetnih pogojih: $\eta_0 = 0,02, 1,0$ in $1,2$. $\eta = N/K_z$, $\tau = rT$. Tudi če je začetna populacija majhna, vedno pride do nosilne kapacitete K_z .

Kasneje je Horner predlagal podobno enačbo

$$N(T) = \frac{C}{T_1 - T} = \frac{200 \cdot 10^9}{2025 - T}. \quad (12)$$

5 Neempirični modeli

Enačbi (11) in (12) sta empirični. Razvitih pa je bilo tudi nekaj neempiričnih matematičnih modelov, ki poskušajo iz empiričnih parametrov izpeljati enačbo (12).

5.1 Matematični model, ki upošteva nosilno kapaciteto Zemlje

Pri večini modelov pospešeno rast populacije pripišemo pozitivnemu feedbacku med velikostjo populacije in nosilno kapaciteto Zemlje, K_z . Enačbi (8) se doda prispevek, ki upošteva počasno dinamiko populacijske rasti zaradi počasnega povišanja nosilne kapacitete Zemlje

$$\frac{dK_z}{dT} = \gamma K_z N. \quad (13)$$

Koeficient γ določa hitrost, s katero človeška populacija povečuje nosilno kapaciteto Zemlje. Le ta je v izbranem času sorazmerna nosilni kapaciteti v tistem času in številu prebivalcev.

Enačba za rast populacije (8) se z upoštevanjem prispevka spremeni [22]

$$\frac{dN}{dT} = r K_z N \left(1 - \frac{N}{K_z} \right). \quad (14)$$

Enačba upošteva, da je hitrost populacijske rasti sorazmerna z nosilno kapaciteto.

Imamo torej dve različni hitrosti rasti populacije. Hitrejšo dobimo iz enačbe (8) in je $\frac{1}{N} dN/dT \sim r$, počasnejša pa je povezana s spremembo nosilne kapacitete ter jo dobimo iz (13) in je $\frac{1}{K_z} dK_z/dT \sim \gamma N$. Če velja $r \gg \gamma N$, potem je velikost populacije $N \approx K_z$ in (13) se spremeni

$$\frac{dN}{dT} \approx \gamma N^2. \quad (15)$$

Rešitev enačbe (15) je (12), kjer je $C = \gamma^{-1}$ in $T_1 = T_0 + 1/\gamma N_0$, pri čemer sta T_0 , N_0 začetna pogoja. Pri približevanju T_1 se populacija povečuje in razlike med počasno ter hitro dinamiko sčasoma izginejo. V limiti $\gamma N \gg r$, enačba (13) daje eksponentno rast populacije $N \propto \exp(rT)$.

Pri tem modelu pride do hitre demografske in tehnološke rasti. Prikazuje, da je interakcija med kulturo in demografijo izredno pomembna, a ne upošteva nekaterih potencialno pomembnih faktorjev. Npr. upošteva samo kulturo,

kjer se rast populacije spodbuja, prav tako pa predvideva, da se tehnologija v celoti prenaša med posameznimi generacijami [22].

Zemljino nosilno kapaciteto smo izboljšali s tehnološkim napredkom kot npr. uporaba orodja in ognja, razvojem agrikulture, uporaba fosilnih goriv, gnojenje, razširitev na nova območja in z odstranitvijo omejitvenih faktorjev z razvojem cepiv, pesticidov, antibiotikov, itd. [5].

5.2 Matematični model, ki temelji na bruto domačem proizvodu

Nosilne kapacitete ne moremo izmeriti direktno. Metodo, ki nosilno kapaciteto upošteva posredno, je razvil Kremer. Z upoštevanjem ekonomije je napravil največji korak h kompaktnemu matematičnemu modelu. Njegov model temelji na dveh predpostavkah.

Prva je, da je hitrost rasti sorazmerna hitrosti rasti tehnologije [21]. Skozi celotno zgodovino človeštva je bila populacija omejena s tehnologijo, ki je določala zgornjo mejo nosilne kapacitete Zemlje. Če ne bi prišlo do napredka in bi se vsi ukvarjali z nabiralništvom, bi na Zemlji lahko živelo največ 10 milijonov ljudi. Tudi obsežnejše kmetijstvo lahko preživi le omejeno število ljudi. Rast populacije je možna le z intenzivnejšim kmetijstvom in tehnološkim napredkom.

Druga predpostavka je, da tehnološki razvoj ni konstanta. Hitrost rasti tehnologije je sorazmerna celotni populaciji

$$\frac{dA}{dT} = hNA, \quad (16)$$

kjer je A stopnja tehnološkega napredka [21]. Absolutna rast tehnologije v danem trenutku je sorazmerna tehnološki stopnji v tistem trenutku. Prav tako je hitrost tehnološke rasti proporcionalna s številom prebivalcev N . V večji populaciji je več možnosti za potencialne izumitelje oz. je več ljudi dovolj pametnih, da pride do neke nove ideje [21].

Ideja Kremerjevega modela je, da je rast BDP-ja posledica tehnološke rasti. Povezal je BDP s stopnjo tehnološkega razvoja A kot $BDP \propto N^{\Phi_1} A^{\Phi_2}$, kjer sta Φ_1 in Φ_2 eksponenta, ki ju moramo najti empirično [18].

Bruto domači proizvod, $BDP = N(S + m)$, je najpomembnejši faktor pri določanju počasne dinamike populacijske rasti. S označuje presežek produktov na osebo, m pa označuje stopnjo minimalnih stroškov bivanja na prebivalca. Kremer predvideva, da se populacija povečuje nad nekim m , ravnovesnim stanjem. Če se m manjša, se zmanjšuje tudi število ljudi.

Kremerjev model poda hiperbolično rast populacije. Demografsko tranzicijo opiše kot posledico visokih prihodkov, kar vodi do manj rojstev. Njegov

opis ni dovolj jasen in ne ustreza, saj ne definira izraza tehnološka stopnja.

Korotayev, Malkov in Khaltourina so na podlagi Kremerjeve ideje razvili model, v katerem je dinamična spremenljivka, ki meri tehnološki napredek, presežek produktov na osebo S . Najpreprostejši model sestavljata enačbi

$$\frac{dN}{dT} = \frac{rNS}{m} \quad (17)$$

$$\frac{dS}{dT} = \gamma NS. \quad (18)$$

r predstavlja hitrost populacijske rasti in γ povprečno kreativno zmožnost ene osebe. Parameter m je vpeljan zato, da je enačba (17) konsistentna z enačbo (5) [18].

Enačba (18) upošteva Kremerjevo idejo. Opazimo, da je za $\Phi_1 \sim 1$ definicija tehnološke stopnje $A \approx (BDP/N)^{1/\Phi_2}$ zelo podobna definiciji presežnih produktov $(S + m) \approx BDP/N$.

Ko delimo enačbo (17) z (18) dobimo povezavo med N in S , in sicer $N = \frac{r}{m\gamma}S$. Enačbi (17–18) opišeta pozitiven feedback med presežkom produktov in rastjo populacije na eni strani ter pozitiven feedback med naraščanjem populacije in rastjo presežnih produktov na drugi strani [18].

Enačbi (17–18) predvidevata, da velja $S/m \ll 1$, kar opisuje čas pred letom 1870, ko je bilo $S/m \sim 1$. Da bo enačba veljavna tudi po tem letu predvidevamo, da presežek produktov uporabimo za nastanek novih delovnih mest [18]. Relacija med nosilno kapaciteto in presežkom produktov je $K_z = BDP/m = N(S/m + 1)$. Zamenjamo enačbo (17) z logistično enačbo, kjer K_z izrazimo s S

$$\frac{dN}{dT} = \frac{rNS}{S + m}. \quad (19)$$

Zgornja enačba predstavlja negativen feedback med populacijsko rastjo in številčnostjo populacije [18]. To stabilizira rast in posledično enačbi (18–19) ne divergirata. Rast N se sčasoma ustavi, medtem ko je hitrost rasti S neomejena. Če delimo (18) z (19) dobimo relacijo med N in S ,

$\frac{dN}{dT} = \frac{r}{\gamma(S+m)} \frac{dS}{dT}$, katere rešitev je

$$S(T) = m \left(\exp \left(\frac{N(T)}{N_0} \right) - 1 \right), \quad (20)$$

kjer je $N_0 = r/\gamma$.

5.3 Matematični model, ki upošteva pismenost populacije

Razloge za demografsko tranzicijo (izobraževanje žensk, manjša rodnost) so Korotayev, Malkov in Khaltourina upoštevali z dodatno dinamično spremenljivko: stopnjo pismenosti populacije. Spremenili so enačbo (17) z upoštevanjem negativnega feedbacka med rastjo populacije in stopnjo pismenosti

$$\frac{dN}{dT} = rNS(1 - l). \quad (21)$$

Dinamika presežnega produkta ostane enaka (18), medtem ko dinamiko pismenosti l opišemo z

$$\frac{dl}{dT} = aSl(1 - l), \quad (22)$$

kjer je a empirični parameter, l je sorazmerna pismeni populaciji. Vse osebe, ki so pismene, l , so hkrati tudi potencialni učitelji za potencialne učence, $(1 - l)$, kar je sorazmerno ljudem, ki so nepismeni. S predstavlja denar, ki se ga uporabi pri podpori izobraževalnih programov [21].

Ob začetni nizki stopnji pismenosti populacije model predvideva pospešeno rast N , S in l . Ko se pismenost l ustavi, se ustavi tudi N , medtem ko S še naprej raste eksponentno. Prav pri modelu, kjer upošteevamo pismenost, je jasno, da se rast ne more nadaljevati v nedogled, saj stopnja pismenosti ne more preseči 100 %.

5.4 Ocena modelov

Vsem modelom je skupno, da predstavljajo rast človeške populacije, BDP-ja, presežnih produktov, pismenosti, itd. z uporabo diferencialnih enačb prvega reda. V vsakem trenutku je nekaj faktorjev, ki vplivajo na rast populacije istočasno. Noben od modelov pa ne upošteva prostorske porazdelitve populacije in diskretne narave ljudi.

Enačbi (18–19) vsebujeta empirična parametra r , γ , ki bi morala biti povezana z naravo človeka. Parameter r je določen z razliko med rodnostjo in smrtnostjo.

Korotayev, Malkov in Khaltourina so povezali γ s povprečno kreativnostjo človeka. Človeška populacija N se hitro prilagodi trenutni nosilni kapaciteti Zemlje K_z , ki se počasi povečuje zaradi tehnološkega napredka. Širjenje tehnoloških inovacij pa je bila ovira, ki je določala dinamiko rasti nosilne kapacitete. Preoblikujemo enačbo (13)

$$\frac{dK_z}{K_z} = \gamma N dT = \gamma \tau dN_T. \quad (23)$$

N_T je skupno število vseh ljudi, ki so živeli na svetu do časa T in τ je povprečna življenjska doba. Rešitev te enačbe je $K_z = K_{z0} \exp(\gamma \tau N_T)$, kjer K_{z0} označuje nosilno kapaciteto ob času T_0 in N_T je število ljudi, ki so živeli med časom T_0 in T . γ je potem

$$\gamma = \frac{1}{\tau K_z} \frac{dK_z}{dN_T} = \frac{1}{\tau} \frac{d \ln K_z}{dN_T}. \quad (24)$$

Tehnološki napredek ustvarjajo ljudje kar pomeni, da je nosilna kapaciteta Zemlje v času T , odvisna od aktivnosti vseh ljudi, ki so živeli pred tem časom. Parameter γ nam torej pove povprečen prispevek posameznika za povečanje nosilne kapacitete Zemlje, kar pa lahko razumemo na 2 načina:

- Vsak posameznik prispeva k rasti Zemljine nosilne kapacitete, in povprečen prispevek je $\Delta K_z = \gamma \tau K_z$.
- Nosilna kapaciteta Zemlje se povečuje diskretno in sicer v korakih po $\Delta K_z \sim K_z$. Ti koraki so redki in so posledica znanstvenih, tehnoloških revolucij. Posamezna tehnološka revolucija sproži serijo manjših inovacij. Parameter $\gamma \tau$ nam pove verjetnost, da bo izumitelj ali skupina le teh, naredil velik tehnološki, socialni, administrativni napredek. Rast populacije je serija logističnih krivulj, ki pripadajo posamezni tehnološki revoluciji [18]. Izraz $1/\gamma \tau \sim 10^9$ poda število ljudi, ki mora živeti po posamezni revoluciji, da zagotovo pride do naslednje [21].

Za bolj ustreznega velja drugi scenarij, ki ima nekaj posledic. Demografsko tranzicijo razložimo s pojavom tehnoloških revolucij, ki si sledijo zelo hitro. Popolnega potenciala prejšnje revolucije še niso spoznali, ko se že pojavi nova.

Včasih je bila motivacija za tehnološki razvoj izboljšanje nosilne kapacitete Zemlje, kar je pomenilo rast populacije. Danes pa je motivacija izboljšanje kvalitete življenja in rast populacije ni tako hitra.

Velike populacije se razvijajo hitreje, medtem ko se izolirani kontinenti, arhipelagi in otoki razvijajo počasneje. To je povezano z verjetnostjo, da se pojavi nek redek dogodek ali izumitelj in z diskretnostjo populacije.

6 Fenomenološka teorija

Modeli nam le opišejo, razložijo določen dogodek, medtem ko nam teorija nudi boljši vpogled v samo dogajanje obravnavanega fenomena. V nadaljevanju bom predstavila Kapitovo fenomenološko teorijo populacijske dinamike. Pri tej teoriji vzamemo termodinamičen pristop pri katerem se različni dejavniki in njihove posledice združijo ter se kažejo v spremembah rodnosti in umrljivosti.

Kinetična teorija plinov je sistem mnogih delcev, katerih obnašanje opisujejo makroskopske lastnosti plina, kar nam da analogijo za človeško populacijo. V termodinamiki so makroskopski parametri plina temperatura, tlak in gostota. Do fazne spremembe v plinu pride ob določeni temperaturi, medtem ko do demografske tranzicije pride v določenem času, če populacija raste. V termodinamiki in populacijski dinamiki sta temperatura in čas parametra, ki določata spremembe v sistemu [3].

Celotno svetovno populacijo označimo z N . S funkcijo $N(T)$ zapišemo, kako se število ljudi spreminja s časom T , ki ga merimo v letih. Število ljudi N je edina spremenljivka, ki jo bomo uporabili za opis svetovne populacije. Vseh ostalih spremenljivk, npr. razporejenost populacije po državah, mestih ali vaseh, ne upoštevamo. Prav tako lahko zanemarimo porazdelitev po starosti, spolu, življenjski dobi, saj bomo spremembe N upoštevali skozi daljše časovno obdobje oz. skozi več generacij.

Zanima nas rast sistema in domnevamo, da je v njej stalnost, konstantnost obnašanja, razvoja skozi leta. Torej, da je relativna sprememba v populaciji sorazmerna relativni spremembi v času

$$\lim_{\Delta N, \Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N - N_1} \frac{T - T_1}{\Delta T} = \frac{d \ln |N - N_1|}{d \ln |T - T_1|} = \alpha, \quad (25)$$

kjer sta T_1 in N_1 referenčni točki za čas in populacijo. V večini primerov velja $N_1 = 0$, N pa je vedno pozitiven.

Število ljudi podaja enačba

$$N = C(T_1 - T)^\alpha, \quad (26)$$

kjer sta C in α konstanti, čas pa se šteje od T_1 [3]. Pri linearni rasti populacije je $\alpha = 1$.

Enačba (26) se za $\alpha = -1$ ujema z empiričnima enačbama von Foersterja (11) in Hornerja (12)

$$N(T) = \frac{C}{T_1 - T}. \quad (27)$$

V von Foersterjevem primeru so konstante $C = (179 \pm 0.14) \cdot 10^9$, $T_1 = 2027 \pm 5$ in $\alpha = -0,99 \pm 0,009$. V [23] je T_1 podan natančneje in znaša 2026,87 let,

kar ustreza 13. novembru 2026. Na ta dan naj bi številčnost populacije šla v neskončnost, a se je rast populacije ustavila le nekaj let po izdaji članka l. 1960.

Natančnost α se zdi nekoliko pretirana, zato vzamemo $\alpha = -1$. V Homerjevem primeru pa so konstante $C = 200 \cdot 10^9$, $T_1 = 2025$ in $\alpha = -1$. Konstanta C pove velikost populacije 1 leto preden N postane neskončen.

Ustrezna hitrost rasti iz (27) je

$$\frac{dN}{dT} \approx \frac{C}{(T_1 - T)^2}. \quad (28)$$

Enačba ponazarja hiperbolično rast populacije in jo zelo dobro opisuje skozi več tisočletij ter se z demografskimi podatki ujema vse do leta 1960.

Natančnost demografskih podatkov se slabša bolj kot gremo v preteklost. Paleodemografi pridobivajo podatke o pretekli populaciji iz raznih davčnih zapisov, s poročili preteklih bitk, vojn, za predzgodovinsko obdobje pa uporabljajo antropološke podatke.

Opazimo pa, da sta obe enačbi (11–12) divergentni in pobegneta v neskončnost, ko se bližamo letu 2027 oz. 2025. Pojav imenujemo populacijska katastrofa, kar pa je fizikalni nesmisel. Obe enačbi sta neprimerni v bližni T_1 in zato moramo vpeljati neko limito, kar storimo z upoštevanjem končne življenjske dobe ljudi in časa, sposobnega za reprodukcijo.

Prav tako obe enačbi podata 'čuden' rezultat tudi za zelo oddaljeno preteklost, saj predpostavljata, da so ljudje že živeli 20 milijard let nazaj ($T = -2 \cdot 10^{10}$ let). Če bi bilo to res, bi veliki pok moralo opazovati približno 10 ljudi. Le ti bi morali živeti milijone let, saj enačbi zelo počasi rasteta pri velikih imenovalcih, kar pa je prav tako nesmiselno [3].

Če bi bili enačbi pravilni, bi se morala populacija leta 2024 podvojiti v manj kot letu dni. Da odpravimo vse te nesmisle, uvedemo meje skaliranja [2].

V sebi podobni rasti je razmerje spremembe časa in spremembe v številčnosti populacije konstantno. Ta samopodoben vzorec se lahko pojavi samo pri določenih omejitvah. Najprej določimo limito hitrost rasti. Ob času T_0 , ko je N majhen, hitrost rasti omejimo navzdol, in sicer ne more biti manjša od 1 osebe oz. hominida v τ_0 letih. Po drugi strani pa prirastek populacije v τ_1 letih ne more preseči velikosti populacije. Omejiti moramo rast, kar storimo z upoštevanjem mej skaliranja

$$\left(\frac{dN}{dT}\right)_{min} \Big|_{T \rightarrow T_0}^{N \rightarrow 1} \geq \frac{1}{\tau_0}, \quad \frac{1}{\tau_1} \geq \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dT}\right)_{max} \Big|_{T \rightarrow T_1}. \quad (29)$$

Z uvedbo mej skaliranja odpravimo divergenci v preteklosti in prihodnosti. Prva meja velja za začetne stopnje razvoja, τ_0 ima enoto [čas/število ljudi],

druga meja je veljavna za sedanost in τ_1 ima enoto časa. Antropološki podatki kažejo, da lahko vzamemo $\tau = \tau_0 = \tau_1$.

Odvajamo funkcijo $N(T)$ iz enačbe (27), $\frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C}$, ter na primerno mesto vstavimo $1/\tau$, da odpravimo singularnost. Za posamezne epohe dobimo

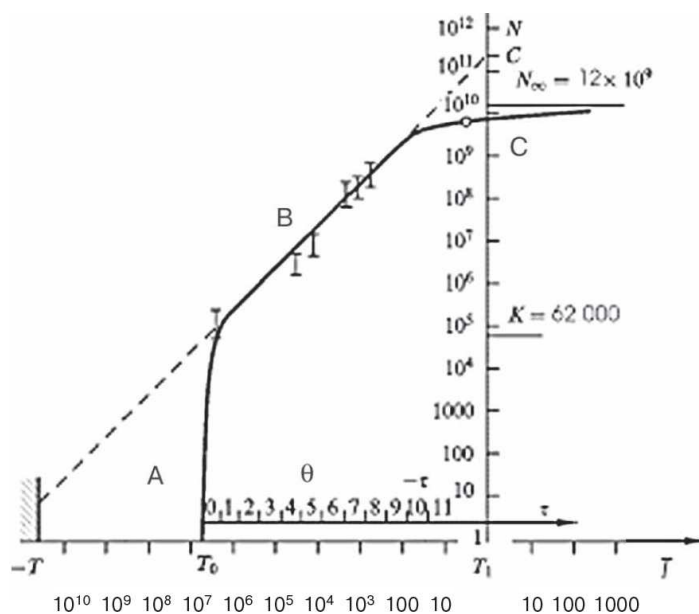
$$A : \quad \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C} + \frac{1}{\tau}, \quad (30)$$

$$B : \quad \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C} = \frac{C}{(T_1 - T)^2}, \quad (31)$$

$$C : \quad \frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2 + \tau^2}. \quad (32)$$

S tem, ko smo uvedli τ v enačbe za rast populacije, je življenjska doba postala mikroskopski parameter teorije. Poskrbi za limito rasti v preteklosti in tudi, da se izognemo divergentnosti ob času T_1 , s čimer rast raztegnemo v prihodnost.

Zgornje tri enačbe opisujejo rast človeške populacije skozi celotno zgodovino in razdelijo razvoj človeštva na 3 epohe: A,B in C (slika 12).



Slika 12: Prikaz številčnosti populacije skozi celotno zgodovino človeštva. Kazalke označujejo empirične podatke. Epoha A se je končala pred 1,6 milijon leti, epoha B pred 50-imi, trenutno smo v epohi C. \circ – 1995. [3]

Demografsko tranzicijo lahko opišemo kot fazni prehod. Pred in po faznem prehodu je rast opisana asimptotično s hiperbolično funkcijo, med samo tranzicijo pa hitrost rasti reguliramo z vpeljavo časa τ . Ta dodatek omeji rast v bližini tranzicijskega časa $T \rightarrow T_1$.

Vrednosti konstant C , T_1 in τ dobimo z integriranjem enačbe (32), dobljen rezultat pa nato primerjamo z demografskimi podatki. Rezultat integriranja

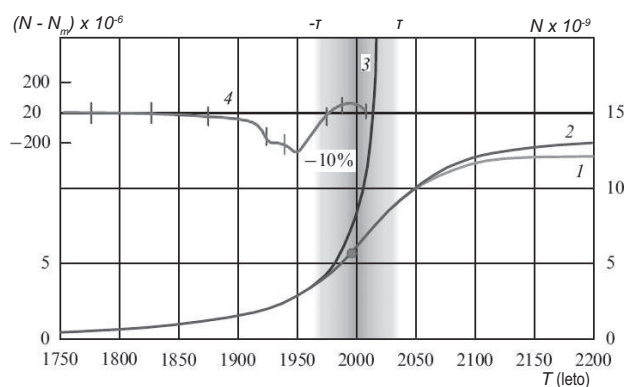
$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arccot} \left(\frac{T_1 - T}{\tau} \right) \quad (33)$$

opisuje rast populacije v preteklosti in prihodnosti. Po primerjavi z demografskimi podatki dobimo vrednosti za konstante

$$C = (186 \pm 1) \cdot 10^9, \quad T_1 = 2007 \pm 1,$$

$$\tau = 42 \pm 1.$$

Konstanta $\tau = 42$ let dobro opiše življenjsko dobo človeka kljub temu, da je bila pridobljena v času demografske tranzicije kot povprečje za več držav v različnih obdobjih razvoja. Karakteristični čas je približno povprečna življenjska doba, ki predstavlja polovično širino na histogramu globalne rasti populacije med demografsko tranzicijo. Kritično leto 2027 se z uvedbo karakterističnega časa premakne na 2007 (slika 13). Slika 13 prikazuje svetovno populacijo med letom 1750 in 2200, kjer je rast populacije najvišja leta 2007. Slika prikazuje tudi razliko med modelom in dejanskimi podatki.



Slika 13: Populacija med letoma 1750 in 2200. 1 – napovedi IIASA in ZN, 2 – model III, 3 – pobeg po enačbi (27), 4 – razlika med modelom in dejansko populacijo, 5-krat povečana. Trajanje tranzicije je 2τ let. \circ – 1995. Vir: [15]

Pomemben parameter v teoriji je tudi brezdimenzionalna konstanta

$$K = \sqrt{\frac{C}{\tau}} = 67000. \quad (34)$$

Konstanta K predstavlja tako samo interakcijo kot obnašanje sistema in z njo predstavimo vse pomembnejše rezultate teorije razvoja človeštva. Prav tako red konstante K določa začetno velikost populacije, ki je strukturno in funkcionalno samozadostna. Izkaže se, da je konstanta K glavni numerični parameter populacijskega sistema in jo najdemo v vseh enačbah in rezultatih modela [2].

V tabeli 2 so prikazane konstante za več modelov in njihovo prilagajanje. Merilo za izbor je absolutna in relativna rast. Po modelu II je $N_\infty = 13 \cdot 10^9$, kritičen čas pa je leto 2005. Največja relativna rast 1,6 % leta 1986 pa je prenizka [24]. Vidimo, da se model III najboljše ujema z demografskimi podatki. Paziti pa moramo na dejstvo, da je tudi natančnost najnovejših podatkov le od 3–5 %. V tabeli 2 vidimo tudi, da T_1 in C nista odvisna od vrednosti τ .

Model	$N_\infty \cdot 10^{-9}$	$C \cdot 10^{-9}$ leto ⁻¹	τ leto	T_1 leto	$\left(\frac{dN}{dT}\right)_{T_1} \cdot 10^{-6}$ max, leto ⁻¹	$\frac{1}{N} \frac{dN}{dT}$ max, %
I	10	180	55	1998	60	1,31
II	13	185	45	2005	92	1,60
III	14	186	42	2007	105	1,73
IV	15	190	40	2010	119	1,81
V	18	195	33	2017	180	2,18
VI	25	200	25	2022	320	2,88
VII	∞	200	(20)	2025	—	—

Model	T_{max}	$N_{1990} \cdot 10^{-6}$	$T_{0,9N_\infty}$	$K \cdot 10^{-4}$	$T_0 \cdot 10^{-6}$ leto	$P_{01} \cdot 10^{-9}$
I	1964	5260	2157	5,72	4,9	99
II	1986	5135	2143	6,41	4,5	102
III	1989	5253	2138	6,66	4,4	103
IV	1993	5259	2133	6,89	4,3	106
V	2003	5230	2119	7,69	4,0	110
VI	2011	5306	2099	8,94	3,5	114
VII	—	5713	—	(10)	(3,1)	115

Tabela 2: Različni modeli. Vir: [2]

Če pogledamo enačbo (32) je bila absolutna hitrost rasti populacije najvišja leta $T_1 = 2007$, $(\frac{dN}{dt})_{max} = \frac{C}{\tau^2}$. Relativna hitrost rasti

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dT} = \frac{\tau}{[(T_1 - T)^2 + \tau^2] \operatorname{arccot}[(T_1 - T)/\tau]}, \quad (35)$$

pa je dosegla maksimalno vrednost 1,7 % leta 1989, če ne upoštevamo let po vojni. Relativna hitrost je torej dosegla maksimum pred absolutno rastjo, ki je bila po modelu III leta $T_1 = 2007$.

Uvedemo brezdimenzijsko konstanto za čas

$$t = \frac{T - T_1}{\tau} \quad (36)$$

in populacijo

$$n = \frac{N}{K}. \quad (37)$$

Čas štejemo od T_1 v enotah τ , medtem ko je enota za populacijo n konstanta $K = 67000$.

Novi spremenljivki uporabimo v enačbah (30–32). Dobimo enačbe za rast

$$\text{A : } \quad \frac{dn}{dt} = \frac{n^2 + 1}{K}, \quad (38)$$

$$\text{B : } \quad \frac{dn}{dt} = \frac{n^2}{K}, \quad (39)$$

$$\text{C : } \quad \frac{dn}{dt} = \frac{K}{t^2 + 1}, \quad \text{ali} \quad (40)$$

$$\frac{dt}{dn} = \frac{t^2 + 1}{K}, \quad t = -\cot \frac{n}{K} \quad (41)$$

Rešitve za enačbe (38), (39) in (40) so

$$\text{A : } \quad n = -\cot \frac{t}{K}, \quad (42)$$

$$\text{B : } \quad n = -\frac{K}{t}, \quad (43)$$

$$\text{C : } \quad n = -K \operatorname{arccott} t, \quad (44)$$

V prvi epohi, epohi A, prevladuje linearna rast, v epohi B imamo hiperbolično rast, epoha C pa je tranzicija do stabilizacije populacije.

Do enačbe z brezdimenzijskima konstantama za populacijo v epohi A, (42), smo prišli z integriranjem enačbe (38) in upoštevanjem robnega pogoja $n(t_0) = 0$. Za epoho B smo integrirali enačbo (39) in nato upoštevali pogoj $n(0) = \infty$, za epoho C pa smo integrirali (40) in upoštevali $n(-\infty) = 0$.

V enačbi (41) čas izgleda spremenljivka in je recipročno povezan z n . Pojav demografske tranzicije torej ni eksplicitno odvisen od časa, ampak od populacijske rasti.

Poglejmo, kako rešitve (42–44), prehajajo ena v drugo. Razvijemo rešitev epohe C (44) okoli $t = -\infty$

$$n = -\frac{K}{t} \left(1 - \frac{1}{3t^2} + \frac{1}{5t^4} - \dots \right), \quad t > 1 \quad (45)$$

in rešitev enačbe za epoho A (42) okoli $t = 0$

$$n = -\frac{K}{t} \left(1 - \frac{t^2}{3K^2} - \frac{t^4}{45K^4} - \dots \right), \quad t^2 < K^2\pi. \quad (46)$$

Obe rešitvi sta v epohi B hiperbolični. Za velike K je rast v epohi B, $n = -K/t$, vsebovana že v rasti za A in C. Razviti funkciji (45) in (46) se sekata pri $t_* = -\sqrt{K}$ z dokaj gladkim prehodom med eno in drugo krivuljo. Asimptotska združitev rasti se zgodi, ko (38) seka (40) v začetku neolitika.

Enačbe (42–44) opisujejo populacijsko dinamiko daleč v preteklost, vse do začetka rasti v epohi A. Ta je določen z

$$T_0 = T_1 - \frac{\pi}{2} K \tau. \quad (47)$$

Vrednost za T_0 je pridobljena iz podatkov za današnji čas in je za model III $T_0 = 4,4$ milijona let. Takrat naj bi se začela antropogeneza.

Sedaj iz (44) izrazimo t in ga vstavimo v rešitev epohe A (42) dobimo

$$\frac{dn}{dt} = K \sin^2 \frac{n}{K}. \quad (48)$$

Enačba (48) bo še vedno enako natančna v epohi C, če ji prištejemo člen $\frac{1}{K}$, veljala pa bo tudi v preostalih dveh epohah. Avtonomna enačba za n , ki velja za vsak t , je

$$\frac{dn}{dt} = K \sin^2 \frac{n}{K} + \frac{1}{K}. \quad (49)$$

Enačba ni eksplicitno odvisna od časa in hitrost rasti je odvisna predvsem od stanja sistema, od n . Če sedaj zgornjo enačbo (49) integriramo in upoštevamo $n(t_0) = 0$ dobimo

$$n(t) = \begin{cases} K \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K^2+1}} \tan \frac{\sqrt{K^2+1}}{K^2}(t - t_0)\right), & \text{za } t < 0 \\ K \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K^2+1}} \tan \frac{\sqrt{K^2+1}}{K^2}(t - t_0)\right) + \pi K, & \text{za } t > 0. \end{cases} \quad (50)$$

Če upoštevamo še, da velja $K \gg 1$, dobimo

$$n(t) = \begin{cases} K \arctan\left(\frac{1}{K} \tan \frac{1}{K}(t - t_0)\right), & \text{za } t < 0 \\ K \arctan\left(\frac{1}{K} \tan \frac{1}{K}(t - t_0)\right) + \pi K, & \text{za } t > 0 \end{cases} \quad (51)$$

Ta rešitev velja za vsak t . Rešitev je razdeljena na območju $t_0 < t < 0$ in $-t_0 > t > 0$, ker tangens, ko gre $t \rightarrow 0$, preide pol. Arkustanges takrat spremeni predznak, zato osnovni rešitvi prištejemo $K\pi$.

Rešitev enačbe (49) predstavlja slika 12. Na njej sta tako čas kot številčnost populacije predstavljena na logaritemski skali. Na sliki so prikazani tudi empirični podatki. Na grafu vidimo dolgo začetno obdobje razvoja, ki mu sledi kvadratna rast prebivalstva. Le ta se konča z demografsko tranzicijo, ko se številčnost populacije stabilizira. Stabilizacija ni posledica pomanjkanja zunanjih virov, ampak je posledica naravnih notranjih procesov sistema.

Zavedati se moramo, da predstavljene teorije ne moremo uporabiti za posamezno državo ali regijo, ampak velja le za celotno svetovno populacijo [11].

Primerjajmo logistično rast (8) z rastjo globalne populacije. Logistično enačbo zapišemo z enačbo

$$\frac{dn}{dt} = n(1 - n), \quad (52)$$

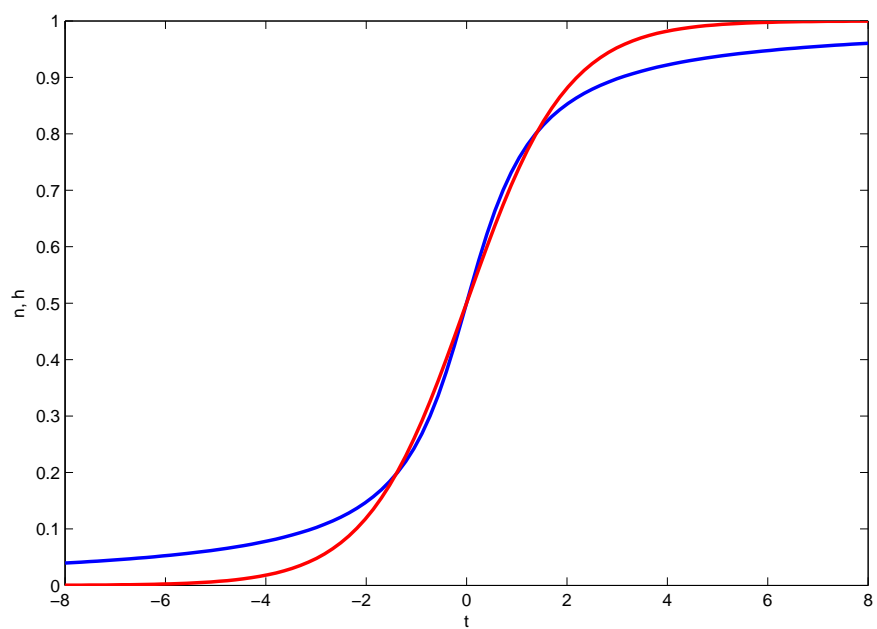
njena rešitev pa je

$$n = \frac{1}{1 + \exp(-t)}, \quad (53)$$

kjer je n normalizirana populacija, ki raste od 0 do 1 [3]. Zapišemo še normalizirano enačbo za demografsko tranzicijo

$$h = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccott}. \quad (54)$$

Ti dve funkciji sta antisimetrični v točki $[0, 1/2]$ in skoraj povsem sovpadata med tranzicijo, a njuni asimptoti sta zelo različni. Logistična asimptota se ničli približa eksponentno, za $\operatorname{arccott} \gg -t^{-1}$ pa se obe asimptoti, v preteklosti in po tranziciji, limiti približujeta hiperbolično [3].



Slika 14: Primerjava logistične enačbe (rdeča) z modelom demografske tranzicije (modra).

7 Epohe

Zgodovino človeštva lahko razdelimo v 3 epohe. Prva epoha je epoha A, ki se je začela $T_0 = \frac{1}{2}\pi K\tau = 4,4$ milijona let nazaj, ko so se hominidi odcepili od hominoidov. Do konca epohe se je razvil *Homo habilis*. Prva primitivna plemena so se pojavila v Afriki in so ob koncu epohe štela 10^5 članov, rast populacije pa je bila v tistem času linearna. Epoha A je trajala $K\tau = 2,8$ milijona let [2].

Epoha B se je začela 1,6 milijona let nazaj. Ta epoha obsega kameno dobo, v času trajanja le te je populacija narasla za faktor 10^5 [3], kar je tudi faktor konstante K . Epoha B se sedaj končuje in se preveša v epoho C, po kateri bo prišlo do stabilne populacije.

Hitrost rasti populacije v epohi B je odvisna od kvadrata števila prebivalcev. Hitrost rasti zapišemo

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{K^2}, \quad (55)$$

kjer čas t izrazimo v enotah τ in s tem dobimo hitrost rasti po posameznih generacijah. To je nelinearen zakon rasti, ki zahteva interakcijo posameznikov znotraj skupine. Kvadraten vzorec rasti je uporaben le, če celotno populacijo smatramo kot integrirano skupnost.

Fenomenološka teorija temelji na štirih predpostavkah [15]:

- Svetovno populacijo vzamemo kot enoten, močno povezan, razvijajoč sistem.
- Hitrost rasti sistema je odvisna od kvadrata števila prebivalstva (55), kar je posledica notranjih dejavnikov in je neodvisna od zunanjih virov.
- Interakcija temelji na širjenju vseh vrst informacij.
- Skupina 60.000 ljudi je definirana kot koherentna in samozadostna populacija.

Hiperbolična rast (55) ima dve asimptoti. Ena je v preteklosti, ko se populacija zmanjšuje. Ne glede na to, kako daleč v preteklost gremo, vedno je živih nekaj ljudi. Druga asimptota je pri kritičnem datumu. Ko se mu približujemo, rast naraste preko vseh meja in gre v neskončnost, ne da bi prečkala kritičen datum (slika 9c). Po ogromnem populacijskem prirastku hiperbolična rast doseže svojo limito ob začetku demografske tranzicije, s čimer se prične epoha C.

Samo enačbo (55) lahko interpretiramo na več načinov. N^2 lahko vzamemo za mero prepletenosti populacije, ki je enaka številu interakcij med N ljudmi [2]. Vendar pa hitrost rasti ni odvisna od N^2 zaradi binarne interakcije ljudi. Naša zmožnost razmnoževanja je le del vseh procesov, ki se seštejejo in določajo stopnjo rasti. Hitrost rasti vzamemo kot skupen rezultat delnih procesov, ki prispevajo k razvoju. Ti procesi so lahko ekonomski, kulturni, industrijski, socialni ali biološki. Če bi upoštevali samo človeško sposobnost razmnoževanja, bi bila hitrost rasti eksponentna, kot je trdil Malthus.

Človeška populacija je odprt sistem, kar pomeni, da zunanji vplivi ne vplivajo direktno na rast sistema ter da le ta ni bila in ne bo omejena z njimi. Limito populacije določajo notranji faktorji sistema. Če je kdaj v preteklosti zmanjkalo zunanjih virov, je prišlo do preseljevanja, tako da je človeštvo vedno imelo dovolj virov za razvoj in je lahko nemoteno rastlo. V vsaki dobi cikla je za hranjenje populacije skrbelo manj ljudi, in danes je v sodobnih družbah dovolj, da le 2–3 % državljanov poskrbi za prehrano celotne države.

Če bi na nekem območju prišlo do pomanjkanja hrane, bi se del populacije preselil in bi prišlo do bolj enotne naseljenosti sveta. Geografske in klimatske spremembe so povzročile, da se je človek razširil po celem svetu in s tem vplival na razvoj posameznih družb in kulture. Kljub preseljevanju in klimatskim spremembam, je človeštvo preživelo, in hiperbolična rast se je v epohi B nadaljevala. V tej epohi sta se razvoj in rast večinoma dogajala na evropskem kontinentu. Med ledenimi dobami pa se je populacija najprej selila na jug in potem nazaj na sever.

V sistemu, ki je tako zapleten kot človeštvo, medsebojne povezave in interakcije niso linearne in zatorej ne moremo narediti direktne povezave med nekim območjem ter celim svetom. Teorija ne upošteva faktorja virov - prostor, viri hrane, vode, ... Ta pristop najdemo v principu demografske imperativne, kjer je celoten razvoj človeštva odvisen od notranjih procesov in ni povezan z zunanjimi viri. To nasprotuje Malthusovi ideji, v kateri trdi, da je evolucija človeštva omejena z viri. To ponazorimo s primerom: v paleolitikumu je bilo dovolj virov in veliko otrok, rast človeštva pa je bila kljub temu počasna, saj so prevladovali notranji faktorji, ki so proporcionalni N^2 .

Pri tem modelu do stabilizacije populacije ne pride zaradi vojn, bolezni, pomanjkanja hrane ali prostora, ampak zaradi nezmožnosti človeštva, da vzdržuje isto hitrost razvoja. Prav ta neodvisnost od globalnih virov je načelo demografske imperativne.

Omenimo še, da pri enačbi (55) ne upoštevamo migracij, saj je človeška populacija zaenkrat omejena le na Zemljo [15].

8 Limita populacije in število ljudi, ki so kadarkoli živeli

Limito populacije na Zemlji ocenimo iz (33)

$$N_\infty = \pi K^2 = 14 \text{ milijard.} \quad (56)$$

Limita se ujema z napovedmi demografov, ki predvidevajo, da se bo v bližnji prihodnosti število ljudi ustavilo pri 11 – 15 milijardah. Po Modelu III bo populacija dosegla 90 % limite do leta 2138.

Ocenimo število ljudi, ki so kdajkoli živeli na Zemlji. To storimo z integriranjem izraza za rast od T_0 do T_1 oz. t_0 do t_1 . Dobimo

$$P_{01} = P_A + P_C = K \int_{t_0}^{t_*} \cot \frac{t}{K} dt + K \int_{t_*}^0 K \operatorname{arccot} t dt = \quad (57)$$

$$= \frac{1}{2} K^2 \ln K + \frac{1}{2} K^2 \ln(1 + K) \approx K^2 \ln K. \quad (58)$$

Za model III je $P_{01} = 2K^2 \ln K = 100 \cdot 10^9$ ljudi, kar se ujema z ocenami antropologov in paleodemografov, ki so od 100–115 milijard. V teh ocenah je $\ln K = 11,1$, za povprečno življenjsko dobo pa vzamemo vrednost $\tau/2 = 21$ let, zato se pri P_{01} spredaj pojavi še faktor 2. Isti rezultat dobimo, če uporabimo enačbo (55)

$$P_{01} = \int_{t_0}^{t_1} N dt = K^2 \int_K^{K^2} d \ln N = K^2 \ln K. \quad (59)$$

Do časa, v katerem je prišlo do sečenja rešitev za epohi A in C, $t_* = -\sqrt{K}$, $T_* = T_1 - \tau\sqrt{K} \approx 9000$ let pr. n. št., je živelo že več kot polovica ljudi. V epohi A, je bilo število hominidov

$$P_A = 2K \int_0^K \tan \frac{t'}{K} dt' = 2K^2 \ln \cos 1 = 5,5 \cdot 10^9, \quad (60)$$

kjer t' računamo od $t'_0 = 0$. Po modelu III je v epohi A živelo 5 milijard hominidov. Človeški sistem je dosegel maksimalno hitrost rasti in ta je kar 10^9 -krat večja kot na začetku razvoja.

9 Populacijska rast in model

Po današnjih podatkih lahko ocenimo, da so se homanidi ločili od humanoidov pred 4,5 milijoni let, kar sovpada z začetkom epohe A. Ob koncu te epohe se je pojavil *Homo habilis* in število teh prvotnih hominidov je doseglo $N_{A,B} = K \tan(t/K) = K \tan 1 = 1,04 \cdot 10^5$.

Epoha B obsega paleolitik, neolitik in preostalo zgodovino do leta 1900. V trajanju te 1,6 milijonov let dolge dobe se je človeška populacija povečala K -krat. Za začetek demografske tranzicije velja leto $T_1 - \tau = 1965$. Takrat je populacija štela $\pi/4K = 3,5$ milijarde ljudi.

Večina populacijskih podatkov se ujema z modelom. Bolj gremo v preteklost, manj natančni so demografski podatki, ki pa se izboljšajo v 16. stoletju po velikih geografskih odkritjih. Tudi takratna populacija je bila po teh odkritjih bolj povezana med seboj.

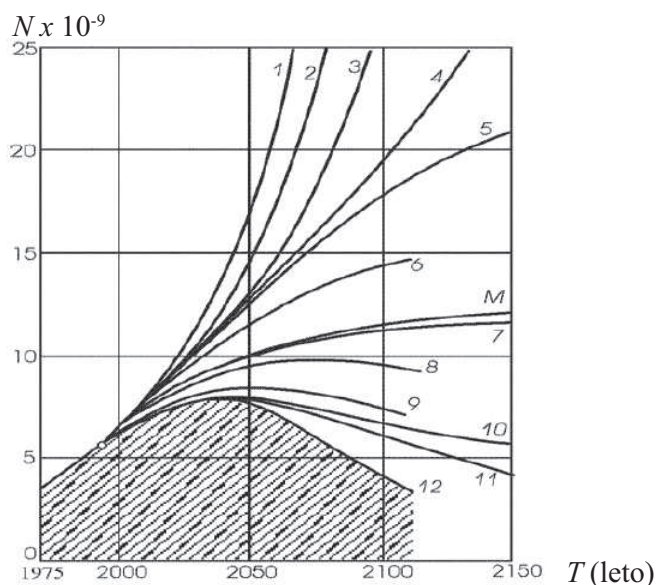
Demografski pristop za izračun sprememb v človeški populaciji lahko uporabimo le za eno ali dve generaciji vnaprej. Da demografi dobijo napovedi, svet razdelijo na več območij, kjer predvidevajo določen scenarij za rast. Spremembe v rodnosti in smrtnosti nato vodijo do razlage demografske tranzicije.

Če primerjamo matematičen model za rast populacije v prihodnosti, z napovedmi ZN (organizacija Združenih narodov) in IIASA (Mednarodni inštitut za uporabno sistemsko analizo) opazimo, da se vse ujemajo v trditvi, da bomo leta 2135 dosegli 90 % populacijske limite (slika 15). Projekcije ZN temeljijo na več scenarijih za rodnost in umrljivost v devetih okrajih sveta ter segajo do leta 2150. Po optimalnem scenariju bo populacija dosegla zgornjo mejo 11,6 milijard ljudi leta 2200. Projekcije IIASA pa segajo do leta 2100 in temeljijo na šestih regijah z desetimi različnimi vzorci rasti. Optimalen scenarij ponuja počasno upadanje števila rojstev, s čimer pa se ujemajo tudi podatki ZN [2].

Variacije v napovedih za leto 2150 so najboljše vidne, če primerjamo vse tri možne scenarije. Po scenariju z največ populacije, se bo stopnja rodnosti stabilizirala (TFR) pri 2,5–2,6 otroka na žensko. Po srednjem scenariju na žensko pride 2,05–2,09 otroka, kar je nadomestna stopnja, in vodi do konstantne populacije, če ne pride do sprememb v smrtnosti. Po najnižjem scenariju pa na žensko prideta 1,5–1,6 otroka. S tem bi prišlo tudi do zmanjšanja populacije. Po teh scenarijih do leta 2150 dobimo zelo različne napovedi. Po najvišjem bo takrat na Zemlji 25 milijard ljudi, po najnižjem le 3 milijarde, medtem ko po srednjem scenariju 10 milijard ljudi.

Pri teh napovedih primerjamo dva različna načina napovedovanja številčnosti populacije. Na eni strani imamo kratkotrajne linearne projekcije, ki jih ekstrapoliramo v prihodnost, na drugi strani pa imamo teorijo, ki

opisuje dinamiko populacije skozi celotno zgodovino človeštva. Kljub temu pa so napovedi pri obeh načinih precej podobne. Tako po modelu, kot po projekcijah raznih agencij, se bo globalna populacija stabilizirala (tabela 3).



Slika 15: Napovedi ZN in IIASA za številčnost populacije ob 1 – konstantni plodnosti, 2 – konstantni rasti, 3 – svetovni krizi, 4 – najvišji scenarij ZN, 5 – srednji scenarij ZN, 6 – manjši padec rodnosti, 7 – srednji padec rodnosti, 8 – počasen padec smrtnosti, 9 – konstantna smrtnost, 10 – ZN, 11 – nizka ZN, 12 – hiter padec rodnosti, M – model, \circ – 1990. Osenčena območja kažejo spremembe v populaciji v primeru drastičnega zmanjšanja rodnosti. Vir: [2]

Tabela 3 predstavlja ocene za številčnost populacije in rezultate matematičnega modela. Le ta nam pove tudi število že živečih ljudi.

Leto	N	N_m
$-4,4 \cdot 10^6$	(0)	0
$-1,6 \cdot 10^6$	0,1	0,1
-35000	1–5	2
-15000	3–10	8
-7000	10–15	16
-2000	47	42
0	100–230	86
1000	275–345	173
1500	440–540	345
1650	465–550	492
1750	735–805	685
1800	835–907	851
1850	1090–1170	1625
1950	2556	2817
1960	3039	3245
1970	3707	3778
1980	4454	4430
1990	5277	5198
1995	5682	5613
2000	6073	6038
2005	6453	6463
2010	6832	6878
2025	7896	7987
2050	9298	9259
2100	10400	10451
2150	10800	10956
2200	11000	11225
2500	—	11731

Tabela 3: Svetovna populacija N in rezultati modela N_m (v milijonih) [3].

10 Stabilnost populacije

Demografska tranzicija se je začela leta 1965 in naj bi se končala leta $T_1 + \tau = 2049$. V času trajanja se bo populacija 3–krat povečala. Za opis demografske tranzicije je Chesnais uvedel tranzicijsko število, ki ga izračunamo kot razmerje med številom ljudi po tranziciji in pred njo [3]

$$M = \frac{N(T_1 + \tau)}{N(T_1 - \tau)} = \frac{\operatorname{arccot}(-1)}{\operatorname{arccot}(1)} = 3. \quad (61)$$

Tranzicijsko število nam karakterizira intenzivnost tranzicije v posamezni državi ali svetu. Začetek oz. konec tranzicije je takrat, ko se hitrost rasti najbolj zviša oz. zniža.

Empirični podatki so: Kitajska $M=2,46$, Indija $M=3,67$ in svet $M=2,95$. V nekaterih primerih ujemanje s teoretično napovedjo ni dobro, in sicer: Francija $M=1,67$, Mehika $M=7$. Ampak pomembno je predvsem ujemanje modela z državami z največjimi deleži celotne populacije kot sta Kitajska in Indija [2].

Skozi demografsko tranzicijo naj bi šlo 10 milijard oseb, kar je 1/10 vseh ljudi, ki so kadarkoli živeli, živijo in bodo živeli na Zemlji. Tranzicija traja 1/50.000 človeške zgodovine [2] in ima karakterističen čas 42 let, kar je polovica življenjske dobe v razvitih državah ter je skoraj enak povprečni življenjski dobi sveta, 40 let.

Stabilizacija števila prebivalcev sveta je posledica tranzicije iz hiperbolične rasti v epohi B v omejeno rast v epohi C.

11 Stabilnost rasti

Dinamična stabilnost rasti populacije je odvisna od rasti fluktuacij. Fluktuacija ∂n se večja oz. manjša glede na Lyapunov indeks λ

$$\partial n = \partial n_0 \exp(\lambda t). \quad (62)$$

Lyapunov indeks dobimo z odvajanjem (49)

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{dn}{dt} \right) = \sin 2 \frac{n}{K}. \quad (63)$$

Leta 1965, ko se je začela demografska tranzicija, je Lyapunov indeks dosegel maksimalno vrednost $\lambda_{max} = 1$. Takrat je bil globalni populacijski sistem najmanj stabilen. Po T_1 , λ spremeni predznak, rast se stabilizira in kasneje ostane stabilna [3]. Če bi se hiperbolična rast iz epohe B nadaljevala, bi bilo leta 2010 že 13 milijard ljudi.

Lyapunov indeks uporabljamo pri linearni stabilnosti za kratkotrajne enačbe za rast, kjer niso upoštevani vsi notranji procesi [3]. Ti procesi lahko stabilizirajo ali pa destabilizirajo sistem. Stabilizacija je lahko možna zaradi migracij, npr. v začetnem stanju tranzicije, ko je bila v Evropi populacija precej nestabilna, je prišlo do preseljevanja v Ameriko, kar je stabiliziralo svetoven demografski sistem. V času obeh svetovnih vojn je prišlo do največjih motenj. Te nestabilnosti so bile sistematične in so povzročile izgubo globalne stabilnosti ter 10 % zmanjšanje prebivalstva [2].

Nestabilnosti ne moremo napovedati, lahko pa prepoznamo trende pojavljanja. V razvijajočem svetu se spremembe dogajajo precej hitreje kot so se v razvitem svetu, ko je bil le ta na podobni stopnji razvoja. Populacija, ki je vpletena v te spremembe, je sedaj 15-krat večja. Hitra ekonomska rast Kitajske in Indije napoveduje, da ti dve državi, ki gresta skozi demografsko tranzicijo, lahko postaneta vir regionalne ali celo globalne negotovosti.

Za oceno sedanje fluktuacije svetovne populacije uporabimo

$$\delta n = \sqrt{n} \quad (64)$$

in dobimo

$$\delta N = K \sqrt{K/N} = \sqrt{KN} \approx 20 \cdot 10^6. \quad (65)$$

Relativno največje fluktuacije so bile prisotne ob začetku hiperbolične rasti populacije [3].

Navkljub vsem težavam, ki jih je človeštvo srečalo na svoji poti, kuga je v Evropi v 14. stoletju pobila 30 % prebivalstva, zaradi obeh svetovnih vojn pa je življenje izgubilo 10 % takratne populacije, pa se le to še vedno drži

ustaljene poti v rasti in razvoju. To stabilnost oz. vztrajnost razložimo z demografsko imperativo.

Za stabilnost svetovnega sistema prebivalstva bi morali upoštevati tudi prostorsko razporeditev populacije, kar pa zahteva bolj podrobno analizo fluktuacij in nestabilnosti.

Naseljenost Zemlje ni enotna, ne glede na to ali gledamo cel svet, celine, posamezne države ali pa mesta. Koncentracijo ljudi v mestih poda hiperbolična porazdelitev

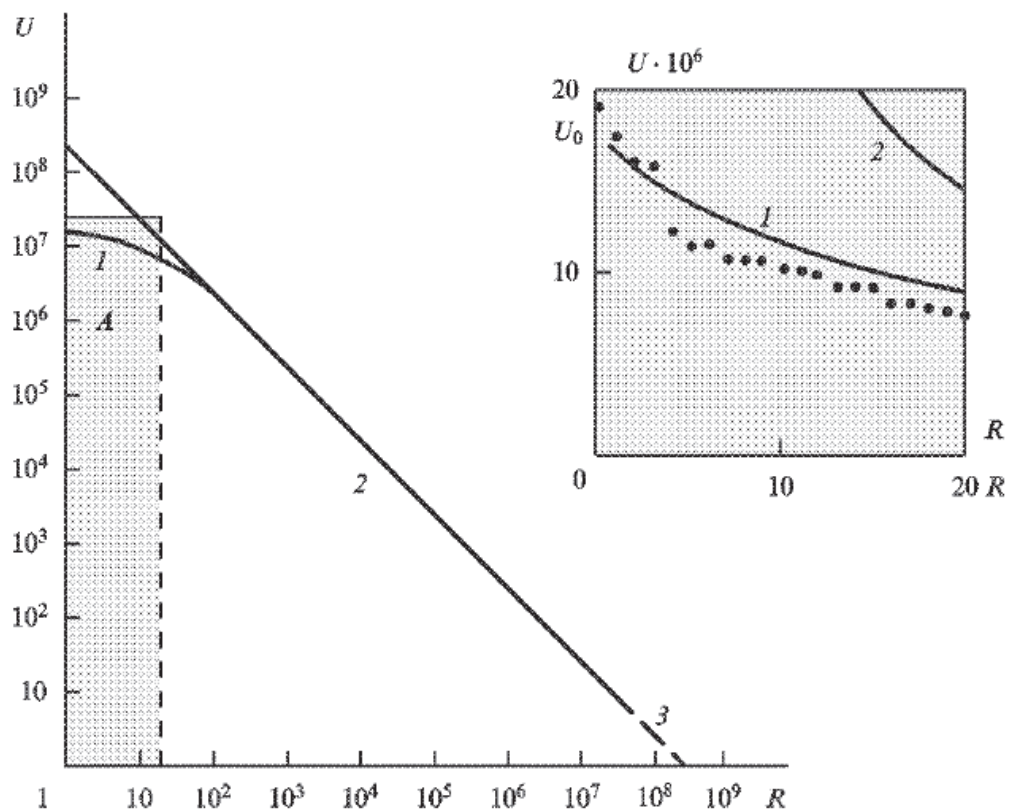
$$U(R) = \frac{U_0 \ln U_0}{R + \ln U_0}, \quad (66)$$

kjer je z U označena populacija mesta, z R pa rang oz. katero po velikosti je izbrano mesto [3]. U_0 predstavlja populacijo največjega mesta na svetu, medtem ko je $U_{min} = 1$ spodnja limita. Z integriranjem zgornje enačbe dobimo svetovno populacijo. Upoštevati moramo le meje: R teče od $R = 0$ do $R_{max} = U_0 \ln U_0$. Svetovna populacija za $U_{min} = 1$ je

$$N = \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{U_0 \ln U_0}{R + \ln U_0} dR = U_0 \ln^2 U_0, \quad (67)$$

od koder lahko dobimo U_0 za največje mesto, s tem podatkom pa dobimo R za vsa ostala mesta.

V začetku 21. stoletja se je prvič zgodilo, da večina ljudi živi v urbanem okolju. Tam imajo prebivalci v povprečju višjo izobrazbo, nižjo rodnost, višje dohodke, boljše zdravstveno stanje in daljše življenje od tistih, ki živijo na vasi. V razvitih državah je leta 1900 v mestih živelo 25 % ljudi, v letu 1950 55 % in v letu 2000 približno 75 %. V državah v razvoju je delež ljudi v mestih bistveno manjši, leta 1950 je živelo v mestih le 18 % ljudi, leta 2000 pa se je ta številka povišala na 40 % [14].



Slika 16: Porazdelitev mestne populacije za svet leta 1985. 1 – $U(R)$, 2 – $U(R) = U_0 R^{-1} \ln U_0$. V kvadratu A so predstavljena največja mesta na svetu: $R = 0$ – Tokyo, 1 – Mexico City, 2 – San Paulo, 3 – New York, 4 – Šanghaj, 5 – Kalkuta, 6 – Buenos Aires, 7 – Rio de Janeiro, 8 – London, 9 – Seul, 10 – Bombaj, 11 – Los Angeles, 12 – Osaka, 13 – Peking, 14 – Moskva, 15 – Pariz, 16 – Djakarta, 17 – Tianin, 18 – Kairo, 19 – Teheran, 20 – Delhi. Vir: [2]

12 Struktura časa in demografske periode

Zgodovinsko priznane dobe padejo v vzorec, in sicer je vsaka doba daljša od naslednje za $e = 2,72$ krat. V epohi B je časovnih dob $\ln K = 11$, število v posamezni dobi živečih ljudi pa je enako $2K^2 = 9$ milijard [2].

V vsakem trenutku epohe B lahko zapišemo hitrost rasti s trenutnim eksponentnim časom rasti T_e oz. s podvojitvenim časom, ki je 0,7-krat krajši. Eksponentni čas, T_e , je čas, ki je potreben, da se populacija poveča e -krat. V našem modelu je eksponentni čas enak času, kolikor smo oddaljeni od kritičnega leta 2007 npr. 100 let nazaj je bil eksponentni čas $T_e = 100$, 1000 let nazaj pa je bil eksponentni čas $T_e = 1000$. To pomeni, da bolj ko gremo v preteklost, počasnejša je hitrost rasti populacije. To pojasnjuje zakaj so se spremembe v paleolitiku lahko zgodile v milijon letih.

Spremembo v časovni skali, ko gremo v preteklost, uporabimo tudi za razlago zgodovinskih dogodkov. Npr. vzpon in padec rimskega imperija se je zgodil v 1500 letih. Danes se propad imperija, ki so ga gradili več 100 let, zgodi v le nekaj desetletjih. V zgodnjem paleolitiku pa je bilo potrebno milijon let, da so se zgodile opazne spremembe [2].

Transformacija in krajšanje časa je vidno na logaritemski skali, ko se približujemo kritičnemu letu T_1 . Matematično to opišemo s časovno skalo, kjer upoštevamo eksponentni čas rasti T_e [2]

$$T_e = \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dT} \right)^{-1} = \frac{1}{\tau} [(T_1 - T)^2 + \tau^2] \operatorname{arccot} \frac{T_1 - T}{\tau}. \quad (68)$$

Leta 1989 je eksponentni čas dosegel svoj minimum: 58 let, kar se ujema z relativno hitrostjo rasti 1,7 % oz. s podvojitvenim časom 40 let.

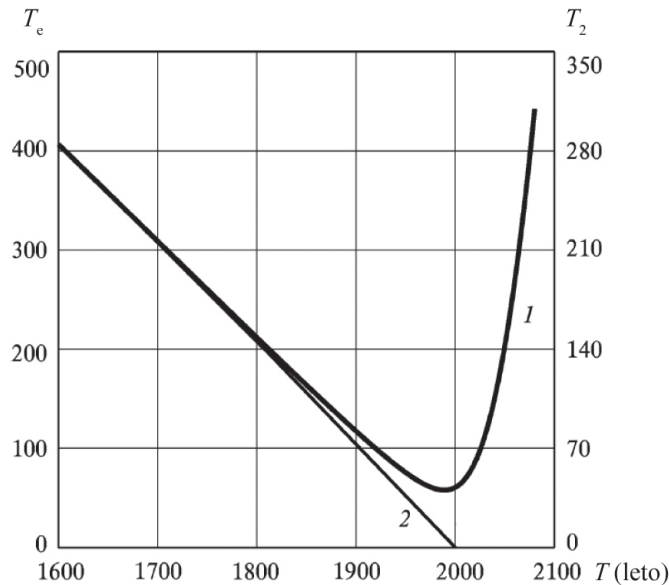
Za epoho B eksponentni čas izračunamo

$$T_e(T) \approx T_1 - T. \quad (69)$$

V eksponentni rasti je T_e konstanten, v hiperbolični rasti pa se spreminja s časom, $T_e(T)$.

Eksponentni čas rasti je povezan z Lyapunovim indeksom $T_e = 2\tau/\lambda$. Nestabilnosti rastejo dvakrat hitreje kot populacija [3] in zato je zaviranje nujno. Po T_1 velja $\lambda < 0$ in stabilnost rasti se povečuje, ter doseže maksimum pri $T_1 + \tau = 2049$, ter potem zopet pada, ampak vedno ohranja asimptotično stabilnost.

'Spreminjanje' časa je posledica hiperbolične rasti. Ko se približamo T_1 , $T_e(T)$ ni več linearna funkcija, temveč se ravna po enačbi (68). Ko se število ljudi umirja in stabilizira, eksponentni čas raste kot $T_e \approx (T_1 - T)^2/\tau$ za $T > T_1$ (slika 17).



Slika 17: Spreminjanje eksponentnega, T_e in podvojitvenega časa, $T_2 = 0,7 \cdot T_e$. 1 – točen eksponentni čas rasti, 2 – linearna aproksimacije eksponentnega časa v preteklosti. Vir: [3]

Perioda demografskih ciklov (tabela 4) se pojavlja kot zaporedje intervalov

$$\Delta T(\theta) = K\tau \exp(-\theta), \quad (70)$$

kjer je θ cifra posamezne periode. Ta zavzema vrednosti od $\theta = 0$ do $\theta = \ln K = 11$. Tako lahko dobimo trajanje našega razvoja

$$T_1 - T_0 = K\tau \sum_0^{\ln K} \exp(-\theta) = \frac{\exp}{\exp - 1} K\tau = 1,582K\tau, \quad (71)$$

kar je zelo blizu (47). Neujemanje pripišemo različnim 'začetkom' epohe A, saj se začetek obeh 0-tih ciklov razlikuje za $\Delta T_0 = 2,8 \cdot 10^6$.

Tabela 4: Transformacija oz. skrčenje časa je najbolj vidna na logaritemski skali. Glavne zgodovinske periode so na takšni skali bolj ali manj enako razmaknjene med letom $T_0 = 4,4$ milijarde let pr. n. št. in $T_1 = 2007$. Meje, ki določajo začetek oz. konec posameznih period, niso definirane s spremembami v rasti prebivalstva, ampak s tehnološkimi in socialnimi spremembami. Vsak posamezen cikel je od prejšnjega krajši od 2,5–3-krat, medtem ko se populacija veča z istim sorazmerjem: na začetku je človeštvo za tako povečanje potrebovala milijon let, sedaj le τ [3].

Razvoj človeškega sistema kaže, da se hitrost rasti viša s povečanjem števila ljudi. Na ta način čas trajanja dogodkov v zgodovini postane odvisen od rasti populacije. Z večanjem svetovne populacije pride do 'stiskanja' časovne skale. Demografska tranzicija je referenčna točka od katere gledamo spremembe v času. Ko se globalna populacija približuje kritičnemu trenutku, se čas posamezne dobe človeškega razvoja krajša [2].

Na začetku paleolitika je bilo na Zemlji približno 100.000 ljudi. Do sprememb je prišlo v milijon letih in v tem času se je populacija povečala za 150.000 ljudi. Do takega prirastka danes pride v eni noči.

Epoha	θ	Leto	Število ljudi	Kulturna perioda	ΔT let	Pomembni dogodki
C	T_1	2200	$11 \cdot 10^9$	stabilizacija		limita populacije, globalizacija, urbanizacija, internet
		2050	$9 \cdot 10^9$	populacije		
		2000	$6 \cdot 10^9$	demografska	45	
B	11	1955	$3 \cdot 10^9$	revolucija	45	biotehnologija, računalniki, nuklearna energija, svetovni vojni, električna energija, ind. revolucija, tisk, univerze, geografska odkritja, padec rimskega imperija, grška civilizacija, Mezopotamija, Egipt, pisava, agrikultura, bron, jezik, govor, ogenj, <i>Homo sapiens</i> , naseljeni Evropa in Azija, orodje, <i>Homo habilis</i>
	10	1840	$1 \cdot 10^9$	nedavna zgodovina	125	
	9	1500		moderna doba	340	
	8	500		srednji vek	1000	
	7	2000 pr. n. št	10^8	antika	2500	
	6	9000	$\cdot 10^7$	neolitik	7000	
	5	29000		mezolitik	20000	
	4	80000		moustier	51000	
	3	220000	$\cdot 10^6$	acheulean	140000	
	2	600000	$\cdot 10^5$	chelles	380000	
	1	1600000		olduvaj	1000000	
A	T_0	4-5 milijonov	(1)	antropogeneza	3000000	ločitev hominidov od homonoidov

Tabela 4: Rast in razvoj človeštva prikazana na logaritemski časovni skali.
Vir: [11]

13 Prihodnost

Fenomeloška teorija vsebujejo čas demografske tranzicije T_1 , po katerem pride do velikih sprememb v hitrosti rasti. V času pred njim je rast populacije zelo hitra, hiperbolična, po T_1 pa rasti populacije skoraj ni. Zato je čas T_1 zelo pomemben za prihodnost človeštva.

Teorija temelji na tem, da gremo v času demografske tranzicije skozi fazno spremembo in da bomo po njej vstopili v novo fazo človeštva. Čas tranzicije bomo obravnavali kot točko T_1 in ne kot daljše časovno obdobje.

Zametki nove faze se morajo pojaviti pred časom demografske tranzicije [25]. Bodo novo fazo sestavljale internacionalne teroristične skupine in se bodo nemiri in vojne razširile po celem svetu? Ali jo bodo sestavljali koruptivni uradniki, ki bodo za svoje dobro uničili preostali svet? Se bo nova faza človeštva od stare ločila na psihološkem nivoju (npr. obnašanje) ali v smislu fiziologije? Ali so bili fašisti med drugo svetovno vojno že zametki nove faze? Odgovore na taka in podobna vprašanja si želijo ter iščejo vlade in raziskovalne demografske skupine razvitih držav [25].

Prvi, ki je predlagala teorijo o demografski tranziciji kot faznem prehodu je bil Landau. Tranzicija iz stare v novo fazo je lahko [25]:

- zelo hitra;
- zelo dolga in z vmesnim stanjem, ko obe fazi človeštva bivata sočasno;
- opisana z raztezanjem časovne skale.

Kateri od primerov se bo zgodil, bo določeno s karakteristikami začetnih interakcij med zametki nove faze in njene povezave s staro fazo človeštva. Če bo interakcija med človekom stare in nove faze privedla človeka stare faze, da prestopi v novo fazo, bo interakcija negativna. V tem primeru bo čas tranzicije kratek, in obe fazi ne bosta dolgo koeksistentni. Če pa človeka stare faze, nova ne bo privabila, pozitivna interakcija, potem bo čas tranzicije daljši in obe fazi bosta dolgo bivali sočasno [26]. Čas sobivanja je določen z vodilnimi parametri.

Pogledali si bomo eno od matematičnih analiz in opisali dve fazi človeštva, staro in novo. Obnašanje faz v odvisnosti od časa bomo opisali s preprostim sistemom diferencialnih enačb Volterra-Lotka za sistem plenilec–plen [26], kjer bo človeštvo stare faze plen in človeštvo nove faze plenilec.

13.1 Enačbe Volterra–Lotka za staro in novo fazo človeške populacije

Demografska tranzicija kaže znake fizikalne fazne spremembe, ki bi jo lahko obravnavali s termodinamično teorijo faznih prehodov med staro in novo fazo človeštva. Po tranziciji se spremeni starostna distribucija prebivalstva (slika 10).

Leta 1920 sta Lotka in Volterra neodvisno prišla do matematičnega modela za populacijsko dinamiko plenilca in plena. Povezava med plenilcem in plenom poveča število plenilcev ter zmanjša število plena.

Označimo populacijo stare faze človeštva, plen, z $N_1(t)$ in nove faze človeštva, plenilec, z $N_2(t)$, kjer je t trenutni čas.

Da razvijemo model, moramo vedeti, kako veliki sta populaciji ob času $t + \Delta t$

$$N_1(t + \Delta t) = N_1(t) + c\Delta t N_1(t) - \gamma\Delta t N_1(t)N_2(t), \quad (72)$$

$$N_2(t + \Delta t) = N_2(t) - \delta\Delta t N_2(t) + b\Delta t N_1(t)N_2(t). \quad (73)$$

Vsi parametri c , γ , δ , $b > 0$. Parametra c in δ sta povprečni vrednosti na prebivalca za rodnost plena in smrtnost plenilca v odsotnosti druge vrste. $\gamma\Delta t N_1 N_2$ je rezultat zmanjšanja interakcije med obema fazama v času Δt . Nova faza človeštva, plenilec, se na račun zmanjšane interakcije poveča za $b\Delta t N_1 N_2$.

Diferencialni enačbi Volterra–Lotka za sistem plenilec–plen dobimo, če pošljemo $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_1(t) = cN_1(t) - \gamma N_1(t)N_2(t) \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_2(t) = -\delta N_2(t) + bN_1(t)N_2(t). \quad (75)$$

Obe človeški fazi sta med seboj povezani in določata druga drugo.

Enačbi (74) in (75) smatramo kot osnovni enačbi biološkega modela za opis bodoče populacije človeštva, če obstajata dve fazi človeštva [26].

Značilnost tega modela je, da populacija plena v odsotnosti plenilcev narašča eksponentno, medtem ko populacija plenilcev v odsotnosti plena eksponentno pada [27].

Enačbi (74–75) sta lahko zapisani za povprečni vrednosti N_1 in N_2 ali kot glavni enačbi za verjetnost $\omega(N_1, N_2, t)$, da najdemo sistem ob času t z vrednostima N_1 in N_2 . Upoštevamo lahko tudi vpliv fluktuacij in šumov (odvisne od c , b , γ , δ) na obnašanje sistema. Zapisali bi lahko tudi, da ima nova faza človeštva N_2 neko 'počivalno dobo', ko nima nikakršnih interakcij s staro fazo [26].

Z enačbama (74–75) lahko dobimo rešitve za različne sisteme enačb, ki opisujejo interakcije med staro in novo fazo človeštva [26]:

- Možnost sobivanja stare in nove faze s periodično menjavo vrednosti N_1 in N_2 ;
- Možnost, da ena od faz izumre zaradi druge, kar je odvisno od začetnih vrednosti;
- Možnost izračuna povprečne vrednosti N_1 in N_2 v izbranem stanju sistema;
- Možnost za izračun časa obstoja, t_{ex} , za staro ali novo fazo, če v začetni enačbi upoštevamo notranji ali zunanji šum;
- Možnost vodenja procesa z bitko ali sobivanjem med obema fazama;
- Možnost uporabe bolj zapletenega modela in enačb (med drugim tudi upoštevanje fraktalnih karakteristik porazdelitve človeške populacije na časovni skali);
- Možnost izbire različnih variacij glavnih parametrov, ki temeljijo na socioloških podatkih, itd.

Model plenilec–plen poda veliko različnih možnosti za raziskavo obnašanja obeh faz človeštva. Trije najbolj možni scenariji za model, ki temelji na enačbah (74) in (75), so [26]:

- Obe fazi dolgo bivata sočasno s periodičnimi menjavami njunih vrednosti. Oscilacije nimajo fiksne amplitude, poznamo pa povprečni vrednosti. Za staro populacijo je le ta $N_1 = \delta b^{-1}$ in za novo generacijo $N_2 = c\gamma^{-1}$.
- Človeška populacija postane nestabilna, kot posledica vplivov motenj (naravna katastrofa, neozdravljive bolezni, itd.).
- Stara faza človeštva ima omejen čas obstoja, ki ga lahko izračunamo, če definiramo parametre teorije.

13.1.1 Stabilnost modela plenilec–plen

Ogledamo si stabilnost modela plenilec–plen. Vzamemo sistem dveh diferencialnih enačb oblike

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (76)$$

čeprav lahko uporabimo naš rezultat tudi za večje sisteme [27]. Funkciji f in g nista eksplicitno odvisni od spremenljivke t . Fiksne točke sistema so določene z $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Recimo, da je (x_*, y_*) stabilna točka. Da določimo stabilnost v bližini te točke, upoštevamo majhne motnje v obe smeri: $x(0) = x_* + \epsilon(0)$, $y(0) = y_*(0) + \beta(0)$. Če motnji s časom rasteta, potem je fiksna točka nestabilna, če pa se motnji manjšata, potem je fiksna točka stabilna. Vzamemo

$$x(t) = x_* + \epsilon(t), \quad y(t) = y_* + \beta(t). \quad (77)$$

Vstavimo (77) v (76), da določimo odvisnost ϵ in β od časa t . Vemo, da sta x_* in y_* konstanti. Dobimo

$$\frac{d\epsilon}{dt} = f(x_* + \epsilon, y_* + \beta), \quad \frac{d\beta}{dt} = g(x_* + \epsilon, y_* + \beta). \quad (78)$$

Predvidevamo, da sta začetni motnji $\epsilon(0)$ in $\beta(0)$ dovolj majhni, da lahko zanemarimo Taylorjevo formulo za funkcije več spremenljivk za f in g okoli $\epsilon = \beta = 0$, nad prvim redom ϵ in β . Taylorjevo formulo za dve spremenljivki funkcije $F(x, y)$ okoli $(0, 0)$ zapišemo

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(0, 0) + xF_x(0, 0) + yF_y(0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} [x^2F_{xx}(0, 0) + 2xyF_{xy}(0, 0) + y^2F_{yy}(0, 0)] + \dots \end{aligned} \quad (79)$$

F_x je parcialni odvod funkcije F po x , F_y po y , itd.

Sedaj $f(x_* + \epsilon, y_* + \beta)$ in $g(x_* + \epsilon, y_* + \beta)$ s Taylorjevo formulo razvijemo okoli $(\epsilon, \beta) = (0, 0)$. Konstantna člena odpadeta, saj je (x_*, y_*) fiksna točka. Prav tako zanemarimo vse izraze, ki vsebujejo ϵ in β višjega reda. Dobimo

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \epsilon f_x(x_*, y_*) + \beta f_y(x_*, y_*), \quad \frac{d\beta}{dt} = \epsilon g_x(x_*, y_*) + \beta g_y(x_*, y_*) \quad (80)$$

kar lahko zapišemo z matriko

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^* & f_y^* \\ g_x^* & g_y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (81)$$

kjer je $f_x^* = f_x(x_*, y_*)$, itd.

Matrika (81) je sistem linearnih diferencialnih enačb. Rešitev ima obliko

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \beta \end{bmatrix} = \exp(\lambda t) \mathbf{v}. \quad (82)$$

Vstavimo (82) v (81), pokrajšamo z $e^{\lambda t}$ na obeh straneh in dobimo

$$J^* \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \quad J^* = \begin{bmatrix} f_x^* & f_y^* \\ g_x^* & g_y^* \end{bmatrix}, \quad (83)$$

kjer je λ lastna vrednost, \mathbf{v} lastni vektor za izbran λ , J^* pa je Jakobijeva matrika z vrednostmi v fiksni točki. Lastno vrednost dobimo iz

$$\det(J^* - \lambda I) = 0, \quad (84)$$

ki za 2x2 Jacobijevu matriko da kvadratno enačbo za λ . Iz oblike rešitve (82) vemo, da je fiksna točka stabilna, če za obe lastni vrednosti λ velja $Re\lambda < 0$. Fiksna točka pa je nestabilna, če za vsaj eno lastno vrednost λ velja $Re\lambda > 0$.

Sedaj se vrnimo k Volterra–Lotka enačbama (74–75). Fiksno točko najdemo z reševanjem $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$ in rešitvi sta

$$(N_{1*}, N_{2*}) = (0, 0) \quad \text{ali} \quad \left(\frac{\delta}{b}, \frac{c}{\gamma} \right). \quad (85)$$

Točka (0,0) je trivialna in nestabilna, saj populacija plena raste eksponentno, če je na začetku majhna.

Da dobimo stabilnost točke $\left(\frac{\delta}{b}, \frac{c}{\gamma} \right)$ zapišemo enačbi (74–75) kot

$$\frac{dN_1}{dt} = F(N_1, N_2), \quad \frac{dN_2}{dt} = G(N_1, N_2). \quad (86)$$

Funkciji F in G sta

$$F(N_1, N_2) = cN_1 - \gamma N_1 N_2, \quad G(N_1, N_2) = bN_1 N_2 - \delta N_2. \quad (87)$$

Izračunamo parcialne odvode

$$\begin{aligned} F_{N_1} &= c - \gamma N_2, & F_{N_2} &= -\gamma N_1 \\ G_{N_1} &= bN_2, & G_{N_2} &= bN_1 - \delta. \end{aligned} \quad (88)$$

Jacobijeva matrika v fiksni točki $(N_{1*}, N_{2*}) = \left(\frac{\delta}{b}, \frac{c}{\gamma} \right)$ je

$$J^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta\gamma}{b} \\ \frac{bc}{\gamma} & 0 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Ko izračunamo $\det(J^* - \lambda I) = 0$, dobimo enačbo za lastni vrednosti

$$\lambda^2 + \delta c = 0. \quad (90)$$

Rešitvi sta imaginarni: $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\delta c}$. Če so lastne vrednosti 2x2 Jacobi-jeve matrike imaginarne, potem je stabilna točka $\left(\frac{\delta}{b}, \frac{c}{\gamma}\right)$ center in motnje oscilirajo. V našem primer je frekvenca oscilacij $\omega = \sqrt{\delta c}$, perioda pa je $2\pi/\omega$.

Populacija plenilcev sledi populaciji plena z zamikom 90° . Stara in nova faza človeštva torej sobivata s periodično menjavo vrednosti.

13.2 Stabilnost populacije v prihodnosti

Še malo se bomo zadržali pri populaciji v prihodnosti. Stabilizacija števila populacije skoraj vedno vodi do ustavitve razvoja (npr. veliko vrst insektov, termiti, ki se niso spremenili že milijone let). Pojavi se lahko bolj aktivna, dominantna biološka vrsta.

V članku [25] prihodnost vidimo s pomočjo fraktalne geometrije. Pogledali si bomo, kako bi se lahko spreminjala številčnost populacije, če ne bo prišlo do nove faze človeštva. Populacijo vseh ljudi označimo z $N(t)$ in jo upoštevamo kot multifraktalni sistem. $N(t)$ ljudem ob času t pripišemo fraktalno dimenzijo $d(t)$, ki je odvisna od glavnih parametrov pri razvoju človeštva X_i .

Fraktalno dimenzijo določajo spremenljivke in njihove funkcije, ki jih smatramo kot glavne parametre pri razvoju človeštva. Npr. parameter genetskega izvora (gostota populacije v mestih) ali pa zunanji parametri, kot so zmožnost oskrbe človeštva z zadostnimi količinami hrane, vode in energije [25].

Spremembo populacije $N(t)$ v kratkem časovnem intervalu zapišemo s frakcijskim (Riemann-Liouville-ovim) diferencialnim operatorjem [25]

$$D_{+,t}^{1+\nu(t)} N(t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \int_0^t \frac{N(t') dt'}{\Gamma(\alpha - d(t'))(t - t')^{d(t') - \alpha + 1}}, \quad (91)$$

$$d(t) = 1 + \nu(t) > 0, \quad (92)$$

$$\nu(t) = \nu(X_1(t), X_2(t) \dots X_i(t)), i = 1, 2, \dots, \alpha = \{d\} + 1, \quad (93)$$

kjer je $d(t)$ fraktalna dimenzija človeštva, Γ pa Eulerjeva gama funkcija. $\nu(t)$ določa razliko med odvodom celoštevilskega reda in frakcijsko izpeljavo (91) ter je vodilni parameter za celotno rast človeštva. $\{d\}$ je enak celoštevilskemu delu $d(t) > 0$ ($\alpha - 1 \leq d(t) < \alpha$), $\alpha = 0$ za $d < 0$. Izbran X_i predstavlja, notranji ali zunanji, parameter, ki vpliva na rast populacije.

Informacije o funkciji ν dobimo s preučevanjem in obdelavo statističnih podatkov vplivov različnih dogodkov na razvoj populacije. S tem upoštevamo, pridobimo spomin na razvoj človeštva skozi leta.

Pri fenomenološki teoriji ne upoštevamo ne notranjih ne zunanjih parametrov, ampak temelji le na sebi podobni rasti populacije.

Predvidevamo, da je hipoteza o fraktalni naravi $N(t)$ pravilna. Odvajanje enačbe

$$\frac{\partial N(t)}{\partial t} = \frac{C'}{(T'_1 - T)^2 + \tau^2} \quad (94)$$

po času $\frac{\partial}{\partial t}$ mora biti nadomestek frakcijskega odvajanja $D_{+,t}^{1+\nu(t)}$. Konstanti sta enaki kot pri Kapitzi: $C' = C = 186 * 10^9$ in $T'_1 = T_1 = 2007$. Postopek upošteva spomin človeštva o razvoju v preteklosti. Tudi desni del (94) moramo spremeniti, da bo upoštevan vpliv fraktalne dimenzije. Namesto (94) zapišemo

$$D_{+,t}^{1+\nu(t)} N(t) = \frac{C'}{|T'_1 - T|^{2+\nu(t)} + \frac{2+\nu(t)}{2} \tau^{2+\nu(t)}}. \quad (95)$$

To enačbo upoštevamo kot osnovno enačbo fenomenološke teorije razvoja človeške populacije.

Izbor različnih funkcij fraktalnih popravkov za $\nu(t)$ nam dovoljuje, da ocenimo spreminjanje $N(t)$ kot funkcijo časa. Poglejmo nekatere preproste primere napovedi rasti človeške populacije z upoštevanjem enačbe (95). Fraktalna dimenzija bo zaradi enostavnosti celoštevilska.

- $\nu(t) = 0$

Pri $\nu(t) = 0$ je frakcijski odvod enak $\frac{\partial}{\partial t}$ in enačba (95) je enaka enačbi (94). Pozitivni in negativni kontrolni parametri X_i se najbrž med seboj izničijo.

V tem primeru je $d(t) = 1$ in dobimo Kapitzovo fenomenološko teorijo.

- $\nu(t) \rightarrow -1$

V tem primeru je človeštvo nagnjeno k negativnemu razvoju, npr. pojav ireverzibilnih sprememb v molekulah DNA, kozmične katastrofe (padanje izredno težkih meteoritov), itd. Pri $d(t) \rightarrow 0$ se enačba (95) spremeni

$$N(t) = \frac{2C'}{2|T'_1 - T| + \tau}. \quad (96)$$

Po tej enačbi dobimo, da bo največje število ljudi ob $T = T'_1 = 2007$ in sicer $8,86 \cdot 10^9$. Po tranziciji bo številčnost populacije padala in leta 2107 bo doseglo številko $N(t) = 1,54 \cdot 10^9$. Do leta 3007 se bo število ljudi zmanjšalo na $182 \cdot 10^6$. Kot posledica manjšanja števila prebivalcev lahko pride do povsem degeneriranega, izprijenega človeštva.

- $\nu(t) \rightarrow -2$

V tem primeru pride do kopičenja negativnih faktorjev in ti faktorji dajo negativno vrednost $d(t)$, zaradi česar pride do takojšnjega zmanjšanja človeške populacije. Na koncu sledi izumrtje človeštva. (95) se spremeni v integralno enačbo

$$\int_{T'}^T N(t) dt = C', \quad (97)$$

ki predvideva izumrtje človeštva. Časovni interval, ki je potreben za izumrtje, je določen s časom, v katerem bo $d(t)$ prešel od vrednosti na kateri je sedaj, do take negativne vrednosti. To obdobje lahko traja nekaj let (kozmična katastrofa) ali pa nekaj stoletij (virus) [25]. Tak negativen scenarij se lahko spremeni, če prevladajo pozitivni kontrolni parametri X_i . V tem primeru se izognemo izumrtju in uničenju človeške populacije.

- $\nu(t) = 1$

Za zadnji primer si ogledamo bolj optimističen scenarij. Odvisen je od prevladujočih pozitivnih glavnih faktorjev, $d(t) > 1$. Za $d(t) = 2$ iz (95) dobimo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} N(t) = \frac{C'}{|T' - T|^3 + 1,5\tau^3}. \quad (98)$$

Pri $T \gg \tau$ se vrednost $N(t)$ povečuje hitreje, kot pri linearni odvisnosti od časa $N(t) \sim (T - T_1)$. Število prebivalcev se povečuje po enačbi

$$N(t)|_{t \rightarrow \infty} \sim \frac{C'(T - T'_1)}{2,29\tau^2} \ln \frac{(T - T'_1)}{\tau}. \quad (99)$$

Po tej enačbi je rast človeštva neomejeno.

Če bo populacija rastla po zgornji enačbi (99), bo do leta 3000 na Zemlji živelo že 150 milijard ljudi.

Če se bo vrednost $d(t)$ periodično spreminjala s časom, se bo tudi svetovna populacija spreminjala periodično in bo odvisna od konkretne vrednosti za d in $N(t)$ ter ne bo monotona funkcija časa.

Vidimo lahko torej, na kakšen način lahko pozitivni in negativni faktorji vplivajo na razvoj človeštva v prihodnosti, z metodo, pri kateri človeški populaciji $N(t)$ pripišemo fraktalno dimenzijo $d(t)$. Na dogajanje v prihodnosti lahko vplivamo tudi sami z izbiro parametrov.

14 Zaključek

Svet in večina držav gre skozi obdobje hitre demografske spremembe. Najbolj očitno se to vidi v hitrem povečanju človeške populacije: v 50-ih letih se je leta povečala za 4 milijarde. Tudi drugi demografski procesi gredo skozi spremembe: ženske postajajo bolj izobražene in imajo manj otrok, pričakovana življenjska doba se povečuje, hitro pa se povečuje tudi delež urbanega prebivalstva, itd..

S pomočjo Kapitzove fenomenološke teorije opišemo rast in razvoj človeške populacije. Po tej teoriji razvoj človeštva razdelimo v 3 epohe. Epoho A, ki se je začela pred 4,4 milijone leti in za katero je značilna linearna rast populacije. Epoho B, ki se je pričela pred 2,8 milijoni let. V tej epohi je bila hitrost rasti odvisna od kvadratne vrednosti same populacije, ki se konča s tranzicijo (epoha C) do stabilne populacije.

Rast populacije se bo nadaljevala še nekaj desetletij, nato pa se bo ustalila pri 10–12 milijardah ljudi okoli leta 2050. Do stabilizacije pride zaradi nezmožnosti človeške populacije, da vzdržuje isto hitrost razvoja. Povečanje populacije vodi do spremembe v starostni strukturi populacije, kar vpliva na družbo, ekonomijo in okolje. Po tranziciji torej pričakujemo epoho z nično stopnjo rasti, trajanje tranzicije pa je odvisno od mikroskopskega časa teorije - τ . Šele bodoči antropologi bodo lahko čez 50–100 let razumeli razsežnost tranzicije, skozi katero gremo. Število vseh kadarkoli živečih ljudi pa naj bi se ustavilo pri številki 100 milijard.

Fenomenološka teorija ne potrebuje stopnje rodnosti in smrtnosti, kar jo razlikuje od ostalih modelov. Skozi celotno zgodovino človeštva je rast sebi podobna in je v grobem odvisna le od celotnega števila ljudi na svetu. V vseh rezultatih teorije pa najdemo tudi parameter K , ki nam pove tudi efektivno velikost koherentnega vzorca populacije. Teorija sama ne opisuje procesov, ki so privedli do rasti populacije. Vemo pa, da rast ni odvisna od globalnih virov.

Eden izmed ključnih rezultatov teorije je transformacija časa, kar je posledica pospešene rasti. Ko se približujemo sedanjosti, hitrost rasti in razvoja postajata vedno hitrejša in na koncu dosežeta vrhunec ob eksploziji populacije, ki se konča z demografsko tranzicijo.

Kakšni so možni scenariji za človeštvo blizu in po kritičnem času. Pesimističen scenarij je, da pride do izumrtja človeštva zaradi kopičenja negativnih faktorjev, kar se lahko zgodi v nekaj desetletjih ali pa nekaj stoletjih. Možni temni scenariji so tudi sistematičen razvoj terorizma in ločitev človeštva v vsaj dve skupini: manjšino bogatih skupnosti ter na drugi strani revno prebivalstvo [5]. To bi se lahko zgodilo v posamezni razviti državi ali pa med razvitimi državami in državami v razvoju. Bolj optimističen scenarij

pa je, da bomo postali bolj ekološko osveščeni, kar bo vodilo do ekološke povezanosti industrije s človeštvom.

Zaradi stabilizacije števila prebivalcev se predvideva, da v prihodnosti številčnost populacije ne bo več igrala tako pomembne vloge kot danes. To lahko privede do dveh alteranativ. Stabilizacija populacije lahko vodi do ustavitve razvoja, druga možnost pa je, da se namesto sedanjemu kvantitativnemu razvoju usmerimo v kvalitativen razvoj in rast. Že danes prihaja do občutnih sprememb v zaposlovanju iz primarnega v terciaren sektor.

Literatura

- [1] <http://www.talkorigins.org/faqs/homs/species.html#timeline>, 10. 5. 2012
- [2] S. P. Kapitza, *The phenomenological theory of world population growth*, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **3**, 1 (1996), 57-71.
- [3] S. P. Kapitza, *Global population blow-up and after*, Global Marshall Plan Initiative, Hamburg, 2006.
- [4] http://www.eoearth.org/article/Human_population_explosion?topic54245, 5. 5. 2012
- [5] A. Johansen in K. Sornette, *2050: The end of the growth era?* <http://www.er.ethz.ch/publications/ENDofGROWTHeraESSAY3.pdf> 13. 4. 2012
- [6] www.un.org/apps/news/story.asp?NewsID=40257, 1. 6. 2012
- [7] <http://www.worldometers.info/world-population/>, 3. 5. 2012
- [8] S. P. Kapitza, *Holst memorial lecture: World Population Growth and Technology*, 1996.
- [9] <http://rstb.royalsocietypublishing.org/content/364/1532/2985.full>, 1. 6. 2012
- [10] *World population to 2300*, United Nations, New York, 2004.
- [11] S. P. Kapitza, *Global population blow-up and after: the demographic revolution and sustainable development*, Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. **3**, 1 (2009), 5-12.
- [12] <http://www.stat.si>, 14. 5. 2012
- [13] D. D. Chiras, *Environmental science, 8th ed.*, Jones and Bartlett publishers, Sudbury, 2010.
- [14] *Transitions in world population*, Population Bulletin 59, no.1, Washington, 2004.
- [15] S. P. Kapitza, *On the theory of global population growth*, Physics–Uspekhi, **53**, 12 (2010), 1287–1296.

- [16] www.wealthcycles.com/blog/2011/03/17/how-close-are-we-to-exhausting-important-metal-supplies, 1. 6. 2012
- [17] D. H. Meadows, D. Meadows, J. Randers, *The limits to growth*, Universe Books, New York, 1972.
- [18] M. Golosovsky, *Models of the world human population growth – critical analysis* <http://arxiv.org/pdf/0910.3056v2.pdf>
- [19] M. L. McKinney, R. M. Schoch *Environmental science: systems and solutions, 3rd ed.*, Jones and Bartlett publishers, Sudbury, 2003.
- [20] V. I. Yukalov, E. P. Yukalova, D. Sornette, *Punctuated evolution due to delayed carrying capacity*, *Physica D.* **238** (2009), 1752-1767.
- [21] A. Korotayev, D. Khaltourina, *Introduction to social macrodynamic*, KomKniga, Moscow, 2006.
- [22] S. Ghirlanda, M. Enquist, M. Perc, *Sustainability of culture-driven population dynamics*, *Theor. Pop. Biol.*, **77** (2010), 181–188.
- [23] H. von Foerster, P. Mora, L. Amiot, *Doomsday; Friday, 13 November, A.D. 2026*, *Science* **132** (1960), 1291-1295.
- [24] S. P. Kapitza, *Matematicheskoe Modelirovanie* **4**, 6 (1992), 65-79.
- [25] L. Ya. Kobelev, L. L. Nugaeva, *Will the Population of Humanity in the Future be Stabilized?* <http://arxiv.org/abs/physics/0003035>
- [26] L. Ya. Kobelev, L. L. Nugaeva, *What Future Expects Humanity After the Demographic Transition Time?* <http://arxiv.org/abs/physics/0010023>
- [27] J. R. Chasnov, *Mathematical Biology: Lecture notes for MATH 4333* <http://www.math.ust.hk/~machas/mathematical-biology.pdf>