SEMINAR:

Intermitenca v turbulentnem toku

Jan Porekar

MENTOR: dr. Rudi Podgornik

Ljubljana, 2002

Povzetek

V seminarju smo predstavili pojem intermitentne porazdeliteve in poudarili razlike med normalno porazdelitvijo in intermitentno porazdelitvijo. Pokazali smo, da je v realnem svetu pojav intermitence pogost. Velikokrat predpostavljena, normalna ali Boltzmanova porazdelitev se namreè skozi nelinearne fizikalne zakone transformira in za opis dobljene intermitente porazdelitve ne zadostujta veè prva dva statistièina momenta. Dobljena intermitentna porazdelitev kaže ostre vrhove, njeni statistièni momenti pa narašèajo eksponento z redom momenta.
V jedru seminarja smo nekoliko podrobneje prouèili turbulentni tok tekoèine in ugotovili, da èeprav porazdelitev hitrosti v toku na prvi pogled izgleda samopodobna, temu ni tako. Ob visokofrekvenènem filtriranju signala hitrosti se na majhnih merskih lestvicah pokaže intermitentna porazdelitev.

Kazalo

Uvod

Normalna porazdelitev je pojem, s katerim je znanost moèno prežeta in dostikrat se zdi samoumevno, da pri poljubni opazovani kolièini, predpostvimo normalno porazdelitev. Normalna porazdelitev je zvezna, simetrièna, gladka in natanèno doloèena s prvima dvema momentoma: povpreèno vrednostjo in standardno deviacijo.

V realnosti velikokrat naletimo na kolièine, ki kažejo popolnoma drugaèno porazdelitev (glej ref. 1.). Za primer lahko vzamemo kar porazdelitev mase v vesolju. V glavnem je vesolje sestavljeno iz vakuuma, materija pa je skoncentrirana v, v primerjavi z razsežnotmi praznega prostora, relativno majhnih delih prostora. Tem »singularnostim« v porazdelitvi mase reèemo jate galaksij, znotraj katerih lahko v prejšnjem stavku naèeto zgodbo, zaèenmo rekurzivno ponavljati preko vseh dimenzij – od galaktiènih dimenzij, preko dimenzije, v kateri biva èloveštvo, do nivoja atomov in naprej. Za gostoto je znaèilno, da je v toèkah »singularnosti«, neprimerno veèja kot je njemo povpreèje na celotnem prostoru. Opisani popolnoma neenakomerni porazdelitvi reèemo intemitentna porazdelitev. Za intermitentno porazdelitev je znaèilno, da je ne moremo doloèiti s samo prvimi nekaj momenti (srednjo vrednostjo in srednjo vrednostjo kvadrata) in da vrednost momenta raste exponentno z redom momenta.

Podobne primere kot je zgoraj opisani, najdemo v naravi na veliko mestih. V prièujoèem seminarju se bomo, poleg razložitve pojma intermitence na umetnih primerih in opis intermitence pri elektroforezi makromolekul, posvetili pojavu intermitence pri èasovni porazdelitvi hitrosti v turbulentnem toku (glej ref. 3.). Pokazali bomo, da èeprav na prvi pogled omenjena hitrostna porazdelitev kaže znaèilnosti samopodobnosti, se pri opazovanju signala filtriranega skozi visokofrekvenèni filter izkaže, da je hitrost porazdeljena itermitentno na majhnih èasovnih merskih lestvicah.

Intermitenca - osnove

O intermitenci

Pri vsakem fizikalnem eksperimentu merimo realizacije nakljuène kolièine (ξ). V veèini primerov se predpostavi, da so tako izmerjene kolièine, porazdeljene normalno oz. Gaussovsko in so kot take natanèno doloèene le z dvema parametroma: povpreèjem ($\langle \xi \rangle$) in z disperzijo (σ^2). V praksi to pomeni, da merjena kolièina rahlo šumi in da je veèina vrednosti merjene nakljuène spremenljivke blizu prièakovane vrednosti, oziroma se nahaja v obmoèju, ki je od povpreèja oddaljeno nekaj enot standardne devijacije (σ). Sicer je možno, da takšna nakljuèna spremenljivka zavzame vrednosti, ki se moèno razlikujejo od povpreèja, toda omenjeni pojav je malo verjeten. Ta lastnost fizikalnih sistemov je osnova za uspešnost metode najmanjših kvadratov.
Normalna porazdelitev nakljuène fizikalne kolièine, je v veèini primerov posledica vsote velikega števila, med seboj slabo odvisnih nakljuènih spremenljivk, ki so vsaka zase porazdeljene enakomerno (centralni limitni teorem).
Vèasih pa se zgodi, da opazovana fizikalna kolièina, ni posledica vsote nakljuènih spremenljivk, temveè njihovega medsebojnega produkta, ali morda kakšne nelinearne zveze. V tem primeru fizkialna kolièina ni veè porazdeljena normalno, temveè intermitentno. Fizikalni primeri bodo podani v nadaljevanju seminarja, najprej pa si oglejmo nekaj šolskih, torej izmišljenih primerov.

1. primer : dominantnost nièel

Naj bo nakljuèna kolièina sestavljena iz velikega števila med seboj neodvisnih, enakomerno porazdeljenih, nakljuènih spremenljivk $\xi_i, i = 1...N$. Posamezna spremenljivka ξ_i z verjetnostjo ($p = 1/2$) zavzame vrednosti 0 ali 2.
Sestavljena kolièina:

$$\xi = \prod_{i=1}^{N} \xi_i = \xi_1 \xi_2 ... \xi_N$$

ima v veèini izidov vrednost 0. Edina izjema je primer, ko prav vse spremenljivke ξ_i zavzamejo vrednost 2. Ob velikem N je verjetnost za takšen dogodek zelo majhna (2^{-N}), ko pa do takega dogodka pride je njegova vrednost zelo velika (2^N).
Sestavljena kolièina ξ ima statistièno porazdelitev, ki je popolnoma drugaèna od Gaussove porazdelitve.

Srednja vrednost kolièine ξ je:

$$\langle \xi \rangle = \frac{vsota\,vrednosti\,izzidov}{št.izzidov} = \frac{0+0+...2^N}{2^N} = 1$$

Srednja vrednost kvadrata je:

$$\langle \xi^2 \rangle = \frac{vsota\,kvadratov\,izzidov}{št.izzidov} = \frac{0+0+...2^{2N}}{2^N} = 2^N$$

Podoben sklep velja tudi za višje momente. P – ti statistièni moment raste kot :

$$\langle \xi^p \rangle = 2^{(p-1)N}$$

Koeficijent rasti statistiènih momentov v primerjavi z N zapišemo kot:

$$\gamma_p \equiv \frac{\log_2 \langle \xi^p \rangle}{N} = p-1 \qquad (1.1)$$

Tudi stopnja rasti statistiènih momentov raste z redom momenta p. V limitnem primeru, ko $p \to \infty$ gre koeficijent rasti $\gamma_p \to p$.

Zgoraj omenjeni tip naključène količne je že primer intermitentne naključène kolièine. Podobno kot je Gaussovska naključèna funkcija vsota veliko enakomerno porazdeljenih naključènih števil, je intermitenta naključèna funkcija posledica medsebojnega zmnožka velikega števila naključènih števil.

2. primer : logaritem zmnožka

Zgornji enostavni primer intermitence lahko daje vtis, da je zaradi dominantnosti nièel nerealen. Vseeno obstajajo intermitentne funkcije, ki so od omenjenih nièel neodvisne. Zamislimo si naključèno kolièino, ki je sestavljena iz produkta naključènih spremenljivk ξ_i, katerih verjetnost izzida, je enakomerno porazdeljena okoli 1.

Pdobno kot v prejšnjem primeru imamo:

$$\xi = \prod_{i=1}^{N} \xi_i = \xi_1 \xi_2 ... \xi_N$$

Logaritem produkta funkcij ξ_i je enak

$$\ln \xi = \ln(\prod_{i=1}^{N} \xi_i) = \sum_{i=1}^{N} \ln \xi_i$$

vsoti N naključènih števil , ki so porazdeljena okoli 0. Za velik N ima logaritem naključène spremenljivke normalno porazdelitev:

$$\ln \xi \sim N^{1/2} \eta \ ,$$

kjer je η normalno porazdeljena nakljuèna spremenljivka s srednjo vrednostjo 0. Za razliko od logaritma $\ln \xi$, pa sama nakljuèna spremenljivka ξ nima normalne porazdelitve, temveè:

$$\xi \sim e^{N^{1/2}\eta}$$

pri èemer ima η vrednosti predvsem na intervalu $(-\sigma\mu, +\sigma\mu)$, kjer je σ standardna devijacija nakljuène spremenljivke η in je velikostnega reda 1. Za $\eta < 0$ so vrednosti ξ eksponentno blizu 0, med tem ko so za $\eta > 0$ vrednosti velike (reda $\xi \sim e^{N^{1/2}\sigma}$).
Srednja vrednost logaritemsko - normalne porazdelitve je:

$$\langle \xi \rangle = \int \xi(\eta)\, p(\eta) d\eta = \int e^{(N^{1/2}\eta)} e^{-(\eta^2/2\sigma)} d\eta \sim e^{\frac{N\sigma^2}{2}}$$

Srednja vrednost raste kot eksponentna funkcija N. Tudi višji momenti rasetejo eksponentno:

$$\langle \xi^r \rangle = \int \xi^r(\eta)\, p(\eta) d\eta = \int e^{(rN^{1/2}\eta)} e^{-(\eta^2/2\sigma)} d\eta \sim e^{\frac{r^2 N\sigma^2}{2}}$$

Koeficijent rasti r – tega statistiènega momenta je dan z:

$$\gamma_r = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln\langle \xi^r \rangle}{N} = r^2 \frac{\sigma^2}{2}$$

Omenjeni porazdelitvi v primerih sta intermitentni in se razlikujeta od Gaussove porazdelitve, ki je natanèno doloèena z prvima dvema momentoma in so njeni višji momenti enaki 0. V obeh zgoraj navedenih primerih namreè višji statistièni momenti narašèajo s stopnjo momenta in so moèno razlièni od 0.

Kaj je intermitenca?

V zgornjih poglavjih smo intermitentno porazdelitev predstavili in pokazali, da se pooplnoma razlikuje od normalne porzadelitve.
Naj znaèilnosti intermitentne porazdelitve povzamemo še enkrat:

- Ker je velik del gostote verjetnosti zbran v ostrih vrhovih, torej na zelo majhnem delu prostora (fiziènega ali èasovnega), je verjetnost da bomo naleteli na veliko veèjo vrednost majhna.
- Porazdelitev je popolnoma neenakomerna in se je ne da opisati z nekaj prvimi statitiènimi momenti, kot se da opisati normalno porazdelitev
- Za intermitentno porazdelitev je znaèilno, da vrednost višjih momentov raste exponentno z redom momenta.

Naključni potencial v mediju

Za primer vzamemimo nabite makromolekule, ki se pri elektroforezi gibljejo skozi nabit gel ali pufer. Zaradi viskoznosti, kot tudi lastnih elektrostatksih lastnosti gela, elektrièno polje nima natanèno doloèene smeri in velikosti, temveè rahlo šumi. Ne opazujemo dinamike molekul temveè stacionarno stanje koncentracij, katero sistem doseže po dolgem èasu. Polje v gelu zato opišemo z nakljuènim potencialom $U(x)$, ki je normalno porazdeljen okoli srednje vrednosti.
Obravnavali bom primer, ko je brezdimenzijski nakljuèni potencial $U(x)/kT$ normalno porazdeljena funkcija, s srednjo vrednostjo 0 in disperzijo 1.
Ravnovesno stanje koncentracij opišemo z enaèbo:

$$n = n_0\, e^{-\frac{U}{kT}}$$

V primeru $\sigma / kT \geq 1$ je oèitno, da dobljena porazdelitev koncentracij ni normalna, zaradi oèitne nelinearnosti U v eksponentu. Èe pa so fluktuacije majhne, $\sigma / kT \ll 1$, pa na prvi pogled izgleda, da porazdelitev koncentracij še vedno ostane normalna, saj lahko zgornjo enaèbo z razvojem v Taylorjevo vrsto preoblikujemo v enostavno linearno zvezo:

$$n = n_0\left(1 - \frac{U}{kT}\right),\ \langle n \rangle \approx n_0$$

V resnici se tudi za majhne vrednosti šumenja potenciala pokaže, da najverjetnejša porazdelitev ni normalna.
Gostota verjetnosti koncentracij se zapiše kot :

$$p(n(u)) = n_0 e^{\left(-\frac{U}{kT}\right)} p(U) = n_0 e^{\left(-\frac{U}{kT} - \frac{U^2}{2\sigma}\right)}$$

Njena najveèja vredost $p_{\max} = n_0 e^{\left(\sigma^2/2k^2T^2\right)}$ je dosežena, ko je $U_{\max}/\sigma = -\sigma/kT$

Statistièni momenti pa se zapišejo kot:

$$\langle n \rangle = n_0 e \frac{\sigma^2}{2k^2T^2},$$

$$\langle n^2 \rangle^{1/2} = n_0 e \frac{\sigma^2}{k^2T^2}$$

...

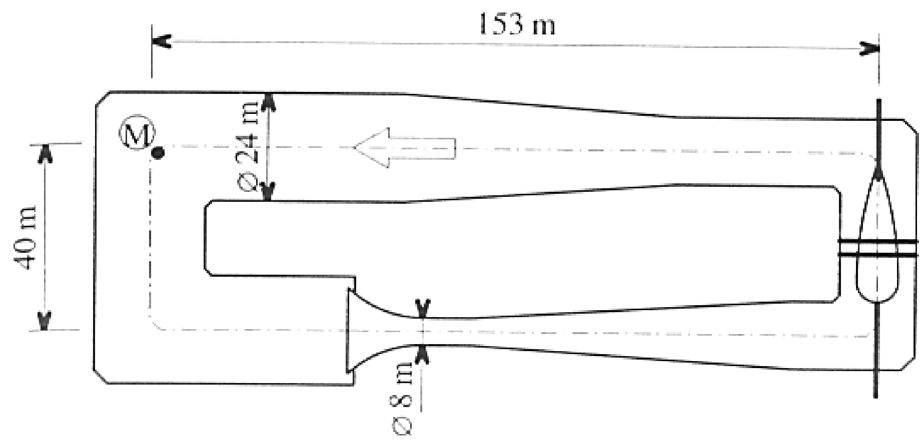
$$\langle n^p \rangle^{1/p} = n_0 e \frac{p\sigma^2}{2k^2T^2}$$

Statistièni momenti narašèajo eksponentno z redom momenta ($\langle n^2 \rangle \gg \langle n \rangle^2$, $\langle n^4 \rangle \gg \langle n^2 \rangle^2$, itd). Èe to dejstvo povzamemo nekako drugaèe: moment reda p ni doloèen z najverjetnejšo vrednostjo n (σ / kT), temveè s $p^{1/2}\, \sigma / kT$. Zato linearna aproksimacija ni dober opis niti za majhne vrednosti σ / kT, ker progresivna rast višjih statistiènih momentov proizvede intermitentno porazdelitev, torej redke, a zelo intenzivne vrhove v porazdelitvi koncentracije v gelu.

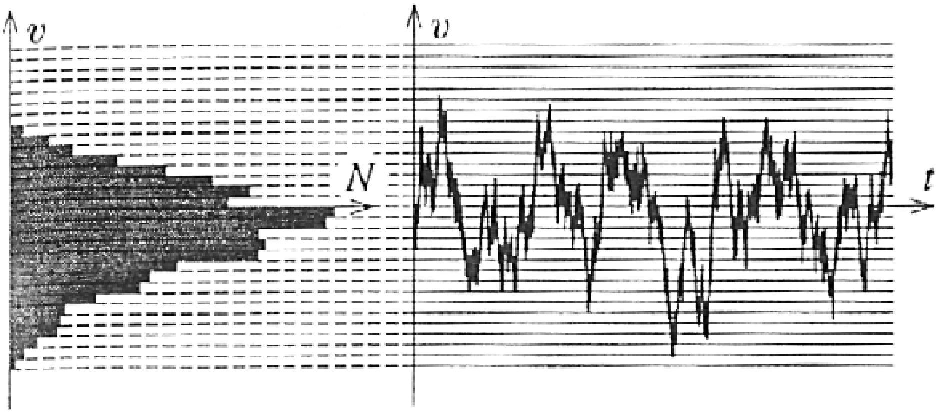
Razlik med Maxwell – Boltzmanovo porazdelitvijo in intermitentno porazdelitvijo je veliko. Maxwell – Boltzmanova porazdelitev je gladka in zvezna, veèino realizacij nakljuène spremenjivke leži znotraj nekaj dolžin σ / kT, porazdelitev je simetrièna in doloèena s prvima dvema momentoma. Realna porazdelitev koncentracij je intermitentna. Do nje pride zaradi šuma nakljuènega potenciala v gelu, katerega posledice se projecirajo skozi nelinearni zakon, ki doloèa ravnovesno stanje koncentracij. Intermitentna porazdelitev ima, za razliko od prej omenjene Maxwell - Boltzmanove, intenzivne vrhove, ni gladka in se je ne da opisati z le nekaj prvimi statistiènimi momenti.

Intermitenca v turbulenci

Ena od glavnih metod preuèevanja turbulence je velocimetrija, torej merjenje èasovnega poteka hitrosti na enem ali veè mestih v turbulentnem toku. Takšna merjenja se opravljajo v velikih vetrovnih tunelih. Eden takšnih vetrovnih tunelov je ONERA.



Za samo hitrost je znaèilno, da je nepredvidljiva – nemogoèe je natanèno napovedati njen èasovni potek. Predvidljive pa so statistiène znaèilnosti hitrosti (kot na primer histogram hitrosti), zato bomo tubulenco obravnavali statistièno.



Osnove hidrodinamike

Navier – Stokes-ova enaèba:

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \\ &\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

ali zapisano po vektorskih komponentah:

$$\begin{aligned} &\partial_t v_i + v_i \cdot \partial_j v_i = -\partial_i p + \nu \partial_{jj} v_i \\ &\partial_i v_i = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Reynolds-ovo število:

$$R = \frac{LV}{\nu} \tag{1.4}$$

L je velikostni red ovire v toku, V pa velikostni red hitrosti toka tekoèine. ν je kinematièna viskoznost obravnavane tekoèine.

Ohranitveni zakoni

Ohranitev momenta

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{v} \rangle = 0 \tag{1.5}$$

(Ne)Ohranitev energije

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}\nu \left\langle \sum_{ij} \left(\partial_i v_j - \partial_j v_i \right)^2 \right\rangle \tag{1.6}$$

Vidimo, da se energije ohranja le v primeru, ko je viskoznost ν enaka 0 (Eulerjeva enaèba). Èe viskoznost ni enaka 0, potem se s èasom kintièna energija toka tekoèine spreminja v notranjo, kar je ena glavnih znaèilnosti turbulence:

$$\varepsilon = -\frac{dE}{dt} < 0$$

Enaèba (1.6) ne vsebuje nikakršnega prispevka nelinearnega èlena Navier – Stokesove enaèbe. Izkaže se, da nelinearni èlen porazdeli energijo med razliène merske lestvice hitrosti, ne da bi pri tem zmanjševal skupno energijo sistema.

Za vpeljavo razliènih merskih lestvic in kasneje raziskovanje obnašanja funkcije hitrosti na le-teh, je ugodno funkcijo hitrosti razstaviti na posamezne Fourierove komponente periodiène na prostoru *L* :

$$f(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{f}_{\mathbf{k}} \; e^{i\mathbf{kr}} \quad , \quad \mathbf{k} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3 \tag{1.7}$$

Za razdelitev merske lestvice vpeljemo 2 družini funkcij, odvisnih od parametra ***K***>*0*. Nizko pasovna filtrirana funkcija je:

$$f_K^<(\mathbf{r}) = \sum_{k \le K} \hat{f}_{\mathbf{k}} \; \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}} \tag{1.8}$$

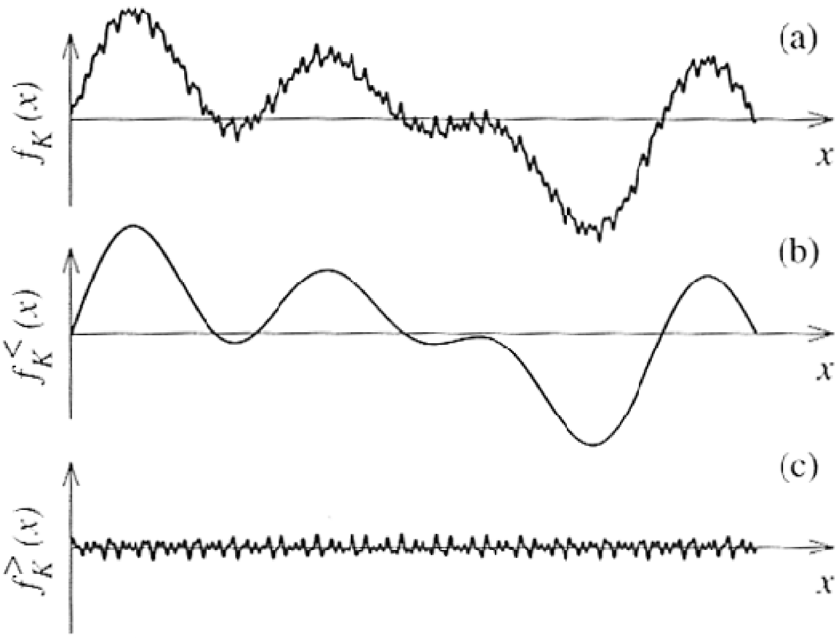
Visoko pasovna filtrirana funkcija je:

$$f_K^>(\mathbf{r}) = \sum_{k > K} \hat{f}_{\mathbf{k}} \; \mathrm{e}^{i\mathbf{kr}} \tag{1.9}$$

Oèitno velja:

$$f(\mathbf{r}) = f_K^<(\mathbf{r}) + f_K^>(\mathbf{r}) \tag{1.10}$$

Dolžino, ki jo dobimo z obratom lastnega vektorja K imenujemo merska lestvica filtriranja ($l = K^{-1}$).



slika 1: Filtriranje: a) nefiltriran signal b) filtriran signal – nizkofrekvenèni filter
c) filtriran signal – visokofrekvenèni filter

Izkaže se, da se pri turbulenci (s tipièno visokim Reynoldsovim številom) energija v sistem vnaša pri veliki merski lestvici ($O(l_o)$), izgublja pa se na majhnih merskih lestvicah ($O(l_d)$), pri èemer velja $l_o \gg l_d$

Samopodobnost in intermitentnost nakljuènih funkcij

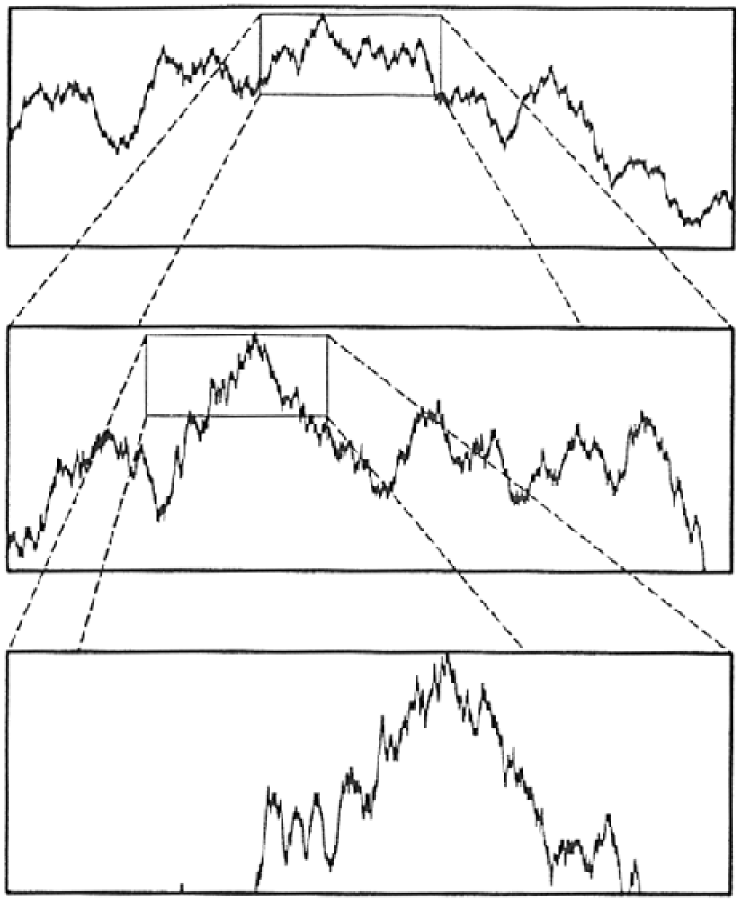
Pri raziskovanju obnašanja hitrosti v turbulentnem toku, se ob opazovajnu eksperimentalnih podatkov postavi vprašanje, ali je navidez nakljuèna hitrost v doloèenem mestu v toku sampodobna ali intermitentna. Ob hitrem pregledovanju realnih podatkov (slika 2a) se zdi, da je hitrost samopodobna preko razliènih merskih lestvic. Izkaže se da je samopodobnost le lastnost veèjih skal pri katerih se energija v sistem vnaša in da se na majhnih marskih lestvicah, kjer se energija izgublja oz. spreminja v notranjo, hitrost obnaša intermitentno (slika 2b).

Da interimtenco v hitrostni porazdelitvi sploh opazimo, moramo funkcijo hitrosti v turbulentnem toku tekoèine prefiltrirati skozi visokofrekvenèni filter:

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= \int_{IR^3} d\omega\, e^{i\omega t}\, \hat{v}_\omega \\ v_\Omega^>(t) &= \int_{|\omega|>\Omega} d\omega\, e^{i\omega t}\, \hat{v}_\omega \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

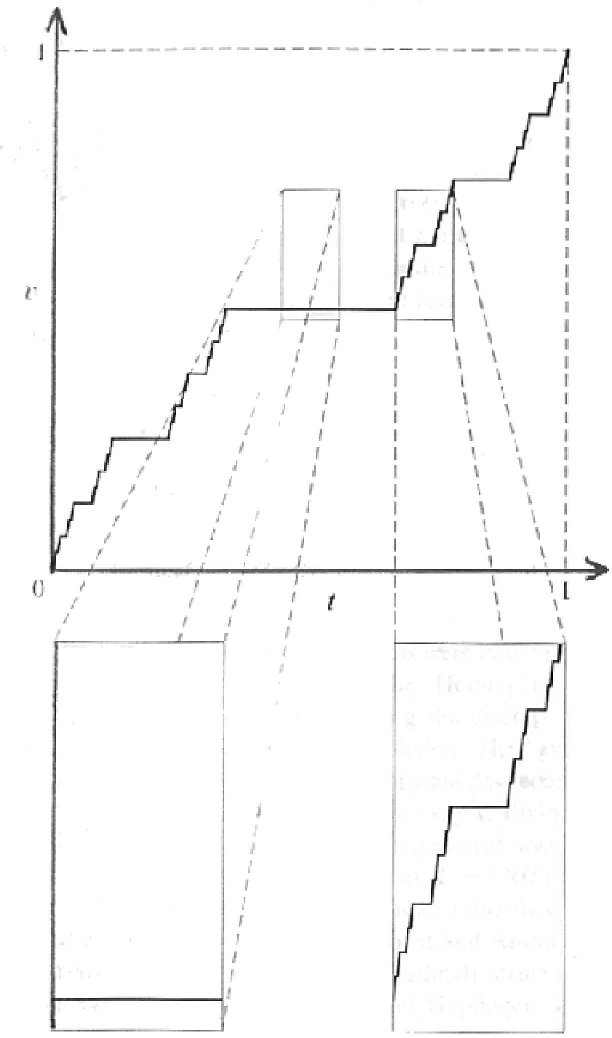
Samopodobnost hitrostnega polja èez merske lestvice, je ena od kljuènih prtedpostavk Kolmogorove teorije o turbulenci, narejene leta 1941, znane pod

imenom K41. Teorija predpostavi samopodobnost na velikih skalah, kjer se energija v sistem vnaša.
Klasièni koncept samopodobnosti naključnih funkcij je prikazan na sliki (slika 2a)



slika 2a : Klasièna samopodobnost. Del grafa, ki prikazuje odvisost hitrosti od èasa pri Brownovem gibanju. Dvakratna poveèava kaže na samopodobnost funkcije.

Na sliki je primer odvisnosti htrosti od èasa v Brownovem gibanju, prikazan v dveh poveèavah, ki kažeta samopodobnost funkcije hitrosti èez razliène merske lestvice. Samopodobnost funkcije je neodvisna od dela funkcije, ki ga prvotno opazujemo, oziroma je neodvisna od mesta kjer naredimo poveèavo.



slika 2b: Devil’s Staircase : Intermitentna funkcija. Funkcija ima povsod odvod 0, razen na množici toèk z mero 0, kjer odvod ni definiran.

Na drugi sliki (slika 2b) je funkcija imenovana “Devil's Staircase” oz. “Hudièevo stopnišèe”. Ta funkcija ne ustreza klasiènemu pojmu samopodobnosti, saj moramo pri poveèevanju obmoèja, kjer omenjeno samopodobnost želimo najti, zelo pozorno odmeriti mesto poveèevanja – èim bolj natanèno pregledujemo èasovni potek hitrosti, tem bolj natanèno moramo izbrati mesto pregledovanja, da dobimo netrivialen rezultat.

Omenjena funkcija “Hudièevo stopnišèe” je primer intermitentne funkcije: hitrost se spreminja le v doloèenih èasovnih trenutkih, sicer pa je konstantna. Èe pogledamo na funkcijo skozi matematièno teorijo, vidimo da ima funkcija povsod odvod 0, razen na množici toèk z mero 0, kjer ta odvod ni definiran.

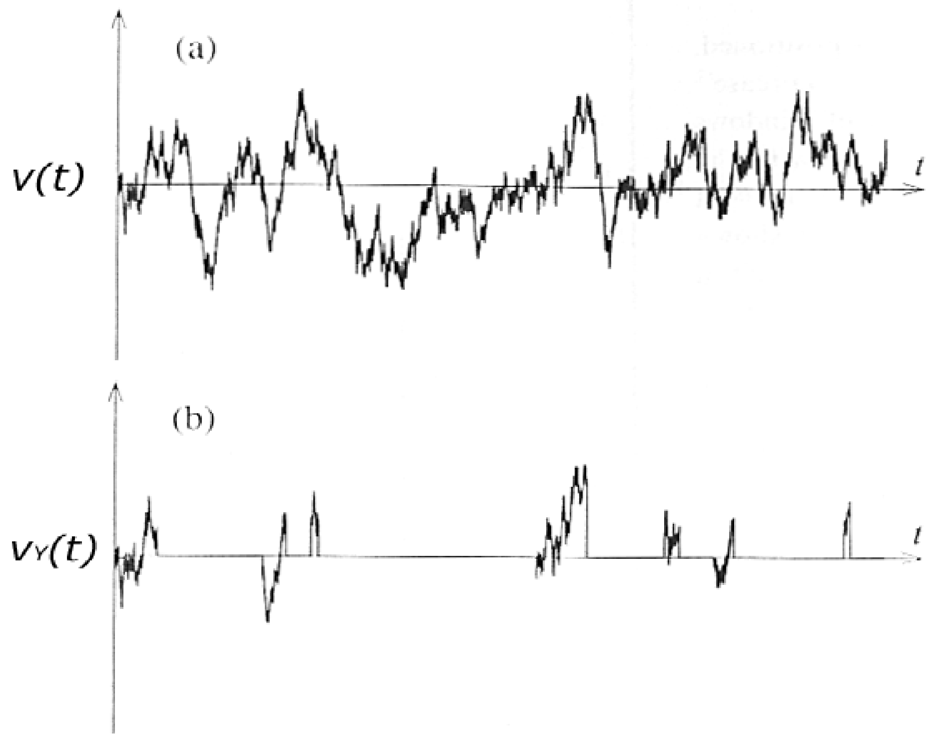
Ravnost (flatness) kot mera za intermitentnost funkcije

Naključna funkcija hitrosti v(t) je intermitentna na majhnih merskih lestvicah, èe ravnost (angl. flatness) narašèa s frekvenco filtriranja Ω.

Ravnost je definirana kot:

$$F(\Omega) = \frac{\left\langle \left(v_\Omega^{>}(t) \right)^4 \right\rangle}{\left\langle \left(v_\Omega^{>}(t) \right)^2 \right\rangle^2} \tag{1.12}$$

V stacionarnem stanju, ko je èasovno povpreèje konstantno, ravnost ni odvisna od èasa. Inverzna vrednost ravnosti je merilo za del èasa, ko je visokofrekvenèni filter prepušèa signal. $v_\gamma(t)$ dobimo iz *v(t)* tako, da hitrost postavimo na 0 povsod razen na nakljuèno izbranih intervalih, ki predstavljajo γ del vsega èasa, v ostalem delu èasa $1-\gamma$ pa je funkcija enaka 0.



slika 3: a) stacionarni signal b) isti stacionarni signal, keterega smo na nakljuèno izbranem delu èasa ($1-\gamma$) postavili na 0

Èe višji momenti novo dobljene funkcije hitrosti obstajajo, potem velja:

$$\begin{aligned} \left\langle v_\gamma^2 \right\rangle &= \gamma \left\langle v^2 \right\rangle \\ \left\langle v_\gamma^4 \right\rangle &= \gamma \left\langle v^4 \right\rangle \end{aligned} \tag{1.13}$$

Torej je ravnost novo dobljene funkcije :

$$F_\gamma = \frac{\left\langle (v_\gamma)^4 \right\rangle}{\left\langle (v_\gamma)^2 \right\rangle^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\left\langle (v)^4 \right\rangle}{\left\langle (v)^2 \right\rangle^2} \tag{1.14}$$

Realna intermitenca nikoli ne doseže tako èrno-bele porazdelitve èasovnih intervalov, kjer je funkcija èisto 0 in intervalov, kjer je le-ta ista funkcija od 0 razlièna. Kljub temu je ravnost dobra mera za pojav intermitence pri spremenljivih signalih.

Namesto ravnosti bi lahko kot mero za pojav intermitence vzeli druga brezdimenzijska razmerja višjih momentov, recimo reda 6 in reda 2, ali morda še višje momente. Lihi momenti so neuporabni, saj zaradi simetrije izginejo.

V primeru normalno porazdeljenih funkcij je konstantnost funkcija $F(\Omega)$ posledica ohranjanja Gausovskosti z linearnimi operacijami, kot je na primer filtriranje. Za normalno porazdelitev je ravnost funkcije:

$$F(\Omega) = \frac{\left\langle (v_\Omega^>(t))^4 \right\rangle}{\left\langle (v_\Omega^>(t))^2 \right\rangle^2} = \frac{\left\langle (v(t))^4 \right\rangle}{\left\langle (v(t))^2 \right\rangle^2} = 3$$

Pokazali smo, da glede na zgornjo definicijo intermitence normalno porazdeljena funkcija ni intermitentna.

Podobno velja za klasiène samopodobne funkcije. Funkcija je samopodobna z lestviènim koeficijenom *r,* ko velja:

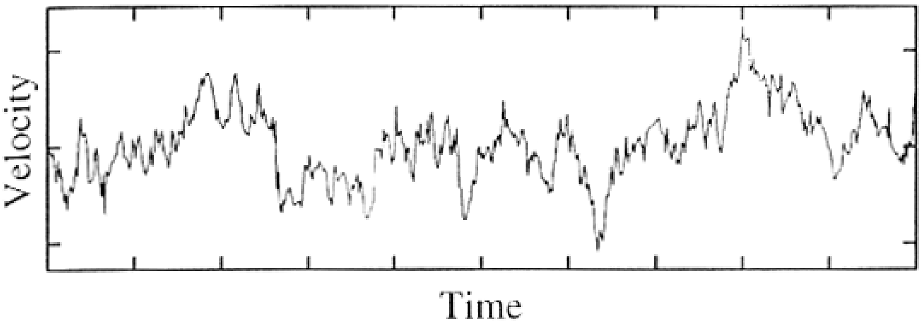
$$v_{\lambda\Omega}^> \equiv \lambda^{-r} v_\Omega^>$$

torej ko se po merski lestvici zapeljemo za faktor γ proti manjšim dimenzijam se amplituda spremeni za faktor γ^{-r}. Ravnost pa se od prehodu samopodobne funkcije skozi filter ne spremeni:

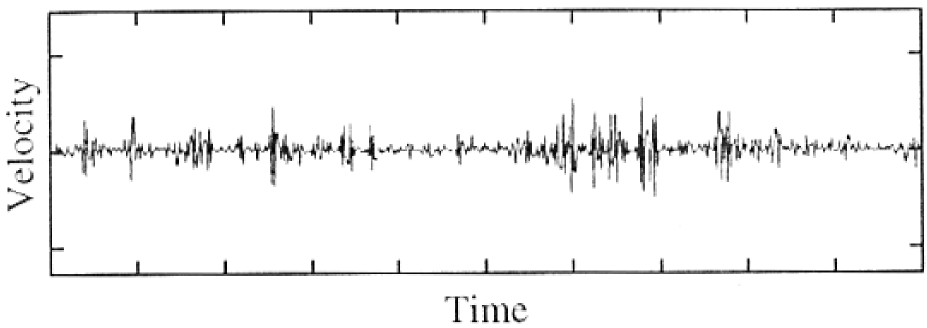
$$F(\Omega) = \frac{\left\langle (v_\gamma^>(t))^4 \right\rangle}{\left\langle (v_\gamma^>(t))^2 \right\rangle^2} = \frac{\left\langle (\lambda^{-r} v(t))^4 \right\rangle}{\left\langle \lambda^{-2r} (v(t))^2 \right\rangle^2} = \frac{\lambda^{-4r} \left\langle (v(t))^4 \right\rangle}{\lambda^{-4r} \left\langle (v(t))^2 \right\rangle^2} = \frac{\left\langle (v(t))^4 \right\rangle}{\left\langle (v(t))^2 \right\rangle^2}$$

Tudi klasiène samopodobne funkcije niso intermitentne na majhnih merskih lestvicah, saj je njihova ravnost $\mathrm{F}(\Omega)$ neodvisna od Ω.

Je turbulenca samopodobna ali je intermitentna ?



slika 4a: realni podatki – turbulentni potek hitrosti (Gagne 1980)



slika 4b: realni podatki – intermitenca pri visokofrekvenènem filtriranju hitrosti na zgornji sliki (Gagne 1980)

Empirièno pregledovanje realnega signala pokaže (slika 4a in 4b), da je turbulenca na velikih merskih lestvicah, kjer energija v sistem vstopa, samopodobna (slika 4a) – torej na obmoèju, kjer to samopodobnost napoveduje Kolmogorova teorija K41. Ko pa signal prefiltriramo skozi visokopasovni filter (frekvenca Ω mora biti zadosti visoka) se razkrije prava intermitentna narava turbulence. Signal je torej intermitenten na majhnih èasovnih lestvicah (slika 4b).

Zaključek

V seminarju smo predstavili pojem intermitence, njene glavne znaèilnosti in pokazali razlike med normalno in intermitentno porazdelitvijo. Pokazali smo, da je v realnem svetu pojav intermitence zelo pogost in da je normalna porazdelitev le idealizacija, kateri se eksperimentalne vrednosti bolj ali manj približajo. Velikokrat predpostavljene idealizacje se namreè skozi nelinearne fizikalne zakone transformirajo in tako dobimo redke, a dokaj intenzivne vrhove, ki so znaèilni za intermitenco. Za opis dobljene intermitente porazdelitve ne zadostujta veè prva dva statistièina momenta tako kot pri normalni porazdelitvi, višji statistièni momenti pa narašèajo eksponento z redom momenta.
Pri podrobnejšem prouèevanju turbulentnih tokov smo pokazali, da, èeprav porazdelitev hitrosti v toku na prvi pogled izgleda samopodobna, temu ni tako. Hitrost je v skladu s Kolmogorovo teorijo K41 samopodobna le na velikih merskih lestvicah, kjer energija vstopa v sistem. Ob visokofrekvenènem filtriranju signala hitrosti, s katerim dobimo vpogled v majhne merske lestvice, to je frekvenèno obmoèje, kjer se energija zgublja oz. spreminja v notranjo, se pokaže intermitentna porazdelitev.

Literatura

1. Zeldovich, Ya B & Ruzmaikin, A. & Sokoloff, D. , 1990, The Almighty Chance
2. Kundu, P. , 1990, Fluid Mechanics
3. Frisch, U. ,1995, 1940 – Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov
4. Lin, C. C.,1959, Turbulent Flows and Heat Transfer
5. Longwell, P. A., 1966, Mechanics of Fluid Flow

Viri na internetu:

6. http://scienceworld.wolfram.com/physics/Turbulence.html
7. http://www.edpsciences.org/articles/euro/abs/1996/21/a35305/a35305.html
8. http://mrsec.uchicago.edu/Nuggets/Turbulence/index.html

DODATEK: Centralno limitni teorem

Vsota veliko majhnih, med seboj neodvisnih, enakomerno porazdeljenih naključnih vrednosti je porazdeljena Gaussovo oz. normalno.

$$\sum_{n=1}^{N} y_n = \sqrt{N}\sigma\zeta$$

kjer je ζ normalno porazdeljena naključna spremenljivka z povprečjem 0 in disperzijo 1. Če povprečna vrednost spremenljivke $\langle y_N \rangle \neq 0$, potem v vsoti nastopi še dodatni člen $N\langle y \rangle$.

Izpeljava:

Preučujemo sestavljeno naključno količino: $y = y_1 + y_2$. Za vsoto dveh neodvisnih spremenljivk velja:

$$F_y(x) = P\{y < x\} = P\{y_1 + y_2 < x\} = \int_{-\infty}^{x} py(x')dx' = \iint p(x_1)p(x_2)dx_1dx_2$$

Integriramo po območju kjer velja: $x_1 + x_2 < x$. Vpeljava novih spremenljivk $\tilde{x} = x_1 + x_2$; $\tilde{\tilde{x}} = x_2$ spremeni integral:

$$\iint p(x_1)p(x_2)dx_1dx_2 = \int_{-\infty}^{x} d\tilde{x} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}})d\tilde{\tilde{x}}$$

Torej je gostota verjetnosti za vsoto neodvisnih spremenljivk podana s konvolucijo gostot verjetnosti posameznih sumandov.
Fourierova transformacije konvolucije je enaka produktu posameznih Fourierovih transformirank: $\tilde{p}_N(k) = \tilde{p}^N(k)$, kjer je N število neodvisnih spremenljivk. Fourierova transformacija verjetnostne gostote $\int p(x)e^{ikx}dx$ lahko razumemo tudi kot povprečno vrednost funkcije e^{ikx}. Ta povprečna vrednost je znana kot karakteristična funkcija naključne spremenljivke y.
Če pregledamo odvode fourierove transformiranke po k pri vrednosti k=0:

$$\begin{aligned}
&\tilde{p}'(0) = \frac{d}{dk}\int e^{ikx}p(x)dx\Big|_{k=0} = \int ix\, e^{ikx}p(x)dx\Big|_{k=0} = i\langle y \rangle \\
&\tilde{p}''(0) = \; ... \; = -\langle y \rangle^2 \\
&itd.
\end{aligned}$$

Če transformiranko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke 0:

$$\tilde{p}(k) = 1 + ik\langle y \rangle - \frac{1}{2}k^2\langle y \rangle^2 + ...$$

Znaèilnosti karakteristiène funkcije: $\tilde{p}_N(k) \to 0,\ za\ \ N \to \infty; k \neq 0$, ker je product N števil, ki so manjši od 1 v limiti, ko N naraèša preko vseh meja, enak 0. Po drugi strani pa je $\tilde{p}_N(k) = 1,\ za\ \ k = 0$. Funkcija $\tilde{p}_N(k)$ je torej Dirakova delta funkcija. Njema inverzna Fourierova transformiranka je enakomerna porazdelitev. Iz tega sledi znano dejstvo, da mora biti naključèna kolièina y_N , sestavljena iz N naklučnih kolièin x_i , normalizirana z faktorjem $N^{1/2}$.

Èe v razvoju v Taylorjevo vrsto postavimo, da je povpreène naključène spremenljivke $\langle y \rangle = 0$ in vsak èlen delimo z $N^{1/2}$, jo lahko zapišemo kot:

$$\tilde{p}(k) = 1 - \frac{k^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2})$$

Ko sestavimo N takih:

$$\tilde{p}_N(k) = \tilde{p}^N(k) = \left[1 - \frac{k^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2})\right]^N$$

V limiti $N \to \infty$ gre zgornja funkcija proti:

$$\tilde{p}_N(k) = \lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{k^2\sigma^2}{2N} + O(N^{-3/2})\right]^N = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}$$

kjer je σ^2 disperzija naključène spremenljivke y. Limitna vrednost je odvisna torej le od σ^2 . Ko transformiramo nazaj, dobimo verjetnostno porazdelitev:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}}$$

To je znana Gaussova porazdelitev s povpreèjem $\langle x \rangle = 0$ in standardno devijacijo σ .

This document was created with Win2PDF available at http://www.daneprairie.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.