Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Seminar 4. Letnik

Kvantna mehanika na finančnih trgih

Avtor: Grega Celcar

Mentor: Rudolf Podgornik

Ljubljana, Oktober 2012

Kazalo

1. Zgodovina ekonofizike

Ekonofizika je zelo mlada veda in opisuje moderne finančne teorije. Razvijati se je začela pred 50imi leti. Sama beseda ekonofizika izhaja od fizikov, ki so se proti koncu 60ih let prejšnjega stoletja preusmerili v ekonomske vede. Razlog za to preusmeritev je bila predvsem konec vesoljske tekme med Američani in Sovjeti, kar je botrovalo k veliki nezaposlenosti v tistem času [1].

Za mnoge je oče finančne matematike francoski matematik Louis Bachelier, ki se je okoli leta 1900 ukvarjal s fluktuacijami cen delnic. Predpostavljal je, da je gibanje cen možno opisati z Brownovim gibanjem. Njegovo delo kasneje okoli leta 1950 nadaljeval Samuelson, ki je nekoliko popravil Bachelierjevo teorijo, in sicer je dejal, da se obrestne mere obnašajo kot geometrično Brownovo gibanje [2].

Najpomembnejše leto je bilo leto 1973, ko sta Black in Scholes razvila t.i. imenovan Black-Scholesov model. S pomočjo cene delnic, prodajne cene in datuma poteka naložbe lahko s tem modelom določimovrednost opcij [1].

Leta 1962 je francosko- ameriški matematik Benoit Mandelbrot (Slika 1) opisal gibanje delnic s pomočjo fraktalov [2]. Fraktal je geometrične oblike, ki ga lahko razdelimo na manjše dele in imajo enako obliko kot prvotni vzorec. Na Sliki 1 je prikazano dolgoročno in kratkoročno (modri kvadrat) gibanje cen delnic. Po obliki sta obe gibanji enaki [3].

Slika 1: Prikazuje Mandelbrotovo razlago gibanja cen delnic s pomočjo fraktalov. Oblika obarvanega dela je enake oblike kot del, ki je prikazan s spodnjo črto od F2 do F6, kar pomeni da lahko v dolgoročnem obdobju pogledamo, kako se je cena delnice gibala v kratkem obdobju. [3].

2. Finančni trg

Finančni trg predstavlja skupek odnosov med ponudniki na eni strani in prejemniki na drugi strani po finančnih sredstvih. Finančni trg pozna dve osnovni funkciji. Prva osnovna funkcija finančnega trga je učinkovito prerazdeljevanje finančnih sredstev od suficita (presežka) do deficita (primanjkljaja), medtem ko druga osnovna funkcija finančnega trga izhaja iz razdelitve na posredni in neposredni finančni trg [4].

Na neposrednem finančnem trgu se izdajajo primarni vrednostni papirji, kot so obveznice, delnice, itd., ki jih izdajatelji neposredno prodajajo končnim kupcem. Kupci potem lahko te vrednostne papirje prodajo finančnim institucijam. Finančne institucije potem ustvarjajo posredne vrednostne papirje [4].

Prav tako se finančni trg deli na primarni in sekundarni trg. Pri sekundarnem trgu poteka trgovanje z že izdanimi vrednostnimi papirji, medtem ko se na primarnem trgu izdajajo novi vrednostni papirji [4].

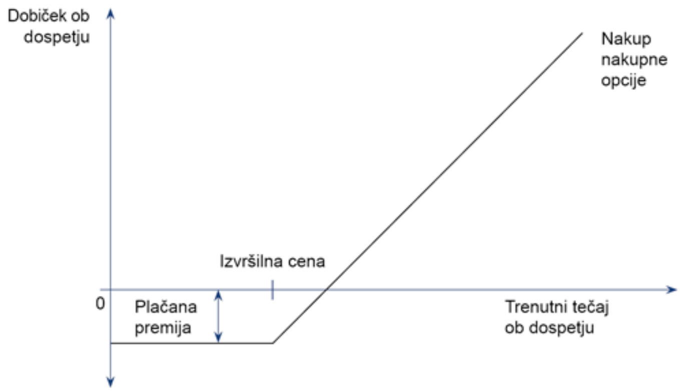
Trg vrednostnih papirjev se deli na trg vrednostnih papirjev s stalnim donosom ali trg dolžniškega kapitala in trg vrednostnih papirjev s spremenljivim donosom ali trg lastniškega kapitala [4].

Četrta delitev finančnega trga je na delitev na denarni trg, trg kapitala in terminski trg. Pod kapitalni trg spada trg dolgoročnih vrednostnih papirjev in trg dolgoročnih posojil. Pri denarnem trgu gre za prenos finančnih sredstev na kratek rok [4].

Terminski trg je neprekinjen avkcijski trg na katerem se srečujejo kupci in prodajalci različnih vrst blaga, ki se prikazuje v različnih oblikah finančnih papirjev. To so lahko terminske pogodbe, opcije in zamenjave. To so trgi, kjer se sklepajo nakupi ali prodaje o standardnih količinah in kakovosti. Zamenjave oz. swape uporabljajo banke, podjetja, in sicer v želji da se zaščitijo pred nezaželenimi obrestmi in deviznimi gibanji [4].

3. Opcije

Opcija je prenosljiva pogodba, v kateri prodajalec za neko opcijsko premijo daje kupcu možnost do nakupa ali prodaje določenega števila delnic v določenem obdobju. Glavni namen opcije je zavarovanje pred izgubami. Poznamo nakupno (call) opcijo (Slika 2) [5] v kateri ima

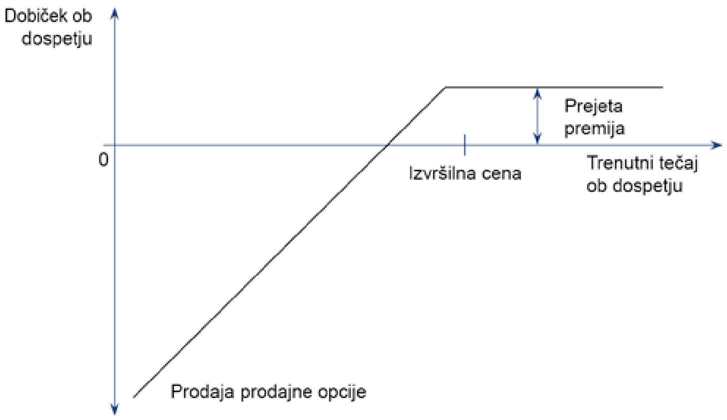


Slika 2: Prikazuje nakup nakupne opcije, kjer je prikazano naraščajočo nakupno opcijo. Tako opcijo se splača kupiti po datumu poteka pogodbe [5].

imetnik pravico do nakupa določenega števila delnic, katere bo potem ob datumu poteka opcije prodal po višji ceni.

Denimo, da kupimo 100 delnic po izvršilni ceni 100€. Naša začetna investicija naj bo 500 €. Premija opcije naj bo 5€ po delnici. Če je opcija evropska potem jo lahko izvršimo le na datum poteka opcije. To pomeni, če je vrednost delnice na ta dan manjša kot 100€, potem ne bomo izvršili te opcije in bomo imeli izgubo v višini začetne investicije. Če je cena delnice na datum poteka pogodbe večja od 100€, denimo da je cena 115€, potem bomo kupili delnice. Tako bomo pridobili 15€ na delnico, kar nanese skupaj 1500€ za 100 delnic. Ker smo prav tako plačali premijo 5€ na delnico (500€ za 100 delnic) je naš celotni prihodek 1000€. V splošnem velja, da je opcijo na datum poteka smotrno izvršiti, če je vrednost delnice večja od izvršilne cene ne glede na to ali bomo imeli dobiček ali izgubo [6].

Druga opcija je prodajna (put) opcija (Slika 3) [3], kjer imetnik proda določeno število delnic po vnaprej določeni ceni. Pri tej vrsti opcije imetnik sumi, da bo vrednost delnice čez čas padla.



Slika 3: Prikazuje prodajo prodajne opcije, kjer je prikazano naraščajočo nakupno opcijo. Tako opcijo se splača kupiti po datumu poteka pogodbe [5].

Recimo, da kupimo evropsko prodajno opcijo, po kateri se zavežemo, da bomo prodali delnice po vrednosti 70€ na delnico. Naša želja je, da je vrednost delnice katero kupimo manjše od 70€. Če je na datum poteka opcije cena delnice denimo 55€, jo bomo prodali za 70€. Torej bomo pridobili 15€ na delnico [6].

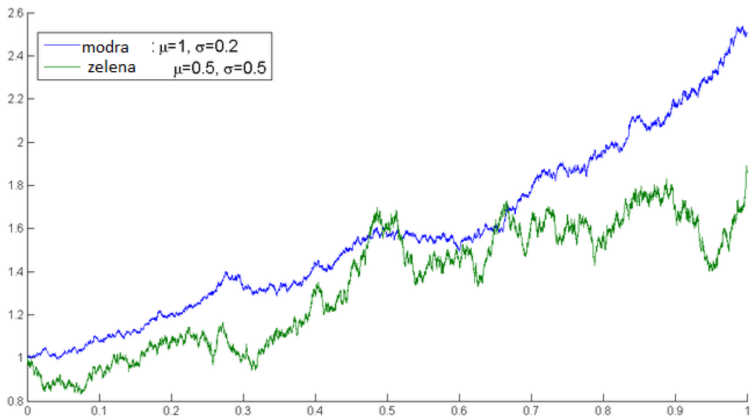
Evropska opcija, bodisi nakupna bodisi prodajna je neodvisna od poti po kateri delnica dospe do končne cene. Denimo, da osnovno vrednost delnice, na katero je opcija vezana, označimo s S. Cena evropske nakupne (call) opcije zapišemo kot C (t) = C (t, S(t)), ki omogoči lastniku možnost, da kupi opcijo v prihodnjem času T > t po izvršilni ceni E [7].

3.1. Opcije odvisne od poti

To so opcije pri katerih lahko spremljamo kako se bo vrednost delnice gibala do končnega časa T. V to kategorijo opcij spadajo ameriške opcije, katere lahko unovčimo kadarkoli do datuma izteka pogodbe. Naslednja opcija, ki je prav tako odvisna od poti je azijska opcija, katere izplačilna funkcija je odvisna od povprečne vrednosti delnic skozi celotno obdobje. V to kategorijo opcij spadajo tudi barierne opcije, preko katerih lahko prav tako določimo vrednost cene delnic. Obstajajo še tudi bolj eksotične opcije, kot so »lookback«, hibridne opcije. [7].

4. Black- Scholes enačba

Sama izpeljava B-S modela sledi iz geometričnega Brownovega gibanja delnic (Slika 4).



Slika 4: Predstavlja dve gibanji z različnima stopnjo rasti in volatilnostjo. Modra krivulja predstavlja večjo rast in manjšo volatilnostn, medtem ko zelena predstavlja ravno nasprotno.

Model geometrično Brownovega gibanja je v času zvezno stohastični proces, kjer je logaritem poljubne spremenljivke normalno porazdeljena. Koncept geometričnega Brownovega gibanja so naključni sprehodi, kjer je prihodnja cena delnice odvisna le od sedanje cene delnic in je neodvisna od preteklih cen. Ker vrednost cene delnice sledi stohastičnemu procesu, lahko zapišemo stohastično diferencialno enačbo (1)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (1)$$

Kjer μ predstavlja pričakovano stopnjo donosa, spremenljivka σ nam predstavlja nestanovitnost cene delnice oziroma volatilnost.

Cena opcije je odvisna od izvršilne cene, ki jo označimo z E, kot tudi od časa poteka T-t, kjer je T datum poteka opcije in t trenutni čas. Prav tako je cena opcije odvisna od cene sredstev, stopnje rasti μ, volatilnosti oz. razpršenosti σ, obrestne mere r in da je opcija brez tveganja. To pomeni, da je opcija hedge-ana. Ceno opcije bomo označili s V (S,t:σ,μ ; E, T; r). Zbirko finančnih sredstev, kot so opcije, obveznice, delnice imenujemo portfolijo. Običajno jih zadržujejo bodisi investicijska podjetja bodisi finančne institucije [8].

Black in Scholes sta ustvarila portfolijo, ki je brez tveganja in brez arbitražnih priložnosti. Portfolijo je sestavljen iz delnic in opcij, njegov donos pa je enak ne tvegani obrestni meri. Vzrok, da je portfolijo brez tveganja tiči v tem, da sta tako cena delnice kot cena opcije pod vplivom enake negotovosti. To pomeni, da v prihodnjem času lahko cena delnice zavzame dve možni vrednosti, in sicer bodisi nižjo bodisi višjo vrednost glede na sedanjo vrednost. Tako ima portfolijo dolgoročno pozicijo v Δ delnicah in kratkoročno pozicijo v eni opciji. Takšen portfolijo se zapiše z enačbo (2) [8].

$$\Pi = V - \Delta S. \tag{2}$$

Kjer Π predstavlja portfolijo, medtem ko je Δ hedgan faktor. Levi člen na desni strani lahko zapišemo kot (3)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{dV}{dt} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt, \tag{3}$$

ki ustreza stohastični diferencialni enačbi (3) [8].

Sedaj vnesemo enačbo (3) v enačbo (2) in združimo člene, ki vsebujejo dt in člene, ki vsebujejo dS in dobimo (4) [8]

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS + \left(\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{4}$$

Prvi člen na desni strani predstavlja stohastični del, medtem ko drugi člen na desni predstavlja deterministični del. Sedaj si izberemo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ in se znebimo stohastičnega dela, tako da dobimo enačbo (5)

$$d\Pi = (\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt \tag{5}$$

Ker je naš porfolijo v celoti determinističen potem ni arbitražnih priložnosti. Brez arbitražnih priložnosti pomeni, da mora biti donos, ki ni tvegan in je določen s kratkotrajno ne tvegano obrestno mero enak enačbi (6) [8]

$$d\Pi = r\Pi dt. \tag{6}$$

Takšen portfolijo imenujemo delta-nevtralen portfolijo. Z drugimi besedami, delta-nevtralen portfolijo je neobčutljiv na majhne spremembe cene delnice.

Ne levi strani lahko namesto dΠ zapišemo enačbo (5), medtem ko na desni strani lahko namesto Π pišemo enačbo (2), in dobimo (7) [8]

$$\left(\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S\right) dt. \tag{7}$$

Člen dt se na levi in desni strani okrajša. Po preureditvi enačbe dobimo Black-Scholes enačbo, ki jo zapišemo kot enačbo (8)

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{rS}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}} + \frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{S}^2\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2} - \mathrm{rV} = 0. \tag{8}$$

Če želimo rešiti enačbo (8), potrebujemo robne pogoje za evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno K. Če je cena delnice S=0, potem velja ob vsakem času t, da je cena nakupne opcije $C(0,t)$=0. Ob izteku opcije ($t=T$) pa je cena nakupne opcije $C(S,T) = \max(S_T - K, 0)$.

Enačbo (8) lahko rešimo na več načinov. Prvi način reševanja je preoblikovanje enačbe v difuzijsko ali Fokker-Planckovo enačbo. Fokker- Planckova enačba opisuje verjetnostno porazdelitev funkcije. S pomočjo spremenljivk [9]

$$S = Ke^x$$
$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$
$$V(S,t) = Kv(x,\tau)$$

dobimo linearno parabolično enačbo (9)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial v}{\partial x} + bx, \tag{9}$$

kjer je $a = \frac{2r}{\sigma^2} - 1$ in b= -(1+a). Ko zamenjamo spremenljivke postane mejni pogoj C(S,T)=max (S(T)-K,0) začetni pogoj v(x,τ)= max($e^x - 1, 0$). Enačbo (10) lahko rešimo s pomočjo

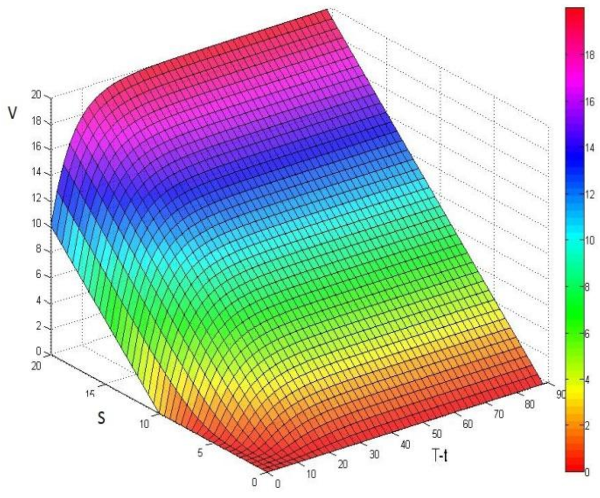
$$v(x,\tau) = e^{[-0.5(c-1)x - 0.25(c+1)^2\tau]}\, u(x,\tau)x$$

in dobimo difuzijsko enačbo (10)

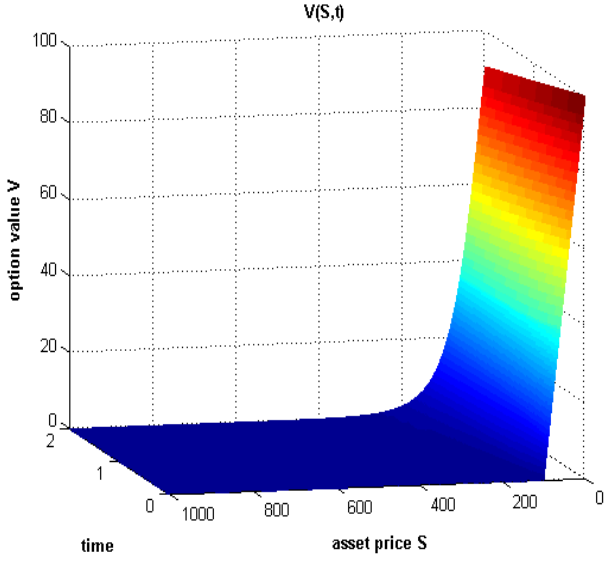
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Ko rešimo difuzijsko enačbo, dobimo vrednost za evropsko nakupno opcijo C(S,t) (Slika 5) in vrednost za evropsko prodajno opcijo P(S,t) (Slika 6), kot prikazujeta enačbi (11) [9]

$$C(S,t) = SN(d_1) - KN(d_2)e^{-r(T-t)} \tag{11}$$
$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}\, N(-d_2) - SN(-d_1),$$



Slika 5: Predstavlja evropsko nakupno opcijo.



Slika 6: Predstavlja evropsko prodajno opcijo.

kjer sta $N(d_1)$ in $N(d_2)$ vrednosti, ki podata verjetnosti, da spremenljivki d_1 in d_2 pri normalni porazdelitvi zavzameta vrednosti od $-\infty$ do svoje vrednosti

Predpostavke B-S modela so [7,8] :

- Portfolijo zadostuje pogoju brez arbitražnih priložnosti
- Hedge-an portfolijo delnice mora dovoljevati kratko prodajo delnic
- Če se cena delnice spremeni diskretno, potem B-S enačba ne velja
- Obrestna mera r je konstanta
- Ni stroškov transakcije
- Ne tvegana obrestna mera je znana funckija časa

B-S model je zelo dober model. Namreč izračunane vrednosti opcij lahko primerjamo z realnimi cenami opcij in tako določimo ali je bila opcija podcenjena ali precenjena. Posledično lahko posledično pride tudi do izgube ali dobička [4].

B-S enačbo lahko prav tako rešimo s pomočjo Hamiltonovega operatorja [7].

5. Cenjenje opcij s Hamiltonko

Matematično so operatorji operacije nad funkcijami, vektorji itd. V kvantni mehaniki operatorji valovni funkciji priredijo drugo valovno funkcijo. Posebno lepe lastnosti imajo Hermitski operatorji oziroma sebi-adjungirani operatorji. Pri teh operatorjih se definicijski območji ujemata. Denimo, da v splošnem označimo operator kot $\hat{A}$, potem Hermitski operator zapišemo kot $\hat{A} = \widehat{A}^{!}$ [10].

Operator kinetične energije in operator potenciala sta hermitska, kar pomeni da je tudi Hamiltonov operator ali hamiltonka v kvantni mehaniki hermitska. Namreč drugi odvod, ki se nahaja v kinetični energiji in koordinata, ki se nahaja v potencialu sta hermitska.
V kvantni mehaniki se Hamiltonov operator za polno energijo zapiše kot enačba (12) [10],

$$\hat{H}\Psi = \hat{T}\Psi + \hat{U}\Psi = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi. \qquad (12)$$

V enačbi (12) operator $\hat{T}$ predstavlja kinetične energije, medtem ko operator $\hat{U}$ ustreza potencialu. Enačbo (8) lahko zapišemo kot stacionarno Schroedingerjevo enačbo, in sicer kot kaže enačba (13) [10]

$$\hat{H}\Psi = E'\Psi. \qquad (13)$$

Tovrstna enačba je problem lastnih vrednosti. Lastne vrednosti so predstavljene s črtico. S to enačbo iščemo funkcijo, ki preide sama vase, ko nanjo deluje operator. Iskana funkcija je lastna funkcija operatorja [10].

V financah lahko B-S enačbo (8) zapišemo v obliko za kvantno mehaniko. Časovni del B-S enačbe (8) predstavlja osnovno hamiltonko, preko katere določimo ceno opcije. Če enačbo (8) preoblikujemo v enačbo (13), dobimo Black-Scholes-Schroedingerjeva enačbo (14) [7]

$$\frac{\partial V}{\partial t} = H_{BS}V. \qquad (14)$$

H_{BS} v enačbi (14) predstavlja hamiltonko B-S. Hamiltonko B-S se glasi kot enačba (15),

$$H_{BS}V = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)\frac{\partial V}{\partial x} + rV, \qquad (15)$$

kjer je volatilnost σ^2 konstantna. B-S enačba ima v kvantni mehaniki eno prostostno stopnjo, in sicer je to x. Če primerjamo enačbo (12) in enačbo (15) vidimo, da je volatilnost σ^2 analogna inverzu mase, V je analogna valovni funkciji Ψ, obrestna mera r pa je analogna potencialu. Vendar zaradi drugega člena v enačbi (15), hamiltonka v financah ni hermitska. To pomeni, da so rešitve lastne vrednosti v B-S hamiltonki kompleksne, medtem ko so v kvantni mehaniki rešitve realne lastne vrednosti [7].

Jedro cene opcije vsebuje vse potrebne podatke za določevanje cene, pri katerih so opcije neodvisne od poti. Jedro cene imenujemo tudi stohastični diskontirani faktor. Denimo, da je razvoj cene delnic stohastično volatilen in da tovrstna opcija, ki ni odvisna od poti, dospe ob času T. Zanima nas cena opcija ob času $t < T$ [7].

Rešitve za jedro cene so lastne vrednosti hamiltonke B-S enačbe (14), ki jih zapišemo v obliki (16)

$$V(t,x) = e^{tH}V(0,x), \qquad (16)$$

kjer je V(0,x) začetni pogoj. Ob končnem času T je končna vrednost podana v obliki (17) in g predstavlja izplačilno funkcijo

$$V(T,x) = V(0,x)e^{TH} = g(x) \qquad (17)$$

Iz enačbe (17) izpostavimo V(0,x) in dobimo enačbo (18)

$$V(0,x) = g(x)e^{-TH}. \tag{18}$$

Začetni pogoj, ki ga prikazuje enačba (18), vstavimo v enačbo (16) in dobimo enačbo (19)

$$V(t,x) = g(x)e^{-(T-t)H} = < x|e^{-\tau H}|g >. \tag{19}$$

Ker enačba (19) še ni dopolnjena za celotni prostor, jo moramo pomnožiti z enačbo (20), tako da dobimo enačbo (21) [7],

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx'|x' >< x|, \tag{20}$$

$$V(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' < x|\, e^{-\tau H}|x' > g(x'). \tag{21}$$

Dopolnjevalna enačba (20) se nanaša na vsa osnovna stanja, ki skupaj tvorijo operator identitete v vektorskem prostoru. Enačba (20) podaja rešitev za jedro cene, ki jo s hamiltonko zapišemo kot prikazuje enačba (22) [7]

$$p\ (x,\tau,x') =< x|e^{-\tau H}|x' >. \tag{22}$$

Kot je videno v enačbi (22) je v ceni opcije podan negativni eksponent. To je zato, ker je končni pogoj cene opcije V ob končnem času t in enačbo (16) pretvorjen na preostali čas τ. Vloga hamiltonke pri cenjenju opcij je da ceno opcije razvija v času nazaj in ne naprej, To pomeni, da z razvojem nazaj določimo prihodnjo diskontirano vrednost izplačilne funkcije [7].

6. Martingalov pogoj

Martingal je matematični model pravične igre, ki je pomemben v teoretičnih financah. Martingal velja le, kadar Martingalov proces je definiran kot ga prikazuje enačba (23) [7]

$$E[X_{n+1}|x_1x_2 \ldots\ldots x_n] = x_{n.} \tag{23}$$

Leva stran prikazuje pričakovano vrednost naključne spremenljivke X_{n+1}, ki je pogojena z naključnimi pojavi $x_1x_2 \ldots\ldots x_n$ za naključne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$. X_{n+1} predstavlja različne rezultate po n+1 igrah, kjer x_n predstavlja količina denarja po n korakih. Ta pogoj imenujemo martingalov pogoj, kjer so prihodnje vrednosti popolnoma neodvisne od prejšnjih vrednosti. V financah ob času t, naključne spremenljivke ustrezajo prihodnji ceni delnic [7].

Če želimo zapisati enačbo v hamiltonski obliki, jo lahko zapišemo kot prikazuje enačba

$$H|S>=0 \quad (24)$$

Pogoj (24) nam pove, da se zaradi martingala osnovni vrednostni papir (delnica) ne spremeni. Posebna rešitev hamiltonke je S = e^x, ki ustreza osnovni lastni energiji [7].

7. Potencial pri cenjenju opcij

Hamiltonka v kvantni mehaniki je podana z enačbo (12). V enačbi (14), ki opisuje B-S enačbo, je člen ki je analogen potencialu konstanten. Kadar potencialni člen postane odvisen od cene delnice x, potem postane cenjenje opcij odvisno od poti. Zato B-S hamiltonki, ki je podana z enačbo (15) dodamo potencial odvisen od x-a in dobimo efektivno hamiltonko, zapisano v obliki (25) [7]

$$\widehat{H}_{eff} = \widehat{H}_{BS} + \widehat{U}. \quad (25)$$

Enačba (25) zadostuje pogoju martingal. Tukaj je hamiltonka pri določevanju cen opcij omejena z izničenjem cene delnic S(t). B-S hamiltonka, ki ustreza martinaglovem pogoju se glasi, kot jo prikazuje enačba (26) [7]

$$\widehat{H}_V = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - U(x)\right)\frac{\partial}{\partial x} + U(x). \quad (26)$$

kjer je potencial poljubna funkcija x-a. Potencial predstavlja diskontiranje delnic ali vrednostnih papirjev z uporabo obrestne mere, kjer ni arbitražne priložnosti. Ne hermitsko hamiltonko $\widehat{H}_V$, lahko za poljuben potencial, transformiramo v Hermitsko efektivno hamiltonko, in sicer z enačbo (27) [7]

$$H_U = e^S H_{ef} e^{-S}, \quad (27)$$

kjer je H_{ef} podana kot (28)

$$H_{ef} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2\sigma^2}(U + \frac{1}{2}\sigma^2)^2. \quad (28)$$

V B-S hamiltonki velja, da je U(x) = r in je zato rešitev podana v enačbi (29)

$$H_U = e^S H_{ef} e^{-S} = e^{\alpha x}[-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma]e^{-\alpha x}, \quad (29)$$

kjer je $\gamma = \frac{1}{2\sigma^2}(r + \frac{1}{2}\sigma^2)^2$ in $\alpha = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)$. Efektivna B-S hamiltonka se prav tako uporablja pri reševanju dvojnih bariernih opcij [7].

7.1. Barierne opcije

Barierne opcije so odvisne od poti in so ugodnejše od navadnih opcij predvsem zato, ker so cenejše. Cenejše so zaradi dodatnega tveganja, ki ga prinese bariera [11]. Prav tako imamo vpogled, po kakšni poti se naj bi opcija gibala. Poznamo barierno opcijo, kjer imamo bodisi spodnjo bodisi zgornjo bodisi zgornjo in spodnjo mejo hkrati. Najpomembnejše opcije, ki imajo eno mejo, so navzdol-ven, navzdol-not, navzgor-ven in navzgor-not barierne opcije [7].

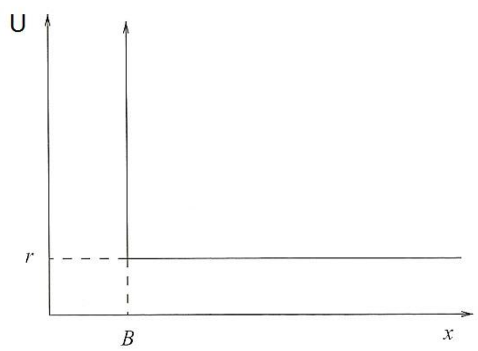
Navzdol-ven barierna opcija

Pri uporabi te opcije pri nakupnih opcijah, je cena delnice nad bariero. Kadar cena delnice pade pod vrednost, na kateri je bariera, postane naša opcija nič vredna. Pri prodajni opciji, vrednost opcije postane nič vredna, kadar bariera pade pod začetno ceno delnice (Slika 5 in slika 6) [7].

Denimo, da imamo evropsko nakupno opcijo, kje je cena delnice S(t). Omejitev je, da mora biti cena delnice zmerom nad bariernim potencialom, ki ga označimo z U(x). Robni pogoj tovrstnega bariernega potenciala se glasi kot (30) [7],

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x \leq B \\ r,\ \ x > B \end{cases}, \qquad (30)$$

kjer je B robna cena. Hamiltonka za navzdol-ven barierno opcijo se glasi kot prikazuje enačba (31)



Slika 5: Prikazuje potencial pri navzdol-ven opciji. Če je cena delnice S manjše od bariera, potem je opcija ničvredna [5].

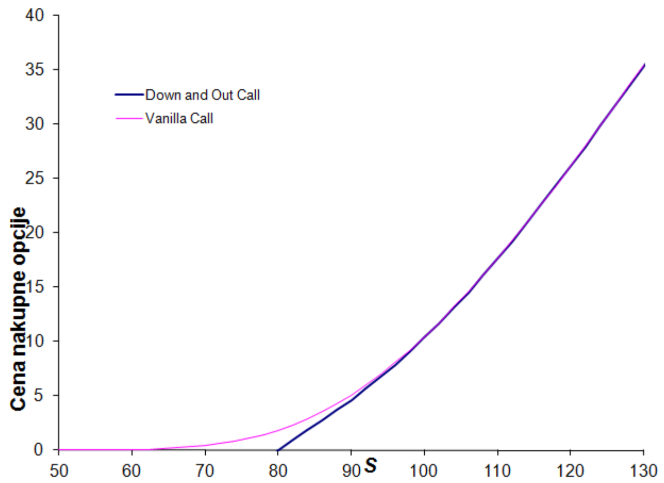
$$\widehat{H}_{DO} = \widehat{H}_{BS} + U(x) = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)\frac{\partial}{\partial x} + U(x). \qquad (31)$$

Potencial ima vpliv na določevanje cene jedra, in sicer tako, da upošteva le tiste vrednosti, ki ne preskočijo bariero oziroma potencial poskrbi, da valovne enačbe B-S hamiltonke zamrejo na drugi strani. Naj bo cena delnice v preostalem času τ, podana kot x > B in kadar je $\tau = 0$ naj bo cena x'. Ob uporabi enačbe (22) in izpeljavi je cena jedra za barierno opcijo podana kot prikazuje enačba (32) [5]

$$p_{DO}(x,x';\tau) = < x|e^{-\tau H_{DO}}|x'> = \begin{cases} p_{BS}(x,\tau,x') - (\frac{e^x}{e^B})^{2\alpha} p_{BS}(2B-x,\tau,x')\ x,x' > B \\ 0; \quad x > B, x' < B \end{cases}. \quad (32)$$

Kot je razvidno iz enačbe (32) je cena jedra vedno pozitivna, kadar sta x, x' > 0, medtem ko mora biti cena enaka nič, kadar cena delnice preskoči bariero [7].

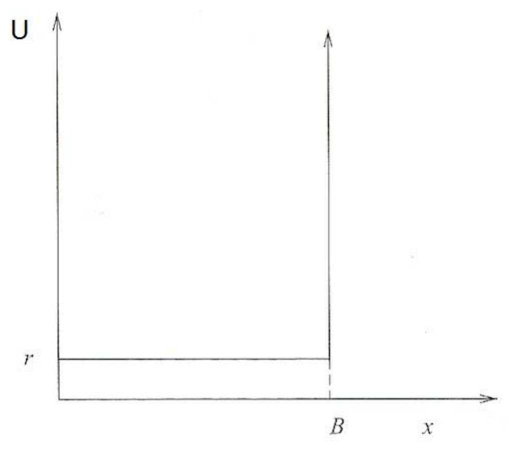
Primer:



Slika 6: Na sliki vidimo dve krivulji. Svetlo modra tanjša črta predstavlja standardno nakupno opcijo (vanila nakupna opcija), medtem ko debelejša modra črta predstavlja navzdol-ven nakupno opcijo. Vidimo, da tovrstna opcija postane ničvredna, če cena delnice pade do vrednosti bariere [8].

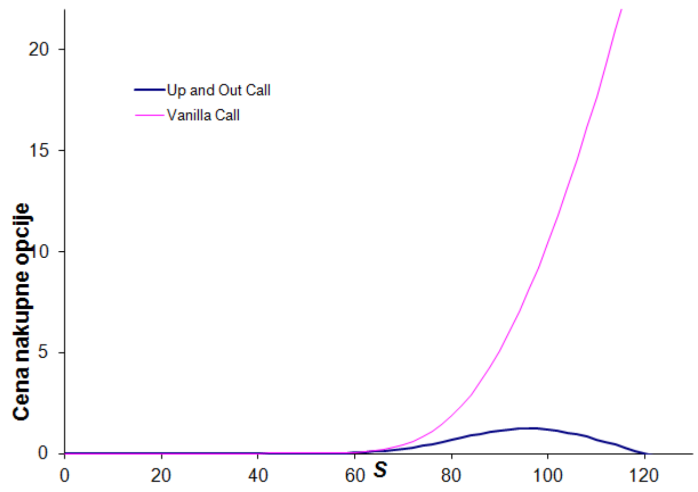
Slika 6 prikazuje navzdol-ven nakupno opcijo. Recimo, da imamo na začetku ceno delnice, ki znaša 95 €. Bariera pri tej opciji znaša 80€. Če cena delnice pade na vrednost bariere, potem postane opcija ničvredna. Opcija je ničvredna tudi, če kasneje cena delnice naraste do izvršilne cene in je v tem primeru ne kupimo. Če cena delnice narašča se prične obnašati kot standardna nakupna opcija in jo ob datumu poteka kupimo [8].

Za navzgor-ven barierno (Slika 7 in slika 9) opcijo velja enaka enačba kot je enačba (35), le da so omejitve nekoliko drugačne. Namreč ceno jedra lahko določimo, kadar sta x, x' < B, medtem ko je cena jedra enaka nič, kadar je x < B in x' >B [7].



Slika 7: Prikazuje potencial pri navzgor-ven opciji. Če je cena delnice S večja od bariere, potem je opcija ničvredna [7].

Primer:



Slika 9: Tanjša črta predstavlja standardno nakupno opcijo, medtem ko debelejša modra črta predstavlja navzgor-navzven nakupno opcijo. Vidimo, da opcija postane ničvredna, ko cena delnice naraste do bariere, ki znaša 120€ [8].

Vrednost bariere v tem primeru je 120€. Imejmo začetno vrednost delnice 95€. Kadar naša delnice zadane izvršilno ceno, lahko ob datumu poteka kupimo to opcijo. Vendar vrednost delnice ne sme preseči 120€. Namreč kadar cena delnice zadane bariero, postane opcija ničvredna in je ne kupimo. Te opcije uporabljajo portfolijski managerji, ker je cenejša za hedganje proti izgubam kot navadna nakupna opcija [8].

»Double-knock-out« barierna opcija

Pri tovrstnih opcijah imamo opravka s spodnjo in zgornjo mejo. To pomeni, da se cena delnice giblje med obema potencialoma. Kadar cena delnice doseže bodisi spodnjo bodisi zgornjo mejo postane opcija ničvredna. Podobna je neskončno potencialni jami v kvantni mehaniki. »Double-knock-out« barierno opcijo [7] lahko rešimo s pomočjo enačbe (28), kjer za B-S hamiltonko uporabimo enačbo (15). Pogoj (33) za potencial, ki ga upoštevamo pri kvantni mehaniki, kot tudi pri financah se glasi [7]

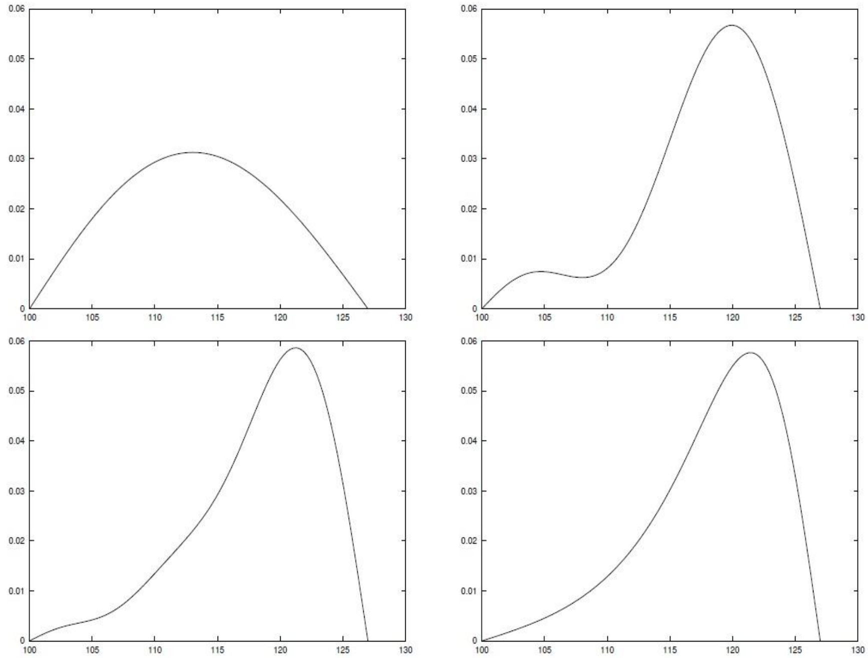
$$\begin{cases} \infty & x \leq a \\ 0 & a < x < b. \\ \infty & x \geq b \end{cases} \tag{33}$$

Ceno jedra dobimo iz enačbe (22) in se za »double-knock–out« bariero glasi kot prikazuje enačba (34) [7],

$$p_{DO}(x, x'; \tau) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\tau\sigma^2}} \exp\big(-\gamma\tau + \alpha(x - x')\big)$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\exp\,(-\frac{\big(x-x'+2n(b-a)\big)^2}{2\tau\sigma^2} - \exp\,(-\frac{(x+x'-2a-2n(b-a))^2}{2\tau\sigma^2})]. \tag{34}$$

To rešitev lahko preverimo za tri primere. Denimo, da imamo v prvem primeru samo eno bariero, kjer upoštevamo limito $b \to \infty$ in da je širina jame a končna. V tem primeru imamo ustrezno rešitev le za primer, kadar je n = 0. V drugem primeru, kadar nimamo ovir, vzamemo limito $a \rightarrow -\infty$ in je b konstanten. V tem primeru imamo rešitvi za n = 0 in n = 1. V tretjem primeru lahko preverimo B-S enačbo brez barier, in sicer tako, da vzamemo limiti $a \rightarrow -\infty$ in $b \rightarrow \infty$. V tem primeru ustreza rešitev le za n = 0 [7].

Na sliki 10 so predstavljene štiri rešitve za »double-knock–out« barierne opcije, in sicer za n=1;3;5;10. Spodnja bariera ima vrednost 100€, medtem ko je vrednost zgornje bariere 127€. Kadar doseže cena delnice katerokoli bariero, postane opcija ničvredna. Kadar imamo osnovno rešitev n=1 je najvišja vrednost opcije na sredini bariere. Pri osnovni rešitvi je gibanje simetrično, medtem ko pri ostalih rešitvah je gibanje levo asimetrično. Prav tako je pri teh asimetričnih gibanjih najvišja vrednost opcije večja kot pri osnovni rešitvi.



Slika 10: Predstavljene so rešitve za 4 primere. Leva zgornja slika je predstavljena rešitev za n=1, desna zgoraj predstavlja rešitev za n=3, leva spodaj predstavlja rešitev za n=5 in desna spodaj za n=10 [11].

8. Primerjava med Schroedingerjevo enačbo in B-S enačbo

B-S enačba je poseben primer Schroedingerjeve enačbe. Namreč B-S enačba velja le v primerih, kadar je trg učinkovit, medtem ko Schroedingerjeva enačba velja v splošnem. Namreč Schroedingerjeva enačba vsebuje ħ, ki predstavlja količino arbitražnih pirložnosti, ki je prisotna na finančnih trgih. Za to je kvantni opis vrednotenja opcij bolj natančnejši od klasičnega modela. Prav tako je možno dobiti s pomočjo Schroedingerja nekatere analitične rešitve. Predvsem kadar vrednotimo opcije s procesom volatilnosti.

9. Zaključek

Zaradi kompleksnosti nekaterih sistemov je uporaba hamiltonke uporabna le v nekaterih primerih, in sicer predvsem kadar imamo linearne sisteme. Kadar imamo nelinearne sisteme je namesto hamiltonke prikladno uporabiti Lagrangev formalizem. Lagrangeva enačba opisuje gibanje, ki je odvisno od poti [5].

Za gibanje prihodnjih obrestnih mer je prikladna uporaba kvantnih polj. Namreč za določitev ceno opcije je potrebna ena prostostna stopnja, medtem ko pri določevanju prihodnjih obrestnih mer, je potrebno neskončno prostostnih stopenj [5].

10. Literatura

[1] Mantegna R. N., Stanley H. E., *An introduction to econophysics* (Cambridge, Cambridge University Press, 2000)

[2] Na LI, Stochastic models of Stock Market Dynamics (Deparment of Mathematics, Uppsala University, 2010)

[3] Elliot Fractals: Najdeno 26.9.2012 na spletnem naslovu: http://www.elliottfractals.com/forecast.asp

[4] Prohaska Z., *Finančni trgi* (Ljubljana, Ekonomska fakulteta, 2004)

[5] SKB. Zavarovanje pred tečajnim tveganjem. Najdeno 22.7.2012 na spletnem naslovu: http://www.skb.si/poslovne-finance/i......./zavarovanje-pred-tecajnim-tveganjem

[6] Hull J.C, *Fundamentals of futures and options markets* (Prentice Hall, 2002)

[7] Baaquie B.E., *Quantum finance* (Cambridge, Cambridge University Press, 2004)

[8] Wilmott P., *Quantitative finance* (Chichester, John Wiley & Sons Ltd., 2007)

[9] Coppex F., *Solving the Black-Scholes equation:a demystification*: Najdeno 2.10.2012 spletnem naslovu: http://www.francoiscoppex.com/blackscholes.pdf

[10] Strnad J., Fizika 3: Poseblna teorija relativnosti, kvantna mehanika, atomi (Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1998)

[11] Faulhaber O., *Analytic methods for pricing double barrier options in the presence of stochastic volatilty*. Najdeno 3.10.2012 na spletnem naslovu: http://www.global-derivatives.com/docs/Analytic_Methods_for_Pricing_Double_Barrier_Options_Volatility_Faulhaber_2002.pdf