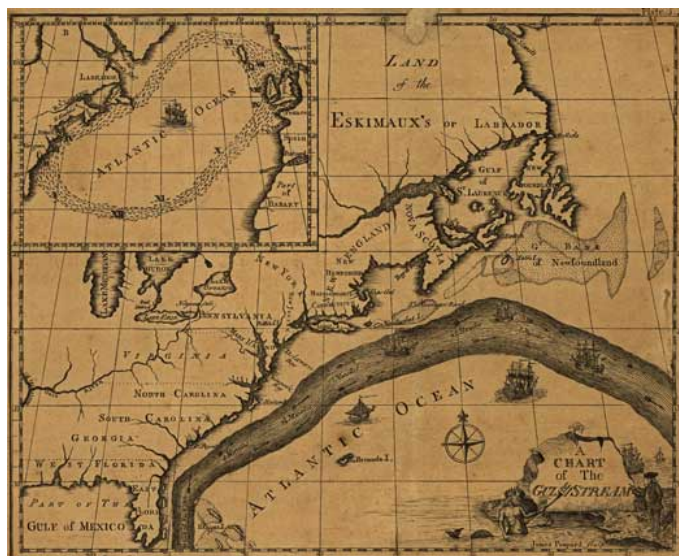




Univerza v Ljubljani
Fakulteta za
matematiko in fiziko

Mešanje vode v oceanih



A stranger may know when he is in the Gulph Stream, by the warmth of the water, which is much greater than that of the water on each side of it. If then he is bound to the westward, he should cross the stream to get out of it as soon as possible.

B. F.

Kazalo

1	Uvod	4
2	Kelvin-Helmholtzova ploskovna nestabilnost	5
3	Hitrost valovanja	9
4	Coriolisova sila	11
5	Ekmanova spirala	13
6	Površinski tok	16
7	Ekmanov transport in črpanje	17
8	Povzetek	21

Slika na naslovnici: Zemljevid sta sestavila Benjamin Franklin in Timothy Folger okoli leta 1786 in je eden prvih zemljevidov Zalivskega toka. Zemljevidu je priloženo nekaj odličnih ugotavljanj Benjamina Franklina.

Vir: http://blog.foreignpolicy.com/Tuesday_Map?page=2

Povzetek

S seminarjem sem predstavil nekaj mogočih načinov mešanja vode v oceanih. Kelvin-Helmholtzova ploskovna nestabilnost lahko nastane, ko veter piha preko morske gladine. S tem nastane strižna napetost ob gladini in gladina vzvalovi. Velikost valov z vse večjo hitrostjo vetra samo še narašča. Dovolj veliki valovi se na vrhu prelomijo, kar vidimo kot belo peno na razburkanem morju preko katerega piha veter. Zaradi vrtenja Zemlje okoli lastne osi na morske tokove deluje tudi sila, ki odklanja smer morskih tokov - na severni polobli v desno, na južni polobli pa v levo. Oceanograf Nansen je okoli leta 1898 prišel do kvalitativne rešitve, zakaj se ledene gore ne premikajo vzdolž vetra, ampak potujejo nekoliko iz smeri vetra. Nekaj let kasneje je njegov asistent Ekman tudi kvantitativen razlog formuliral. Izkazalo se je, da voda v vsaki naslednji tanki plasti z globino potuje nekoliko bolj v desno kot v predhodnji plasti, absolutna velikost hitrosti pa z globino eksponentno pada. Vektorji hitrosti z globino določajo Ekmanovo spiralo (poimenovano po Ekmanu). Tudi ves transport vode ne poteka vzdolž vetra ampak je odklonjen glede na smer vetra. Posledica tega je Ekmanovo črpanje s katerim se iz globin dvigajo hranilne snovi. Na tem mestu se nahaja množica rib, kar nekaterim državam (npr. Peru) omogoča ribarjenje.

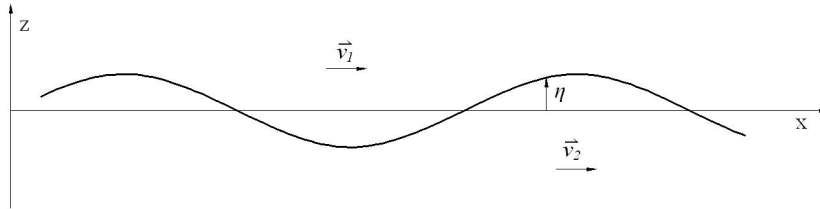
1 Uvod

Morski tok je kot reka v oceanu; voda potuje - teče - iz enega kraja na drugega. Zgodovinsko gledano so bili morski tokovi zelo pomembni za razna potovanja. Pri prečkanju oceanov z ladjo, katero je poganjal veter (na jadra), je potovanje z morskim tokom ali pa izogibanje le temu pri potovanju v nasprotno smer lahko prihranilo več kot teden dni časa. Moderne ladje so dovolj močne za plovbo proti tokovom ampak to početje je drago in vpliva na čas potovanja. Zato je poznavanje morskih tokov še vedno zelo pomembno. Z morskimi tokovi potujejo tudi razne stvari kot na primer onesnaženja. S poznavanjem morskih tokov lahko določimo, kam naj speljemo odplake v morje in na kako velikem območju bo ta izpust vplival na obalni pas. Naftne družbe morajo poznati morske tokove, da pripravijo načrte za odpravljanje razlitij nafte v primeru izlitja. Z morskimi tokovi kroži tudi topla in hladna voda, katera ima vpliv na podnebje na kopnem blizu oceana. Na primer vzhodna in zahodna obala ZDA; morski tok ob Kaliforniji je hladen zato je tudi tam podnebje bolj hladno in je manj dežja. Morski tok v Mehškem zalivu je topel, podnebje je toplejše, zrak je bolj vlažen in zato so pogostejše padavine.

2 Kelvin-Helmholtzova ploskovna nestabilnost

Le kdo še ni na mirni gladini jezera opazil rahlega valovanja vodne gladine, ko je nad njo zapihal veter? Čim hitreje piha veter tik nad gladino, tem večji in višji postanejo valovi. Mar ne bi bilo za veter energijsko manj potratno, če bi veter pihal mimo ravne gladine kot pa preko gladine, ki vzvalovi?

Obravnavajmo dvodimenzionalen tok dveh tekočin. Tekočina z gostoto ρ_1 in hitrostjo v_1 leži nad tekočino z gostoto ρ_2 in hitrostjo v_2 (velja $\rho_2 > \rho_1$) - slika (1). Obe tekočini bomo obravnavali kot neviskozni in nestisljivi tekočini.



Slika 1: Lega tekočin in njuni hitrosti. Zaradi strižnih napetosti pride pri določenih hitrostih do nestabilnosti in pojavijo se valovi.

Iz kontinuitetne enačbe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

kjer je ρ gostota tekočine in \mathbf{v} njena hitrost, za nestisljivo tekočino velja, da je divergenca hitrosti nič

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

saj se gostota s časom in krajem ne spreminja. Ker pa je tok tekočine potencialen (ni sklenjenih tokovnic), lahko hitrost zapišemo kot gradient hitrostnega polja Φ

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Sedaj enačbo (2) vstavimo v pogoj (1) in dobimo Laplaceovo enačbo

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3)$$

kjer je Δ Laplaceov operator. Laplaceova enačba velja zaradi predpostavke o nestisljivosti in potencialnem toku za obe tekočini.

Kinematični pogoj lahko izpeljemo s postavitvijo zahteve, da delec tekočine na gladini tudi na gladini ostane. Substancialni odvod mora biti pri tej zahtevi nič

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z - \eta) &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(z - \eta) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z \\ &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

za $z = \eta$. S simbolom η označimo višino vala merjene od ravnovesne lege - slika (1). Ker opazujemo valove vzdolž osi x , skrčimo kinematični pogoj v obliko

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4)$$

Za obe tekočini uporabimo Laplaceovo enačbo (3), kinematični pogoj (4) in Bernoullijevo enačbo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta + \frac{p}{\rho} = konst$$

za $z = \eta$.

Hitrostni potencial je sestavljen in linearnega prispevka in motnje

$$\Phi_1 = v_1 x + \phi_1 \quad \Phi_2 = v_2 x + \phi_2 \quad (5)$$

$$\phi_1 \rightarrow 0 \text{ kadar } z \rightarrow \infty \text{ ter } \phi_2 \rightarrow 0 \text{ kadar } z \rightarrow -\infty \quad (6)$$

kjer je $\phi(x, z, t)$ motnja, ki tudi zadošča Laplaceovi enačbi.

Nastavka (5) vstavimo v pogoj proste gladine (4). Ta pogoj je lineariziran. Privzamemo, da so motnje hitrostnega potenciala in odstopanja od ravnovesne ravnine ($z = 0$) majhne ter zanemarimo člene višjega reda. Rezultat je podan za mirovno ravnino.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ za } z = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + v \frac{\partial \phi}{\partial x} + g\eta + \frac{p}{\rho} = konst \text{ za } z = 0$$

kjer je v dobljena hitrost, ko hitrostni potencial odvajamo po legi. Linearizirani robni pogoj se nanaša na obe tekočini. Zato z indeksom ločimo obe tekočini med seboj. V dinamičnih enačbah je tlak na mejni ploskvi enak z obeh strani. Miren tok ($\phi = \eta = 0$) da vrednost konstante za obe tekočini

$$konst_1 = \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_0}{\rho_1}, \quad konst_2 = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_0}{\rho_2}$$

kjer je p_0 tlak na mejni ploskvi v mirujočem stanju. Ko izenačimo tlaka iz dveh enačb, dobimo

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\eta_1 \right)_{z=0} = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\eta_2 \right)_{z=0} \quad (8)$$

Motnja zadosti enačbi (3), pogojem (6), (7) in (8). Privzamemo nastavek za potujoči val oblike

$$\eta = \tilde{\eta} \exp(i(kx - ct)), \quad \phi_1 = \Phi_1 \exp(i(kx - ct)), \quad \phi_2 = \Phi_2 \exp(i(kx - ct)) \quad (9)$$

kjer je k pozitiven in realen, $c = c_r + ic_i$ pa kompleksna. Tok je nestabilen, če obstaja pozitiven c_i , saj eksponent tedaj narašča preko vse meje. Z uporabo enačbe (3) dobimo naslednji rešitvi

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A e^{-kz} \\ \Phi_2 &= C e^{kz} \end{aligned}$$

Zveza (7) da za vsako tekočino posebj eno homogeno enačbo, zveza (8) pa še skupaj tretjo za tri neznanke $\tilde{\eta}$, A in C . Rešitev obstaja le za določene vrednosti $c(k)$. Kinematični pogoj (7) da rešitvi

$$A = -i(v_1 - c)\tilde{\eta} \quad C = i(v_2 - c)\tilde{\eta},$$

Bernoullijeva enačba (8) pa

$$\rho_1 [ik(v_1 - c)A + g\tilde{\eta}] = \rho_2 [ik(v_2 - c)C + g\tilde{\eta}].$$

S substitucijo za A in C nam da enačba (9) zvezo $c(k)$:

$$k\rho_2(v_2 - c)^2 + k\rho_1(v_1 - c)^2 = g(\rho_2 - \rho_1)$$

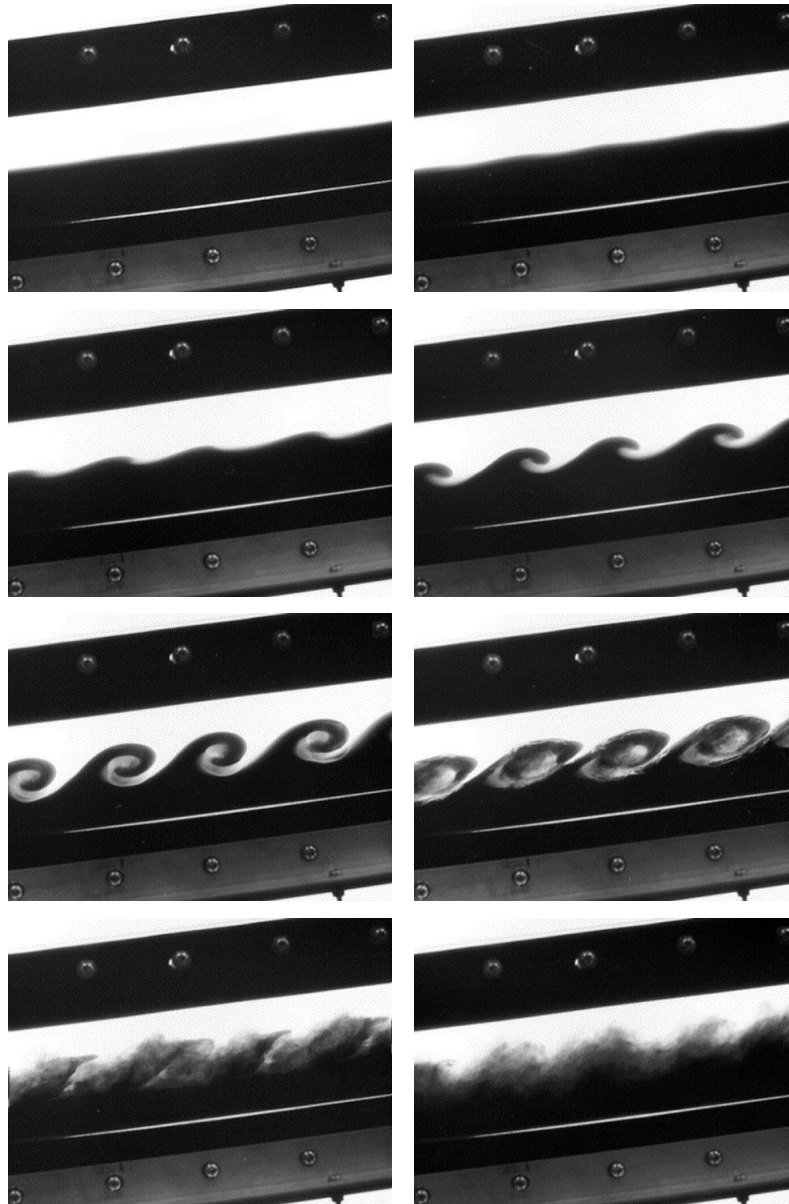
za katero so rešitve

$$c = \frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[\frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} - \rho_1 \rho_2 \left(\frac{v_1 - v_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Obe rešitvi sta dobri, dokler obstaja pozitivno realno število pod korenem. Takrat dobimo stabilne valove v sistemu. Pogoj za stabilnost je

$$(v_1 - v_2)^2 \leq \frac{g(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{k\rho_1\rho_2}. \quad (10)$$

Nestabilnost nastane zaradi strižne napetosti. To nestabilnost zlahka uprizorimo v laboratoriju - slika (2) [8]. Vodoravno položeno stekleno cev s pravokotnim prerezom napolnimo z dvema tekočinama, ki se mešata med seboj in imata rahlo različni gostoti. Eno tekočino zaradi lažjega opazovanja obarvamo. Tekočina z manjšo gostoto plava na vrhu. Ko cev nekoliko nagnemo, to povzroči tok tekočin ob mejni plasti: v zgornji tekočini navzgor, v spodnji pa navzdol. Ko prekoračimo pogoj stabilnosti (10), nastanejo valovi in tekočini se zmešata. Strižna napetost v slojevitem sredstvu je navzoča v oceanih in je verjetno glavni razlog za valove. Energija za nastanek nestabilnosti izhaja iz kinetične energije strižnega toka.



Slika 2: V nagnjeni stekleni cevi s pravokotnim prerezom sta dve tekočini, ki se mešata med seboj in imata rahlo različni gostoti. Eno tekočino zaradi lažjega opazovanja obarvamo. Tekočina z manjšo gostoto plava na vrhu. Nagnjenost cevi povzroči tok tekočin ob mejni plasti: v zgornji tekočini navzgor, v spodnji pa navzdol. Ko prekoračimo pogoj stabilnosti, nastanejo valovi in tekočini se zmešata.

3 Hitrost valovanja

Včasih lokalni veter ustvari valove drugič oddaljena nevihta katere valovi dosežejo obalo. Počasna sprememba nivoja gladine je posledica plimovanja. Plimni val je val z zelo dolgo valovno dolžino (tisoče kilometrov) katerega ustvari majhna razlika v gravitaciji zaradi relativnih položajev Lune in Sonca glede na Zemljo.

Privzeli bomo pri našem računu, da je amplituda valov majhna (gladina je skoraj ravnina), da je potovanje valov dvodimenzionalno v pozitivni smeri x -osi in da je Coriolisova sila kot tudi viskoznost zanemarljiva. S tem lahko enačbo vala zapišemo

$$s = s_0 \sin(kx - \omega t)$$

z

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{t_0} \text{ in } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

kjer je s trenutni odmik gladine od ravnovesja (nivoja popolnoma ravne gladine), s_0 največji odmik od ravnovesja, ω je valovna frekvenca (rad/s), ν je frekvenca valovanja (Hz), k je valovni vektor, t_0 je čas ene periode (je čas, potreben, da dva zaporedna vrhova ali dolini vala prečkata isto fiksno točko) in λ je valovna dolžina (razdalja med dvema sosednjima vrhovoma ali dolinama).

Valovna frekvenca ω je povezana z valovnim vektorjem k z disperzijsko enačbo [7]:

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (11)$$

kjer je d globina vode in g težni pospešek. Predpis funkcije \tanh je

$$\tanh = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

in ko velja $x \rightarrow \infty$ je $\tanh x \approx 1$ in ko $x \approx 0$ je $\tanh x \approx x$. Dva približka enačbe (11) sta še posebno uporabna:

- 1.) Približek za globoko vodo velja, če je voda mnogo globlja od valovne dolžine. Potem je $d \gg \lambda$, $kd \gg 1$ in $\tanh(kd) = 1$. Zato se enačba (11) poenostavi

$$\omega^2 = gk \quad (12)$$

- 2.) Približek za plitko vodo velja, če je voda mnogo plitvejša od valovne dolžine. Potem je $d \ll \lambda$, $kd \ll 1$ in $\tanh(kd) = kd$. Zato se enačba (11) poenostavi

$$\omega^2 = gk^2 d \quad (13)$$

Rezultata veljata ob predpostavki za nestisljivo, brezvrtinčno, neviskozno tekočino. Upoštevali smo majhno amplitudo dvodimenzionalnih (sinusnih) valov. Zanemarili smo tudi morske tokove. Seveda je ta primer preveč idealiziran.

Fazna hitrost c je hitrost s katero del vala (hrib, dolina, ...) potuje. V času ene periode t_0 hrib prepotuje razdaljo λ in fazno hitrost izračunamo

$$c = \frac{\lambda}{t_0} = \frac{\lambda \cdot 2\pi}{t_0 \cdot 2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Torej je definicija fazne hitrosti

$$c \equiv \frac{\omega}{k}$$

iz česar lahko izrazimo z uporabo rezultata (11)

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)}$$

Smer širjenja valovanja je pravokotno glede na valovno fronto (vrh vala) in v pozitivni smeri x -osi. Približek fazne hitrosti je potem za globoko vodo z upoštevanjem rezultata (12)

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega}$$

in približek za plitko vodo z upoštevanjem rezultata (13)

$$c = \sqrt{gd}$$

Približka sta dobra na približno 5% za uporabljena približka (12) in (13) [2]. V globoki vodi je fazna hitrost odvisna od valovne dolžine. Daljši valovi potujejo hitreje. V plitki vodi pa vsi valovi ne glede na valovno dolžino potujejo z enako hitrostjo.

Grupna hitrost c_g je hitrost, s katero skupina valov in tudi energija valovanja potuje preko oceana. Definicija grupne hitrosti je

$$c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Z uporabo približkov disperzije dobimo

$$c_g = \frac{g}{2\omega} = \frac{c}{2}$$

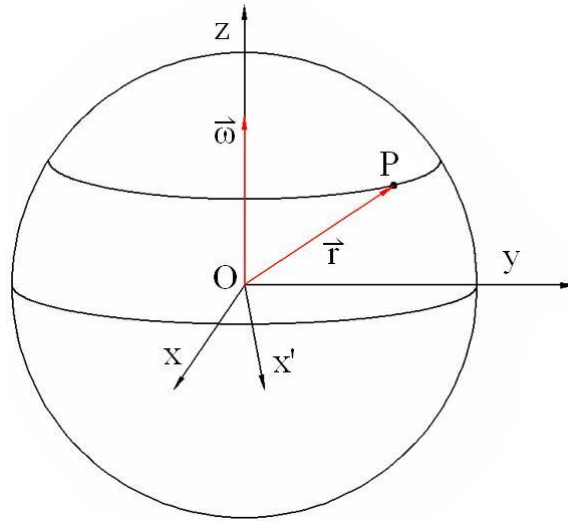
za globoko vodo in

$$c_g = \sqrt{gd} = c$$

za plitko vodo. Za površinske valove v oceanih je vektor grupne hitrosti pravokoten na valovno fronto (vrh vala), kar pa v splošnejšem primeru ni nujno.

4 Coriolisova sila

Pripnimo v središče Zemlje koordinatni sistem z osemi x , y in z . Ta sistem naj bo inercialen (nepospešen ali nerotirajoč). Naj bo pa koordinatni sistem z osemi x' , y' in z' ravno tako pripet v središče Zemlje, le da se vrtili okoli osi z - osi z' sta skupni in orientirani v isto smer. Ta sistem je neinercialen in se vrtili okoli osi z' s kotno hitrostjo Zemlje. Nekje na površju Zemlje naj se nahaja točka P . Izbira koordinatnih sistemov in lega točke P prikazuje slika (3).



Slika 3: Izbira koordinatnih sistemov in lega točke P .

Če je točka P fiksna v neinercialnem koordinatnem sistemu, potem se v inercialnem sistemu giblje z hitrostjo

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Če pa se točka P giblje s hitrostjo \mathbf{v}' v neinercialnem sistemu, potem je njena hitrost v inercialnem sistemu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (14)$$

To pomeni, da velja

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{inerc}} \equiv \left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{neinerc}} + \boldsymbol{\omega} \times \quad (15)$$

Ta enačba pove, da se časovna odvoda v obeh sistemih razlikujeta samo za člen $\boldsymbol{\omega} \times$. Če se točka P giblje pospešeno glede na neinercialen sistem,

potem lahko pospešek v inercialnem sistemu izračunamo tako, da operacijo (15) izvedemo na enačbi (14)

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{neinerc}} (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\end{aligned}$$

Ko uredimo člene, dobimo izraz za pospešek v inercialnem sistemu

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (16)$$

Srednji člen na desni strani enačaja v enačbi (16) je pospešek zaradi vrtenja sistema skupaj z Zemljo, zadnji člen pa je *Coriolisov pospešek*. Iz enačbe (16) lahko izrazimo pospešek v neinercialnem sistemu; dobimo formulo

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} \quad (17)$$

Če na delec z maso m deluje sila $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ v inercialnem sistemu, potem v neinercialnem sistemu delujejo nanj tri sile: „prava sila“ \mathbf{F} , *centrifugalna sila*, katera je usmerjena stran od osi vrtenja in *Coriolisova sila*, katera nastopi samo v primeru, če se delec giblje s konstantno hitrostjo v neinercialnem sistemu, in je hkrati pravokotna na vektorja $\boldsymbol{\omega}$ in \mathbf{v}' [4]:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) + 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

Coriolisovo silo določa člen

$$\mathbf{F}_{cor} = 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

Z upoštevanjem komponent vektorjev $\mathbf{v} = (u, v, w)$ in $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ glede na lokalni koordinatni sistem točke P , kjer je φ geografska širina, izračunamo in zapišemo komponente Coriolisove sile:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{cor} &= 2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} = 2m \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \end{vmatrix} \\ \vec{F}_{cor} &= 2m(v\omega \sin \varphi - w\omega \cos \varphi, -u\omega \sin \varphi, u\omega \cos \varphi)\end{aligned}$$

Velikost Coriolisove sile lahko izrazimo tudi s *Coriolisovim parametrom* f

$$|\mathbf{F}_{cor}| = |2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}| = (2\omega \sin \phi)mv' = fmv'$$

kjer je kot ϕ kot med vektorjema \mathbf{v}' in $\boldsymbol{\omega}$.

Posledica Coriolisove sile je, da se morski tokovi na severni polobli pod vplivom nje vrtijo v sourni smeri (suka jih v desno), na južni polobli pa v protiurni smeri (suka jih v levo).

5 Ekmanova spirala

Za vodo v oceanih privzamemo, da je nestisljiva. Razen v tanki plasti tik pod gladino lahko viskozne sile zanemarimo. Drugi Newtonov zakon opiše spremembo gibalne količine masnega deleža tekočine pod vplivom zunanje sile:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$$

kjer je \mathbf{F} zunanja sila, m masa opazovane tekočine in \mathbf{v} trenutna hitrost. Upoštevamo, da je tekočina nestisljiva (masa istega volumna je enaka) in lahko zgornjo enačbo zapišemo kot

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{f}_m \quad (18)$$

kjer je \mathbf{f}_m sila na enoto mase.

Štiri sile so pomembne: gradient tlaka, Coriolisova sila, gravitacija in trenje. Enačbo (18) lahko potem zapišemo [2]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r \quad (19)$$

kjer je \mathbf{g} težni pospešek \mathbf{F}_r sila trenja in $\boldsymbol{\omega}$ kotna hitrost Zemlje. Ko razpišemo enačbo (19) po komponentah v pravokotnem koordinatnem sistemu, dobimo gibalne enačbe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega v \sin \varphi + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega u \sin \varphi + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega u \cos \varphi - g + F_z \end{aligned} \quad (20)$$

kjer je F_i komponenta sile upora na enoto mase in φ geografska širina. Privzeli smo, da je $w \ll v$, zato je člen $2\omega w \cos \varphi$ izpuščen iz prve enačbe.

Enačbe (20) se pojavljajo pod več imeni. Leonhard Euler je prvi zapisal obliko enačb z zunanjimi silami, zato se enačbe včasih poimenovane *Eulerjeve enačbe*. Louis Marie Henri Navier je dodal trenje in so enačbe zato imenovane *Navier-Stokesove enačbe*. Člen $2\omega u \cos \varphi$ je majhnen v primerjavi z g v tretji enačbi in ga lahko zanemarimo. Dodamo še kontinuitetno enačbo za nestisljivo tekočino:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Oceanograf Nansen je okoli leta 1898 prišel do kvalitativne rešitve zakaj se ledene gore gibljejo pod kotom v desni smeri glede na smer vetra. Njegov

odgovor je temeljil na ravnovesju napetosti, ki jih povzroča veter (sila vetra na ledeno goro), Coriolisova sila in trenje. Nekaj let kasneje je Njegov asistent Ekman formuliral kvantitativen razlog. Uporabil je dve gibalni enačbi od enačb (20). Privzel je da ni gradientne sile tlaka in dinamsko ravnovesje vode (zato je časovni odvod hitrosti nič). Te predpostavke določajo naslednji enačbi

$$\begin{aligned}fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{21}$$

Strižne napetosti so definirane z viskoznostjo K (ang. *eddy viscosity* ali *eddy diffusivity*) [2] in sicer

$$\tau_{xz} = \rho K \frac{\partial u}{\partial z} \text{ in } \tau_{yz} = \rho K \frac{\partial v}{\partial z}\tag{22}$$

torej enačbe (21), z upoštevanjem (22) zapišemo v obliki

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{f}{K} v = 0 \text{ in } \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{f}{K} u = 0\tag{23}$$

Enačbi (23) sta diferencialni enačbi drugega reda z dvema neznankama. Poslužimo se malega trika, da ju bomo rešili. Definirajmo kompleksno hitrost, da bo veljalo

$$w = u + iv$$

Če pomnožimo desno enačbo (23) z i in jo potem prištejemo levi enačbi (23), dobimo

$$\frac{d^2(u + iv)}{dz^2} + \frac{f}{K}(v - iu) = 0$$

Z računanjem s kompleksnimi števili lahko pokažemo

$$v - iu = i(v/i - u) = i(-iv - u) = -i(u + iv)$$

tako, da enačbo prepisemo v obliko

$$\frac{d^2(u + iv)}{dz^2} - i \frac{f}{K}(u + iv) = 0 \text{ ali } \frac{d^2 w}{dz^2} - i \frac{f}{K} w = 0\tag{24}$$

Tako smo dve diferencialni enačbi drugega reda z dvema spremenljivkama spremenili v eno diferencialno enačbo drugega reda z eno kompleksno spremenljivko. Splošna rešitev enačbe (24) je

$$w(z) = A \exp(\gamma z) \exp(i\gamma z) + B \exp(-\gamma z) \exp(-i\gamma z)\tag{25}$$

kjer je

$$\gamma = \sqrt{f/2K}$$

Da bi določili konstanti A in B , moramo določiti robne pogoje na gladini in v globini:

- 1.) Hitrost se mora z globino zmanjševati (ko z postaja čedalje bolj negativni). Zato mora biti $B = 0$.
- 2.) Na gladini zahtevamo, da je $w = W_0$ - površinski tok. Zato mora biti $A = W_0$.

Rešitev enačbe (25) je potem

$$w(z) = W_0 \exp(\gamma z) \exp(i\gamma z) \quad (26)$$

Z uporabo Eulerjeve formule lahko enačbo (26) zapišemo kot

$$u + iv = (U_0 + iV_0) \exp(\gamma z) [\cos(\gamma z) + i \sin(\gamma z)]$$

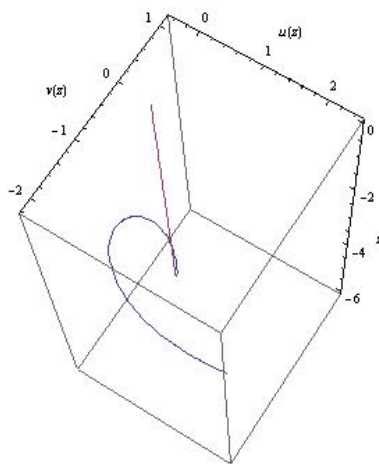
Če ločimo realen in imaginaren del rešitve, dobimo

$$\begin{aligned} u(z) &= \exp(\gamma z) [U_0 \cos(\gamma z) - V_0 \sin(\gamma z)] \\ v(z) &= \exp(\gamma z) [V_0 \cos(\gamma z) + U_0 \sin(\gamma z)] \end{aligned} \quad (27)$$

Karakteristiko tega tokovnega profila veliko lažje vidimo, če privzamemo da površinski tok teče vzdolž x -osi ($V_0 = 0$). Enačbi (27) postaneta

$$\begin{aligned} u(z) &= U_0 \exp(\gamma z) \cos(\gamma z) \\ v(z) &= U_0 \exp(\gamma z) \sin(\gamma z) \end{aligned} \quad (28)$$

Rešitvi določata spiralo, ki se z globino vrti v urini smeri. Spirala je znana kot *Ekmanova spirala* - slika (4).



Slika 4: Modra krivulja predstavlja Ekmanovo spiralo. Vijolična krivulja nakazuje točko $(0,0)$, kateri se Ekmanova spirala z globino eksponentno približuje.

6 Površinski tok

Da bi pojasnili dejstvo, da teče površinski tok desno glede na smer vetra, si moramo pogledati še en robni pogoj na gladini. Na gladini mora biti napetost zvezna (napetost v zraku mora biti enaka napetosti v vodi ob gladini). Napetost v zraku nastane zaradi vetra in ima tudi njegovo smer. Napetost v vodi pa podajata enačbi

$$\tau_{xz} = \rho K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \text{ in } \tau_{yz} = \rho K \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Z upoštevanjem enačb (28) in zgornjih robnih pogojev dobimo vrednosti napetosti

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \rho K \frac{d}{dz} (U_0 \exp(\gamma z) \cos(\gamma z)) \Big|_{z=0} = \rho K \gamma U_0 \\ \tau_{yz} &= \rho K \frac{d}{dz} (U_0 \exp(\gamma z) \sin(\gamma z)) \Big|_{z=0} = \rho K \gamma U_0 \end{aligned}$$

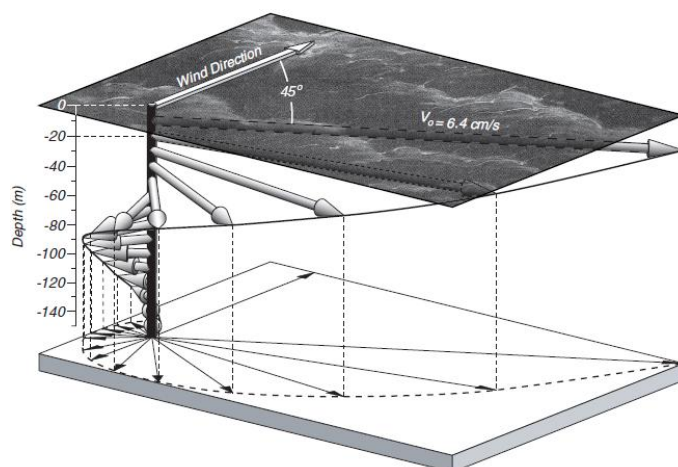
Rezultat podaja pomembne informacije:

- 1.) Za tok vzdolž x -osi mora obstajati komponenta hitrosti vetra tudi vzdolž y -osi. Torej morski tok ne teče v smeri vetra ampak pod kotom glede na veter.
- 2.) Ker sta magnitudi x in y komponent napetosti, ki jih povzroča veter, enaki, pomeni, da mora površinski tok teči natanko pod kotom 45° v desni smeri glede na veter ob gladini - slika (5) [4]. To je kvantitativni opis pojava, ki ga je opisal Nansen.
- 3.) Pove nam hitrost površinskega toka v odvisnosti od magnitud napetosti zaradi vetra, torej

$$|\tau| = \sqrt{2} \rho K \gamma U_0 = \rho U_0 \sqrt{K f}$$

ali

$$U_0 = \frac{|\tau|}{\rho \sqrt{K f}}$$



Slika 5: Ekmanov tok pri vetru s hitrostjo 10 m/s na severni geografski širini 35° .

7 Ekmanov transport in črpanje

S tokom v Ekmanovi plasti potuje masa vode. *Ekmanov transport* M_E je določen kot integral Ekmanove hitrosti $u(z)$ in $v(z)$ od gladine do dna Ekmanove plasti $-d$. Dve komponenti transporta sta M_{Ex} in M_{Ey} :

$$M_{Ex} = \int_{-d}^0 \rho u(z) dz, \quad M_{Ey} = \int_{-d}^0 \rho v(z) dz$$

Transport ima enoto $kg/(m \cdot s)$. To je masa vode, ki se pretaka skozi vertikalno ravnino, široko en meter, pravokotno na smer potovanja in se razteza od gladine do dna Ekmanove plasti $-d$.

Ekmanov transport izračunamo z integriranjem enačb (21):

$$\begin{aligned} f \int_{-d}^0 \rho v(z) dz &= f M_{Ey} = - \int_{-d}^0 d\tau_{xz} \\ f M_{Ey} &= -\tau_{xz} \Big|_{z=0} + \tau_{xz} \Big|_{z=-d} \end{aligned}$$

Podobno izračunamo še

$$\begin{aligned} f \int_{-d}^0 \rho u(z) dz &= f M_{Ex} = \int_{-d}^0 d\tau_{yz} \\ f M_{Ex} &= \tau_{yz} \Big|_{z=0} - \tau_{yz} \Big|_{z=-d} \end{aligned}$$

Z globino (oziroma na dnu Ekmanove plasti) se hitrost približuje vrednosti 0 m/s, napetost pa je od hitrosti odvisna. Zato je zadnji člen pri zgornjih dveh itegralih zanemarljiv. Torej je masni transport odvisen samo od napetostim ki je posledica vetra na gladini ($z = 0$):

$$\begin{aligned} fM_{Ey} &= -\tau_{xz}(0) \\ fM_{Ex} &= \tau_{yz}(0) \end{aligned} \quad (29)$$

kjer sta $\tau_{xz}(0)$ in $\tau_{yz}(0)$ sta komponenti napetosti na gladini, f pa je Coriolisov parameter. Opazimo, da je ena komponenta Ekmanovega transporta nasprotnega predznaka kot komponenta napetosti (obe komponenti napetosti sta enako veliki), kar pove, da neto transport vode v Ekmanovi plasti poteka pod kotom 90° glede na smer vetra (v desno smer na severni pololi in v levo smer na južni polobli). Skupni Ekmanov transport je

$$M = \sqrt{M_{Ex}^2 + M_{Ey}^2} = |\tau|/f$$

Ekmanov transport ima pomembne implikacije za gibanje vode v oceanih. Smer gibanja vode pri vetrovih anticiklona na severni polobli je proti središču kroženja. Tako je morska gladina v središču kroženja privzdignjena hkrati pa ti tokovi potiskajo hladnejšo globljo vodo še globlje. Površinsko stekanje vode proti središču kroženja mora biti kompenzirano z vertikalnim gibanjem vode navzdol (ang. *downwelling*). Voda se v Ekmanovi plasti steka k središču kroženja in potem vertikalno navzdol, v globini pa voda potuje od središča kroženja. Ko piha ciklonski veter, se voda v središču kroženja dviga (ang. *upwelling*).

Vertikalno hitrost povezano z gibanjem vode navzdol lahko določimo z integriranjem kontinuitetne enačbe skozi debelino Ekmanove plasti

$$\begin{aligned} \rho \int_{-d}^0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-d}^0 \rho u(z) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-d}^0 \rho v(z) dz &= -\rho \int_{-d}^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ \frac{\partial M_{Ex}}{\partial x} + \frac{\partial M_{Ey}}{\partial y} &= -\rho[w_E(0) - w_E(-d)] \end{aligned}$$

Po definiciji se hitrost približuje vrednosti 0 m/s na dnu Ekmanove plasti. Zato velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{Ex}}{\partial x} + \frac{\partial M_{Ey}}{\partial y} &= -\rho w_E(0) \\ &\text{ali} \\ \nabla_H \cdot \mathbf{M} &= -\rho w_E(0) \end{aligned} \quad (30)$$

kjer je \mathbf{M} vektor transporta vode in ∇_H horizontalni operator. Enačba pove, da horizontalno gibanje vode privede do vertikalne hitrosti v zgornji plasti oceana. Proces imenujemo *Ekmanovo črpanje* (ang. *Ekman pumping*).

Če povežemo Ekmanov transport (29) in enačbo (30) med seboj, lahko izrazimo hitrost Ekmanovega črpanja z napetostjo, ki jo povzroča veter na gladini:

$$w_E(0) = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{yz}(0)}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{xz}(0)}{f} \right) \right]$$

$$w_E(0) = \frac{1}{\rho f} \nabla_z \times \boldsymbol{\tau}$$

Rezultat pove, da je vertikalna hitrost vode v Ekmanovi plasti sorazmerna rotorju napetosti, ki jo povzroča veter. Indeks z kaže na to, da uporabimo vertikalno komponento rotorja.

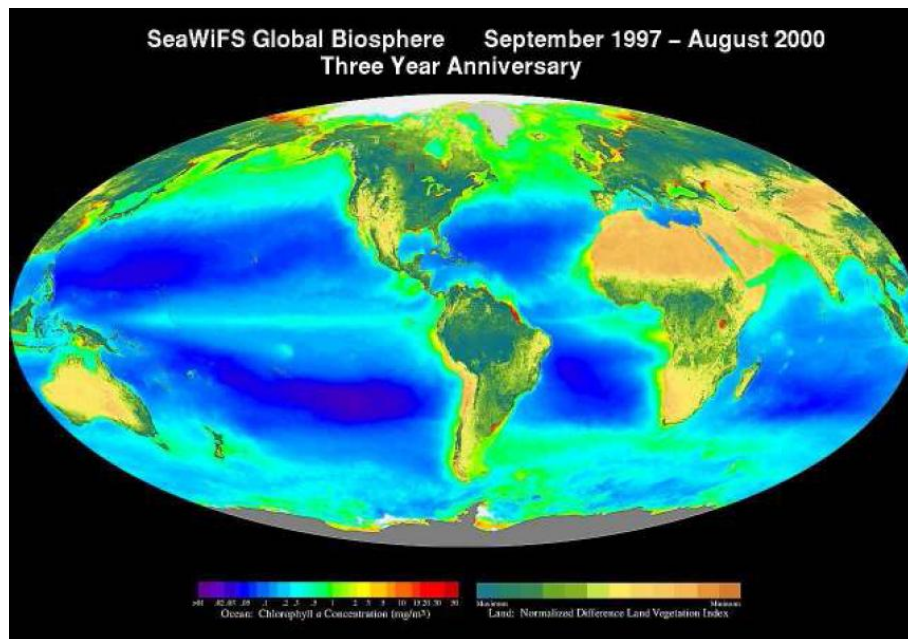
Ekmanov transport ima pomemben vpliv na klimatske razmere zahodne obale Severne in Južne Amerike. Vzdolž zahodne obale Severne Amerike se površinske vode Pacifika v spomladanskem času premikajo od obale. V tem času prevladujejo severni do sever-severozahodni vetrovi. Ta površinski primankljaj vode je nadomeščen z dvigom hladnejše vode iz globine oceana. Zato so priobalne vode v spomladanskem in poletnem času Severne Amerike hladnejše, kot v ostalem obdobju leta. To pojasni, zakaj je obalna klima Kalifornije, Oregona in ostalih krajev na zahodni obali poleti hladna in je pogosto megleno. Isti pojav je opažen na zahodni obali Južne Amerike. Z dvigom vode pridejo k obali na površje tudi hranila iz dna oceana. Zaradi tega je na obalah Peruja in Ekvadorja razvita ribiška industrija [3]. Peru je ribolovna velesila (druga na svetu).

Dvig vode se pojavlja na mnogih mestih po svetu, trije največji pa so:

- a.) vzdolž zahodnih obal kontinentov (na vzhodni strani oceanov),
- b.) na ekvatorju in
- c.) v Južnem ocean, ki obdaja Antarktiko.

Na satelitski sliki (6) temnomodra in vijolična barva kažeta nizko koncentracijo fitoplanktona medtem ko rdeča, oranžna in rumena barva kažejo visoko koncentracijo fitoplanktona. Kot lahko vidimo, je veliko fitoplanktona ob obalah, saj je veliko hranil sprano iz zemlje. Opazimo tudi, da je bistveno več fitoplanktona na zahodnih obalah kot na vzhodnih obalah zaradi Ekmanovega črpanja - dviga hladne, s hranili bogate vode. Svetlomodra barva na ekvatorju tudi kaže na to, da je tam več fitoplanktona. Veliko fitoplanktona je tudi v hladnih vodah, kjer se hladna površinska voda lažje meša s hladno vodo iz globin bogato s hranili. Dvig vode na sredini Južnega oceana prinese na površje še več hranil, kar proizvede več življenja

kot kjerkoli drugje v oceanih. Vendar pa lahko do dviga vode pride tudi zaradi drugih razlogov kot na primer, da morski tok zadane ob vzpetino na morskem dnu in se je voda prisiljena dvigniti [6].



Slika 6: Temnomodra in vijolična barva kažeta nizko koncentracijo fitoplanktona medtem ko rdeča, oranžna in rumena barva kažejo visoko koncentracijo fitoplanktona. Bistveno več fitoplanktona je na zahodnih obalah kontinentov zaradi Ekmanovega črpanja - dviga hladne, s hranili bogate vode [6].

8 Povzetek

Seminar poenostavljeno predstavlja obravnavo nekaterih načinov mešanja vode. Pri mnogih računih so našteje predpostavke, kar bistveno poenostavi računanje. Ob rezultatih se je tega potrebno zavedati. V realnosti je smer morskih tokov in hitrost vode v njih zelo težko napovedati, saj je potrebno upoštevati bistveno več vplivov okolja: potrese, obliko morskega dna in obal, slanost vode, nevihte in podobno.

Bistveno obširnejšo obravnavo tematike lahko najdemo v pripisani uporabljeni literaturi ali pa pobrskamo še po dodatni literaturi.

Literatura

- [1] P. K. Kundu: *Fluid mechanics*, Academic Press, San Diego (1990)
- [2] R. H. Stewart: *Introduction to physical oceanography*, Department of oceanography, Texas A & M University (2008)
- [3] D. R. MacAyeal: *Physical oceanography*, Department of Geophysical Science University of Chicago, Chicago, Illinois (2001)
- [4] <http://www.astro.uvic.ca/~tatum/classmechs/class4.pdf>, 1. 8. 2011
- [5] http://www.atmos.millersville.edu/~adecaria/ESCI485/esci485_lesson05_ocean_mixed_layer.pdf, 1. 8. 2011
- [6] <http://www.elcamino.edu/faculty/tnoyes/Readings/09AR.pdf>, 1. 8. 2011
- [7] <http://www.ocean.washington.edu/people/faculty/parsons/OCEAN549B/lwt-lect.pdf>, 1. 8. 2011
- [8] http://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/exp_e/exp/kh/1/res.htm, 1. 8. 2011