

University of *Ljubljana*
Faculty of *Mathematics and Physics*



SKRIPTA

FIZIKA MEHKE SNOVI

PREDAVATELJ:
PROF. DR. RUDOLF PODGORNIK

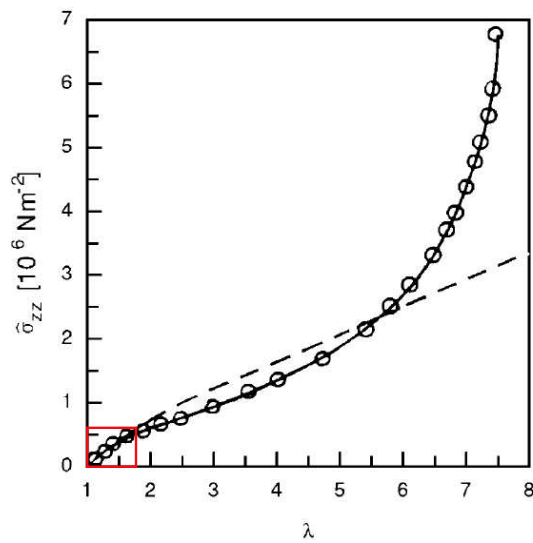
LJUBLJANA, 2.1.2012

Kazalo

1 Nelinearna mehanika	2
1.1 Elastičnost polimerov (<i>Rubber elasticity</i>)	3

1 Nelinearna mehanika

Pri vseh dosedaj predstavljenih modelih smo navadno predpostavili, da se obravnavane snovi na obremenitve odzivajo linearno. Izkaže se, da ta predpostavka pri polimernih materialih v realnih okoliščinah ne velja, saj se že pri relativno majhnih deformacijah ti obnašajo nelinearno, kar še posebej velja za naravne gume. Nelinearnost je jasno vidna, če opazujemo t.i. obremenitveno krivuljo (odvisnost napetosti od relativnega raztezka). V primeru materiala z linearnim odzivom, se relativni raztezek λ z nominalno komponento tenzorja napetosti $\hat{\sigma}_{zz}$ večja premo sorazmerno. Omenjena linearnost je pri naravni gumi vidna le v začetnem delu, kjer imamo opravka z majhnimi obremenitvami. V celoti ima krivulja sigmoidno obliko, značilno za nelinearne snovi.

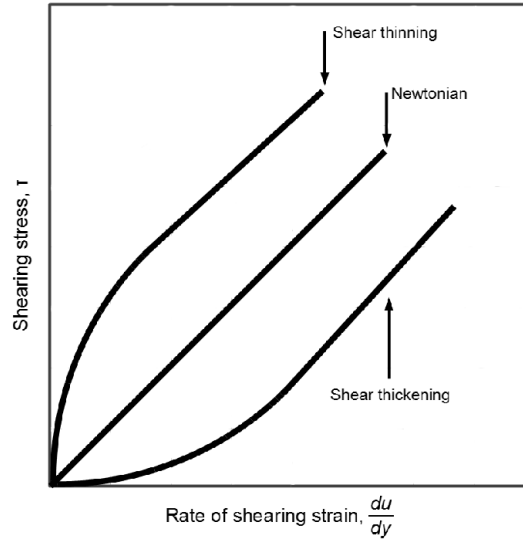


Slika 1: Obremenitvena krivulja dveh vrst gume. S črtkano črto je prikazana idealna guma (za izpeljavo glej naslednje podpoglavje), s polno črto pa realna, naravna guma, ki izkazuje nelinearno karakteristiko. Območje, kjer velja linearnost, se nahaja v skrajno levem delu grafa in je označeno z rdečo barvo.

Nelinearnost opazimo tudi pri merjenju elastomehanskih lastnosti polimernih talin (*polymer melts*) ob sobnih pogojih. Pri linearnih materialih (newtonskih) je viskoznost neodvisna od strižne hitrosti du/dy in je pri dani temperaturi za dano snov konstantna. V tem režimu namreč velja:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{du}{dy}, \quad (1)$$

kjer je F/A strižna napetost, η pa viskoznost. Pri merjenju odvisnosti strižne napetosti od strižne hitrosti lahko pri mnogih (vsakdanjih) snoveh opazimo precej drugačno karakteristiko, in sicer večanje oz. manjšanje viskoznosti. Če se viskoznost s strižno hitrostjo povečuje imamo opravka z dilatantnimi materiali (*shear thickening*), na primer zmesjo koruznega škroba in vode ali pa namočenega peska. Pri tem se z večanjem obremenitve tudi viskoznost snovi povečuje. V nasprotnem primeru govorimo o pseudoplastičnih snoveh (*shear thinning*), kamor spadajo različne barve, kri, stepena smetana, kečap, lava,... Vse omenjene snovi zaradi svoje nelinearne karakteristike spadajo pod nenevtonske materiale.



Slika 2: Odvisnost strižne napetosti od strižne hitrosti za različne tipe materialov.

1.1 Elastičnost polimerov (*Rubber elasticity*)

Nelinearne lastnosti polimernih talin so v veliki meri posledica njihove mikroskopske zgradbe, ki jo navadno opisujemo kot močno prepleteno polimerno mrežo. Tipičen predstavnik takega materiala so gume, ki jih najdemo v različnih oblikah - kot elastične pene, tanke filme ali pa trakove oz. plašče. Z mikroskopskega stališča in stališča molekularne dinamike velja, da so gume v tekoči fazi, pri čemer lahko opazovani vzorec najbolj preprosto modeliramo kar kot eno, zelo dolgo in prepleteno polimerno verigo. Pri tem želimo določiti zvezo med zunanjo deformacijo (opisali jo bomo s tenzorjem deformacije) in napetostjo, ki se kot posledica ustvari znotraj materiala (napetostni tenzor).

Naloga se bomo lotili z izpeljavo sile, ki je povezana z raztegom polimerne verige, pri čemer se za začetek omejimo na prizmatični vzorec gume z dimenzijami $L_x = L_y$ in L_z . Zanima nas, kolikšna sila je potrebna, da tak vzorec raztegnemo v smeri z za ΔL_z . Razteg strnjeno zapišemo s pomočjo relativnega raztezka λ kot:

$$\lambda = \frac{L_z + \Delta L_z}{L_z}. \quad (2)$$

Ker je guma praktično nestisljiva ($V = \text{konst.}$) in jo navadno opazujemo pri konstantni temperaturi, silo računamo s pomočjo Helmholtzove proste energije \mathcal{F} , ki je v tem primeru funkcija relativnega raztezka λ . Sila se torej izraža kot:

$$f = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta L_z} \right)_{V,T} = \frac{1}{L_z} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} \right)_{V,T}. \quad (3)$$

Prosta energija je vsota notranje energije ter entropije, zato lahko tudi silo razdelimo na dva prispevka - f_E , prispevek energije ter entropijski člen f_S . Če se pri spreminjanju relativnega raztezka λ in temperature T prostornina ohranja, lahko oba člena zapišemo v obliki:

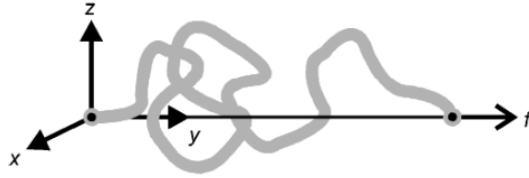
$$f_S = -\frac{T}{L_z} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda} \right)_{V,T} = \frac{T}{L_z} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \partial T} \right)_V = T \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{V,\lambda} \quad (4)$$

ter

$$f_E = f - T \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{V,\lambda} = -Tf \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{f}{T} \right) \Big|_V. \quad (5)$$

Eksperimentalni rezultati, kjer merimo odziv različnih tipov gume na velike obremenitve kažejo, da je entropijski člen dominanten, zato v nadaljnji izpeljavi popolnoma zanemarimo energijski prispevek k prosti energiji. Pri vpeljemo koncept idealne gume, za katero velja $f_{\mathcal{E}} = 0$. Čeprav se zdi, da za omenjeno poenostavitev ne obstajajo tehtni toretični argumenti, model, ki sloni na predpostavki $f = f_S$, kvalitativno dobro opisuje obnašanje naravne gume in ga zato uporabljamo kot praktičen približek. Naša naslednja naloga je torej določiti obliko entropijskega prispevka k sili, za kar potrebujemo dodatne predpostavke, ki se nanašajo na konkretno mikroskopsko zgradbo materiala.

Za začetek se omejimo na eno samo polimerno verigo, z danim povprečnim kvadratom razdalje med koncema, R_0^2 , ter določimo silo, ki je potrebna, da ohranjamo to razdaljo. Kasneje bomo omenjeni rezultat uporabili za določitev entropijskega prispevka k sili v primeru večjega števila med seboj prepletenih polimernih verig. Predpostavimo sedaj, da je en konec verige fiksiran v koordinatnem izhodišču ter da se drugi konec lahko pomika po y -osi (slika spodaj).



Slika 3: Geometrijska postavitev polimerne verige pri računanju sile, potrebne, da sta oba konca verige na povprečni razdalji y .

Sila je potemtakem določena z enačbo:

$$f = -T \frac{\partial s_p}{\partial y}, \quad (6)$$

kjer s_p predstavlja entropijo verige s prosto gibljivimi členi (v tem primeru je energijski del proste energije po definiciji enak 0), kar poudarimo z indeksom p . Za izračun entropije uporabimo Boltzmannov izraz:

$$s_p = k_B \ln Z_p(y). \quad (7)$$

kjer smo z $Z_p(y)$ označili particijsko funkcijo. Ta je določena s številom vseh možnih konformacij polimerne verige, ki dajo isto povprečno razdaljo med koncema, y . Particijsko funkcijo lahko analitično določimo, če upoštevamo, da za mobilni prosti konec verige velja Gaussova prostorska porazdelitev:

$$p(x, y, z) = \left(\frac{3}{2\pi R_0^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{2R_0^2} \right), \quad (8)$$

pri čemer je $R_0^2 = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$. Ker smo v začetni predpostavki mobilni konec polimera omejili le na os y , nas zanima le 1D projekcija porazdelitve, $p(0, y, 0)$. Za iskano particijsko funkcijo torej velja:

$$Z_p(y) \propto p(0, y, 0) \propto \exp \left(-\frac{3y^2}{2R_0^2} \right). \quad (9)$$

Entropija je posledično:

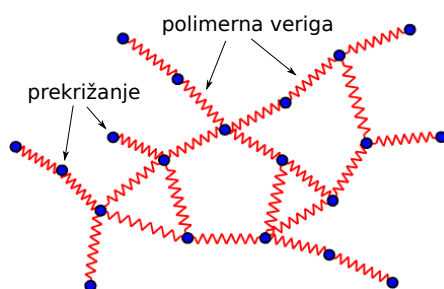
$$s_p(y) = s_p(0) + k_B \left(-\frac{3y^2}{2R_0^2} \right). \quad (10)$$

Po odvajanju dobimo za silo naslednji rezultat:

$$f = \frac{3k_B T}{R_0^2} y \equiv by. \quad (11)$$

Sila je sorazmerna z razdaljo med koncema verige, kar je zanimivo, saj bi isti rezultat dobili tudi, če bi predpostavili, da sta konca polimerne verige med seboj povezana s prožno vzmetjo. Sorazmernostna konstanta je preprosta funkcija temperature in velikosti polimera.

V vzorcu gume najdemo veliko število takih polimernih verig, ki se med seboj preko prekrížanj povežane v kompleksno mrežo, zato moramo zgornji rezultat prilagoditi. V nasprotju z dosedanjimi obravnavami konca posamezne verige nista povsem prosta, ampak sta fiksirana na prekrížanjih (slika spodaj).



Slika 4: Preprost model gume, prikazan kot mreža prepleteneh polimernih verig.

Določiti želimo pristo energijo takega sistema, pri čemer moramo zavoljo poenostavitve predpostaviti naslednje privzeteke:

- vse verige so sestavljene iz istega števila enot in imajo zato enako dolžino R_0^2 oz. konstanto b ,
- konformacijska porazdelitev je izotropna Gaussova,
- točke, kjer se dve verigi prekrížata, so fiksirane znotraj snovi ter se spreminjajo le zaradi različnih deformacij.

Model, omejen z zgornjimi predpostavkami, imenujemo *model fiksne stika* (*fixed junction model*) in ga v nadaljevanju uporabimo na primeru prizmatičnega kosa gume z dimenzijami L_x , L_y in L_z . Te se ob homogeni ortogonalni deformaciji spremenijo kot:

$$\begin{aligned} L_x &\rightarrow \lambda_1 L_x, \\ L_y &\rightarrow \lambda_2 L_y, \\ L_z &\rightarrow \lambda_3 L_z. \end{aligned} \quad (12)$$

Parametri deformacije (relativni raztezki) λ_1 , λ_2 in λ_3 določajo hkrati tudi spreminjanje vektorja, ki povezuje oba konca verige, ki sta fiksirana na točkah križanja:

$$\mathbf{r}_i = (x_i = \lambda_1 x'_i, y_i = \lambda_2 y'_i, z_i = \lambda_3 z'_i). \quad (13)$$

Pri tem koordinate x'_i , y'_i in z'_i označujejo stanje pred deformacijo.

Entropijo nedeformirane verige s fiksno razdaljo med koncema izračunamo na isti način kot v enačbi (10) ter dobimo izraz, ki je sedaj odvisen od vseh treh začetnih koordinat:

$$s'_i = s_p(0, 0, 0) - \frac{3k_B}{2R_0^2} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2). \quad (14)$$

Celotno entropijo določimo tako, da seštejemo prispevke vseh verig. Pri dani prostornini \mathcal{V} in gostoti polimernih verig, c_p , znaša entropija cele prizme:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}' &= \sum_i s'_i \\ &= \mathcal{V}c_p \int s_p(x', y', z') p(x', y', z') dx' dy' dz' \\ &= \mathcal{V}c_p \left(s_p(0, 0, 0) - \frac{3k_B}{2} \right).\end{aligned}\quad (15)$$

Sorodno določimo tudi celotno entropijo deformiranega vzorca:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{V}c_p \int \left(s_p(0, 0, 0) - k_B \frac{3}{2R_0^2} (\lambda_1^2 x'^2 + \lambda_2^2 y'^2 + \lambda_3^2 z'^2) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{3}{2R_0^2 \pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{3}{2R_0^2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) \right] dx' dy' dz' \\ &= \mathcal{V}c_p \left(s_p(0, 0, 0) - \frac{k_B}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \right).\end{aligned}\quad (16)$$

Sprememba entropije, ki je povezana z določeno deformacijo je torej le funkcija števila polimerov v mreži in deformacijskih konstant λ_i :

$$\Delta\mathcal{S} = \mathcal{S} - \mathcal{S}' = -\mathcal{V}c_p \frac{k_B}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3).\quad (17)$$

Če se zavoljo praktičnosti omejimo na primer, kjer velja $\lambda_3 = \lambda$ in $\lambda_1 = \lambda_2$ (enoosni razteg, pri katerem pride zaradi ohranitve prostornine do dodatne skrčitve v ortogonalnih smereh) ter upoštevamo, da je guma nestisljiva, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, velja:

$$\lambda_1^2 \lambda = 1.\quad (18)$$

Prirastek entropije lahko torej prepišemo v obliko:

$$\Delta\mathcal{S} = -\frac{\mathcal{V}c_p k_B}{2} \left(\frac{2}{\lambda} + \lambda^2 - 3 \right).\quad (19)$$

Silo izračunamo s pomočjo odvajanja entropije,

$$f = -\frac{T}{L_z} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda} = -\frac{T}{L_z} \frac{\partial \Delta\mathcal{S}}{\partial \lambda} = \frac{\mathcal{V}c_p k_B T}{L_z} \left(-\frac{1}{\lambda^2} + \lambda \right).\quad (20)$$

Rezultat lahko zapišemo tudi s pomočjo pripadajoče komponente tlaka, $\sigma_{zz} = f/(L_x L_y / \lambda)$,

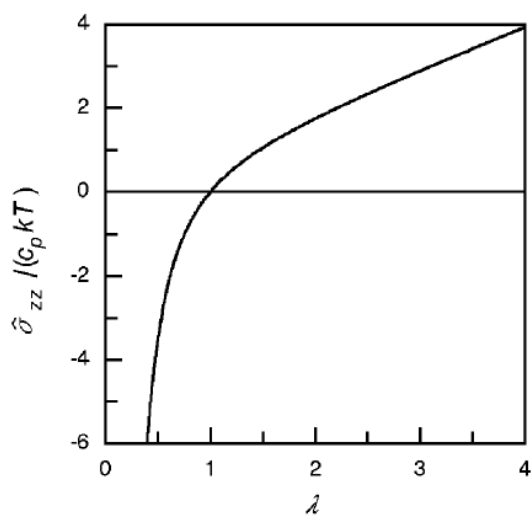
$$\sigma_{zz} = c_p k_B T \left(-\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right).\quad (21)$$

ki je tokrat neodvisen od velikosti vzorca. V praksi navadno definiramo še t.i. nominalno komponento tlaka, ki je primernejša za primerjave z eksperimentalnimi podatki:

$$\hat{\sigma}_{zz} = \frac{f}{L_x L_y} = c_p k_B T \left(-\frac{1}{\lambda^2} + \lambda \right).\quad (22)$$

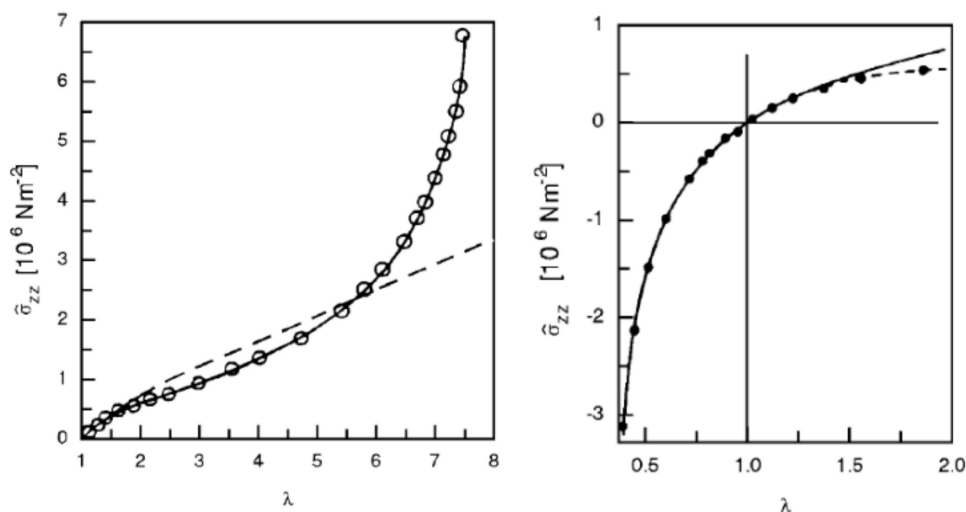
Vidimo, da je končni izraz [enačba (21)] relativno preprosta funkcija deformacijskega parametra λ ter gostote polimerov c_p in temperature. Enačba velja za katerokoli vrednost λ ter

opisuje tako podaljševanje kot stiskanje materiala. Hkrati opazimo tudi, da tlak ni odvisen od stopnje polimerizacije, kar pomeni, da je prva predpostavka modela nepotrebna ter da rezultat velja tudi za polimerne verige različnih velikosti.



Slika 5: Nominalna z komponenta tlaka v odvisnosti od parametra λ za primer enoosno obremenjenega kosa gume (λ predstavlja parameter deformacije v smeri z).

V limiti velikih deformacij ($\lambda > 1$) se sila s parametrom deformacije λ spreminja linearno, medtem ko je obnašanje v režimu stiskanja v splošnem nelinearno. Ko se parameter λ bliža 0, sila in s tem tlak divergirata.



Slika 6: Primerjava nominalnega tlaka naravne gume (točke) ter modela idealne gume (črta) v odvisnosti od deformacijskega parametra. Slika desno predstavlja povečavo leve slike v območju majhnih deformacij, v katerem se eksperimentalni rezultati in napovedi modela lepo ujemajo. Do razhajanja obeh rezultatov pride v območju velikih obremenitev, kjer predpostavka o Gaussovi konformacijski porazdelitvi ne velja več.

Analitični rezultat želimo primerjati z realnimi podatki, vendar je nemogoče primerjati absolutne vrednosti, saj je polimerna gostota c_p odvisna od privzetega modela in jo težko ocenimo iz vzorca. V realnih materialih je dodatna težava tudi narava prepletov, saj ti niso fiksni (kot smo predpostavili v modelu), ampak se lahko spreminjajo v skladu z Brownovim gibanjem. Iz eksperimentalnih podatkov tako pridobimo le podatek o efektivni polimerni gostoti, ki ga sicer lahko povežemo z različnimi snovnimi parametri, vendar vedno ostane kak empiričen podatek, ki ga ne poznamo natančno. Hkrati moramo vedeti tudi, da smo v naših izračunih popolnoma zanemarili prispevek energije, kar je upravičeno le pri določenih tipih gume. Analitične in empirične krivulje lahko torej primerjamo le kvalitativno.

Obnašanje deformirane gume želimo opisati še splošno s teorijo elastomehanike, pri čemer moramo že znane enačbe (npr. linearni Hookeov zakon) prilagoditi velikim raztegom in skrčitvam, ki jih linearna teorija ne upošteva. Začnimo z definicijo tlaka, ki ga zapišemo v obliki tenzorja napetosti $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{i,j})$.

Tenzor napetosti predstavlja povezavo med silo, ki jo okoliški material izvaja na kocko gume znotraj vzorca preko njenih stranic. Konkretno, komponenta tlaka $\sigma_{i,j}$ opisuje silo na enoto površine, ki deluje v smeri osi j na površino, pravokotno na smer i . Če poznamo tenzor napetosti lahko tako relativno preprosto določimo silo, ki deluje na površino z normalo \mathbf{n} :

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{n}. \quad (23)$$

Z $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ponovno označimo koordinate točk v nedeformiranem telesu ter z $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ koordinate točk po deformaciji. Sedaj lahko definiramo funkcijo $\mathbf{r}'(\mathbf{r})$, ki opisuje premik različnih točk ob deformaciji telesa, s čimer je le-ta popolnoma določena. V praksi seveda ne opisujemo premikov vsake točke posebej, ampak informacije o deformaciji združimo v Cauchyjev tenzor deformacije:

$$C_{jk} = \frac{\partial r'_i}{\partial r_j} \frac{\partial r'_i}{\partial r_k}. \quad (24)$$

Ta je z lokalnimi raztegi povezan preko enačbe:

$$dr'_i dr'_i dr_i dr_i = dr_j (C_{jk} - \delta_{jk}) dr_k. \quad (25)$$

Tenzor je simetričen, zato ga vedno lahko pretvorimo v diagonalizirano obliko, pri čemer so matrični elementi:

$$C_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i^{-2}. \quad (26)$$

Diagonalni elementi so v tem primeru enaki obratnim vrednostim že v začetku vpeljanih relativnih raztezkov λ_i .

S pomočjo tako določenega tenzorja deformacije, želimo sedaj zapisati tenzor napetosti. S tem problemom se je intenzivno ukvarjal Josef Finger (1841 - 1925) ter ugotovil, da je za opis medsebojne odvisnosti napetosti in deformacije relevantna le ena skalarna funkcija - razmerje med gostoto proste energije in celotno deformacijo v telesu in jo lahko zapišemo v obliki invariant tenzorja deformacije. Te so v primeru tenzorja drugega reda tri:

$$\begin{aligned} I_C &= C_{11} + C_{22} + C_{33}, \\ II_C &= C_{11}C_{22} + C_{22}C_{33} + C_{33}C_{11} - C_{12}C_{21} - C_{13}C_{31} - C_{23}C_{32}, \\ III_C &= \text{Det}\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (27)$$

Ker uporabljamo diagonalizirano obliko tenzorja deformacije, velja:

$$\begin{aligned} I_C &= \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}, \\ II_C &= \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} + \lambda_2^{-2}\lambda_3^{-2} + \lambda_3^{-2}\lambda_1^{-2}, \\ III_C &= \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Gostota proste energije je invariantna na vse rotacije koordinatnega sistema, zato sklepamo, da jo lahko zapišemo kot $f(I_C, II_C, III_C)$. Ob teh predpostavkah lahko zapišemo Fingerjevo konstitutivno enačbo, ki povezuje deformacijski in napetostni tenzor:

$$\boldsymbol{\sigma} = c_{-1}\mathbf{C}^{-1} + c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{C}. \quad (29)$$

Pri tem \mathbf{I} predstavlja identiteto, \mathbf{C}^{-1} inverz Cauchyjevega tenzorja, c_{-1} , c_0 in c_1 pa faktorje, ki so povezani z invariantami tenzorja deformacije preko enačb:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= 2III_C^{3/2} \frac{\partial f}{\partial II_C}, \\ c_0 &= -2III_C^{1/2} \left(II_C \frac{\partial f}{\partial II_C} + III_C \frac{\partial f}{\partial III_C} \right), \\ c_1 &= -2III_C^{1/2} \frac{\partial f}{\partial I_C}. \end{aligned} \quad (30)$$

Fingerjevo enačbo lahko zapišemo v alternativni obliki, ki je bolj primerna za obravnavo gum, če namesto Cauchyjevega uvedemo Fingerjev tenzor $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$, s katerim še vedno opisujemo deformacije v telesu:

$$\boldsymbol{\sigma} = b_1\mathbf{B} + b_0\mathbf{I} + b_{-1}\mathbf{B}^{-1}, \quad (31)$$

pri čemer so

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{III_B^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial I_B}, \\ b_0 &= \frac{2}{III_B^{1/2}} \left(II_B \frac{\partial f}{\partial II_B} + III_B \frac{\partial f}{\partial III_B} \right), \\ b_{-1} &= -2III_B^{1/2} \frac{\partial f}{\partial III_B}. \end{aligned} \quad (32)$$

Ker morajo lastne osi tenzorjev \mathbf{B} in \mathbf{C} sovpadati, mora seveda veljati tudi

$$B_{ij} = \lambda_i^2 \delta_{ij}. \quad (33)$$

Gostoto proste energije idealne gume z novimi količinami zapišemo na isti način kot v enačbi (19):

$$f = \frac{G}{2}(I_B - 3), \quad (34)$$

pri čemer uvedemo sorazmernostno konstanto G , ki jo bomo kasneje poimenovali strižni modul. Opazimo, da v zgornji enačbi ni vseh treh invariant deformacijskega tenzorja, ampak le prva, I_B . Ker torej h gostoti proste energije prispeva le prva invarianta, je edini relevanten faktor v enačbi (31) b_1 . Napetostni tenzor idealne gume lahko torej zapišemo kot

$$\boldsymbol{\sigma} = G\mathbf{B} - p\mathbf{I}, \quad (35)$$

kjer smo upoštevali še morebitni zunanji tlak, ki v invariante deformacijskega tenzorja ni bil vključen. V splošnem velja za hiperelastične, nestisljive materiale (kamor spadajo realne gume) razširjena zveza (31), kjer upoštevamo prispevka invariant I_B in II_B . Tretjo invarianto izpustimo, saj predstavlja le drugače zapisano zvezo za prostornino, ki je po predpostavki konstantna. Splošna zveza med tenzorjem napetosti in deformacije je torej:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\partial f}{\partial I_B} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial f}{\partial II_B} \mathbf{B}^{-1} - p\mathbf{I}. \quad (36)$$

Pravkar izpeljano enačbo ilustrirajmo s pomočjo primerov. Začnimo z že omenjeno enoosno obremenitvijo idealne gume, za katero naj veljajo naslednje transformacijske enačbe:

$$\begin{aligned} z' &= \lambda^{-1}z, \\ x' &= \lambda^{1/2}x, \\ y' &= \lambda^{1/2}y. \end{aligned} \quad (37)$$

S pomočjo zgornjih zvez lahko določimo tako Cauchyjev

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \quad (38)$$

kot Fingerjev tenzor:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Ker ne poznamo vrednosti hidrostatskega tlaka p , ne moremo določiti absolutnih vrednosti elementov matrike napetosti, ampak le razlike med različnimi komponentami. Razlika med elementoma σ_{zz} in σ_{xx} je

$$\sigma_{zz} - \sigma_{xx} = G(\lambda^2 - \lambda^{-1}). \quad (40)$$

Ko velja $\sigma_{xx} = 0$, lahko dobljeni rezultat primerjamo z enačbo (21), ki smo jo določili s pomočjo statistične obravnave polimerne verige. Iz direktne primerjave sledi izraz za temperaturno odvisnost strižnega modula:

$$G = c_p k_B T. \quad (41)$$

Posvetimo se sedaj čistemu strigu, ki ga opišemo z naslednjimi transformacijskimi enačbami:

$$\begin{aligned} z' &= \lambda^{-1}z, \\ x' &= \lambda x, \\ y' &= y. \end{aligned} \quad (42)$$

Fingerjev tenzor je tokrat

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

razlike med komponentami napetostnega tenzorja pa:

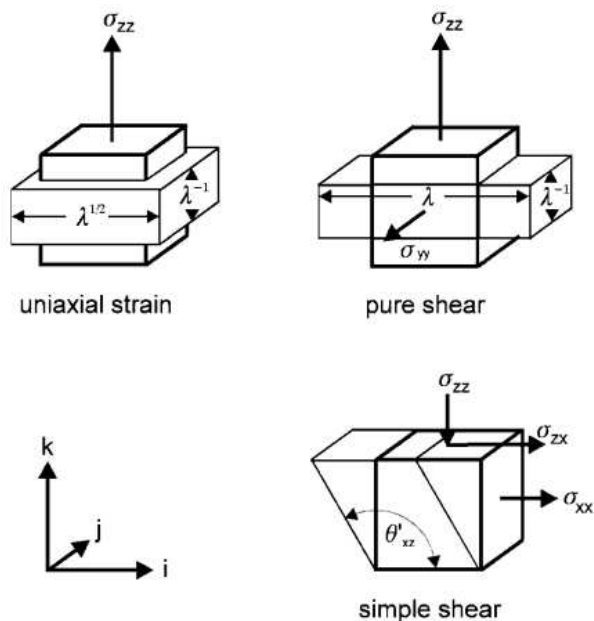
$$\begin{aligned} \sigma_{zz} - \sigma_{xx} &= G(\lambda^2 - \lambda^{-2}), \\ \sigma_{zz} - \sigma_{yy} &= G(\lambda^2 - 1), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} &= G(1 - \lambda^{-2}). \end{aligned} \quad (44)$$

Vse tri razlike komponent tenzorja napetosti so v tem primeru neničelne.

Za konec določimo še napetosti, ki nastanejo v telesu kot posledica navadnega striga, določenega kot:

$$\begin{aligned} x' &= -\gamma \cdot z + x, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (45)$$

pri čemer γ označuje jakost strižne deformacije, $\gamma = \tan(\Theta'_{xz} - \pi/2)$, Θ'_{xz} pa kot, označen na spodnji skici.



Slika 7: Obravnavani tipi deformacij z označenimi komponentami tenzorja napetosti.

Fingerjev tenzor je sedaj

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (46)$$

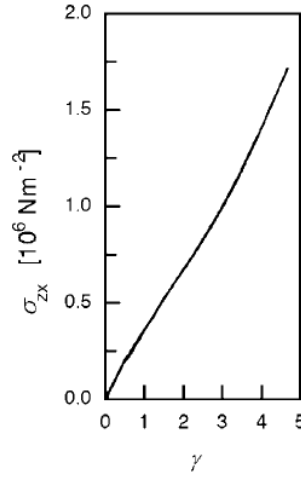
zveze med komponentami tenzorja napetosti pa

$$\sigma_{zx} = G\gamma \quad (47)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{zz} = G\gamma^2, \quad (48)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 0. \quad (49)$$

Vidimo, da je izvendiagonalna komponenta napetosti σ_{zx} premo sorazmerna s strižno deformacijo γ , ki je v splošnem neomejena. V pravkar obdelanem primeru navadnega striga je torej linearna zveza med omenjenima količinama zagotovljena za poljubno velike deformacije. Hkrati lahko sedaj z gotovostjo prepoznamo konstanto G ter jo utemeljeno poimenujemo strižni modul.



Slika 8: Eksperimentalno določena odvisnost izvendiagonalne komponente napetosti σ_{zx} od strižne deformacije. Linearna zveza sovpada z napovedjo enačbe (47).

Opazimo tudi, da imamo pri navadnem strigu opravka z dodatno neničelno razliko med ortogonalnima komponentama napetosti σ_{xx} in σ_{zz} , ki je kvadratna funkcija strižne deformacije γ in zato izkazuje nelinearno naravo. Omenjeni razliki pravimo primarna razlika napetosti, zvezi $\sigma_{yy} - \sigma_{zz}$ pa sekundarna razlika napetosti, ki je v primeru idealne gume enaka 0.

Poudariti je potrebno, da vse do sedaj izpeljane enačbe veljajo le za idealne gume (pri katerih zanemarimo energijski prispevek h gostoti proste energije). Čeprav z njimi lahko v splošnem razložimo najbolj tipične lastnosti naravnih gum, vseeno velikokrat predstavljajo pregrobo približke, zaradi česar bi želeli opisati tudi realne materiale. Slednje storimo tako, da rahlo modificiramo že obstoječo teorijo in nato rezultate primerjamo z eksperimentalnimi podatki. Začnemo z zapisom spremenjene enačbe za gostoto proste energije, ki ji dodamo še en člen sorazmeren z \mathbf{B}^{-1} . Najpreprostejša funkcija, ki zadošče omenjeni spremembi je:

$$f = \beta_1(I_B - 3) + \beta_2(II_B - 3), \quad (50)$$

kjer β_1 in β_2 označujeta konstanti

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial f}{\partial I_B}, \\ \beta_2 &= \frac{\partial f}{\partial II_B}. \end{aligned} \quad (51)$$

Tenzor napetosti je sedaj

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\beta_1\mathbf{B} - 2\beta_2\mathbf{B}^{-1}. \quad (52)$$

V primeru navadnega striga se komponente tenzorja napetosti ustrezno spremenijo in so tokrat malce kompleksnejše funkcije strižne deformacije:

$$\sigma_{zx} = 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma \quad (53)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{zz} = 2(\beta_1 + \beta_2)\gamma^2, \quad (54)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 2\beta_2\gamma^2. \quad (55)$$

Tudi tokrat je komponenta σ_{zx} linearno odvisna od strižne deformacije, primarna razlika napetosti pa je nelinearna. Bistvena sprememba, ki jo prinesejo zgornje enačbe je dodatna

neničelna sekundarna razlika napetosti, ki je (podobno kot primarna) kvadratna funkcija deformacije. Omenjeno razširitev je uvedel Melvin Mooney (1893-1968) in se z eksperimentalnimi podatki dobro ujema v režimu razširjanja, medtem ko pri skrčitvah odpove.

Danes seveda obstajajo različne izboljšave modela napetostnega odziva hiperelastičnih materialov, ki poskušajo čimbolj natančno opisati obnašanje realnih snovi. Modeli so matematično komplicirani in kaže, da realnih gum ne moremo opisati le s pomočjo modifikacije gostote proste energije idealne gume, ampak je potrebno celoten izračun začeti znova in opustiti marsikatero približke, ki smo jih sicer uporabili pri poenostavljeni izpeljavi.