

NAKLJUČNA HOJA PO WALL STREETU

Anže Koselj

Fakulteta za matematiko in fiziko
Jadranska 19, 1000 Ljubljana

Mentor: Prof. Dr. R. Podgornik

Marec 2002

Povzetek

Visokofrekvenčni podatki o finančnih časovnih vrstah vodijo k vedno globljemu razumevanju porazdelitve cen na trgu. Kar nekaj specifičnosti je, ki so dobro podprta z empiričnimi dejstvi. Tako imajo, npr., gostote verjetnostnih porazdelitev spremembe cene aktiv sledeče lastnosti: (i) Verjetnostne porazdelitve nikakor niso Gaussove in so v centralnem delu dobro aproksimirane z Levyjevo porazdelitvijo. (ii) Imajo dolge repe, toda v vseh redovih končne momente. (iii) So samopodobne na široki, a vendar končni, časovni skali. (iv) Medtem ko se avtokorelacijska funkcija spremembe cene razkroji v nič v manj kot 15 trgovalnih minutah, ima korelacija absolutne vrednosti ali kvadrata iste stohastične spremenljivke precej daljši spomin in kaže obnašanje, ki ga lahko opišemo s potenčnim zakonom.

Kazalo

1. Uvod	3
2. Orodja	3
2.1 Stabilne porazdelitve.	3
3. Modeliranje finančnega trga	5
3.1 Prirezan Levyjev let.	10
4. Korelacija v finančnih časovnih vrstah	12
4.1 Volatilitnost.	13
5. Zaključek	15

1. Uvod

Finančni trgi kažejo številne lastnosti značilne za kompleksne sisteme. Opravka imamo z odprtim sistemom v katerem veliko majhnih enot pod vplivom povratnih informacij interagira nelinearno. Časovna evolucija sistema je vestno zabeležena – vse do časovne skale nekaj sekund. Praktično vsaka transakcija na trgu je shranjena v enormno bazo podatkov, ki nudi izziv in priložnost raziskovalcem vedenja kompleksnih sistemov.

V pričujočem seminarju bomo uporabili koncepte statistične fizike za opis finančnih procesov. Naš namen je preučiti, kako se na finančnem trgu spreminjajo cene. Začeli bomo z razlago matematičnih orodij, ki jih bomo uporabili v kasnejših poglavjih, predstavili bomo modele s katerimi skušajo raziskovalci opisati dogajanje na trgu in se v zadnjem poglavju dotaknili še korelacije znotraj finančnih vrst. Uvedli bomo pojem volatilnosti, t.j. kvadrat ali absolutna vrednost spremembe cene v nekem časovnem okviru, in z njim pokazali nenaključnost oblikovanja cen.

2. Orodja

Poglejmo vsoto n neodvisnih identično porazdeljenih (i.i.d.) naključnih spremenljivk x_i ,

$$S_n \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (1)$$

Identično porazdeljene naključne spremenljivke $\{x_i\}$ karakterizirajo momenti $E\{x_i^n\}$, ki so neodvisni od i . Gostota verjetnostne porazdelitve (PDF) za S_n v splošnem ni Gaussova, z rastočim n pa se, po centralnem limitnem teoremu, njena oblika asimptotsko bliža Gaussovi. Hitrost konvergence je po Berry-Esseenovem teoremu določena s kvocientom tretjega momenta absolutne vrednosti in kuba standardne deviacije x_i . Podobno velja tudi za naključne spremenljivke, ki niso identično porazdeljene [1].

2.1. Stabilne porazdelitve

Poseben tip porazdelitev na katerega naletimo pri porazdelitvi vsote n i.i.d. naključnih spremenljivk, so stabilne porazdelitve. Njihova funkcionalna oblika za različne vrednosti n ostaja enaka.

Lorenzova in Gaussova porazdelitev sta stabilni porazdelitvi. Za prvo preverimo to s pomočjo karakteristične funkcije. PDF Lorenzove porazdelitve je

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2} \quad (2)$$

Karakteristična funkcija – Fourierova transformiranka verjetnostne gostote – zanjo je

$$\varphi(q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{iqx} dx = e^{-\gamma|q|} \quad (3)$$

Po konvolucijskem izreku je Fourierova transformiranka konvolucije funkcij enaka produktu Fourierovih transformirank teh funkcij. Karakteristična funkcija $\varphi_n(q)$ verjetnostne porazdelitve

$$P(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = P(x_1) \otimes P(x_2) \otimes \dots \otimes P(x_n) ; \quad x_1, x_2, \dots, x_n \text{ i.i.d} \quad (4)$$

je dana s

$$\varphi_n(q) = [\varphi(q)]^n \quad (5)$$

Za primer Lorenzove porazdelitve za dve spremenljivki izračunamo karakteristično funkcijo $\varphi_2(q) = e^{-2|q|^\gamma}$ in njej Fourierov obrat. PDF za dve spremenljivki

$$P(x_1 + x_2) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{4\gamma^2 + x^2} \quad (6)$$

ima enako funkcionalno obliko kot za eno samo (2), Lorenzova porazdelitev je torej stabilna. Karakterističnima funkcijama obeh omenjenih verjetnostnih porazdelitev je skupna oblika

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}; \quad (\alpha = 1 \text{ za Lorenzovo, } \alpha = 2 \text{ za Gaussovo porazdelitev)} \quad (7)$$

Levy in Khintchine [2] sta rešila problem splošne stabilne porazdelitve. Karakteristična funkcija take porazdelitve je oblike

$$\ln\varphi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{q}{|q|} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] & [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma|q| \left[1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln|q| \right] & [\alpha = 1] \end{cases} \quad (8)$$

kjer so $0 < \alpha \leq 2$, γ je pozitivni skalni faktor, $\mu \in \Re$ in β parameter asimetričnosti $\beta \in [-1,1]$. Analitična oblika Levijeve porazdelitve je znana le za nekaj vrednosti α in β :

$$\begin{aligned} \alpha = 1/2, \beta = 1 & \quad \text{Levy - Smirnov} \\ \alpha = 1, \beta = 0 & \quad \text{Lorenzova} \\ \alpha = 2 & \quad \text{Gaussova} \end{aligned} \quad (9)$$

Ukvarjali se bomo le s simetrično porazdelitvijo ($\beta = 0$) z ničelnim povprečjem ($\mu = 0$). Simetrična Levijeve verjetnostna porazdelitev P_L z indeksom α in skalnim faktorjem γ je

$$P_L(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qx) dq \quad (10)$$

razvito v vrsto za $|x| \gg 0$, $\gamma = 1$

$$P_L(|x|) \approx \frac{\Gamma(1 + \alpha) \sin(\pi\alpha / 2)}{\pi|x|^{1+\alpha}} \approx |x|^{-(1+\alpha)} \quad (11)$$

Asimptotično obnašanje za velike x je potenčno, kar ima hude posledice na momentih porazdelitve. $E\{x^n\}$ divergira za $n \geq \alpha$, ko je $\alpha < 2$. Nobena Levijeva porazdelitev z $\alpha < 2$ nima končne variance. Negaussove stabilne stohastične porazdelitve tako nimajo karakteristične skale – njihova varianca je neskončna!

Pokažimo še, da so te stabilne porazdelitve tudi samopodobne. Za reskaliranje verjetnostne porazdelitve se ozirimo k vrednosti v izhodišču

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-n\gamma|q|^\alpha} dq = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma n)^{1/\alpha}} \quad (12)$$

Porazdelitev $P(S_n)$ je pravilno reskalirana z

$$\tilde{P}(\tilde{S}_n) \equiv P(S_n)n^{1/\alpha} \quad (13)$$

pri čemer si normalizacijo zagotovimo z izbiro

$$\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n}{n^{1/\alpha}}. \quad (14)$$

3. Modeliranje finančnega trga

Statistične lastnosti časovnega razvoja cen igrajo ključno vlogo pri modeliranju finančnih trgov. Popoln opis stohastičnega procesa zahteva znanje o pogojni verjetnosti na vseh nivojih, kar pa je v realnosti seveda nemogoča zahteva. Fiziki se problema lotevajo v dveh korakih: raziskujejo časovne korelacije oz. spekter ter študirajo asimptotične verjetnostne porazdelitve.

Definirajmo $Y(t)$ kot ceno finančne aktive v trenutku t . S pojmom finančna aktiva zavzamemo vse, kar se prodaja na borzi (delnice posameznih podjetij, druge vrednostne papirje kot so npr. obveznice in blagovne opcije, tuje valute...) in vse celokupne indekse, ki so kakorkoli odraz dejavnost na trgu (indeks S&P 500 je prerez skozi 'delovanje' 500 najbolj reprezentativnih ameriških podjetij, v indeks DJIA so vključena podjetja t.i. stare ekonomije...). Edini pogoj, da aktiva sodi v našo obravnavo je, da je trgovanje z njo dovolj živahno, da je torej sploh smiselno govoriti o njeni statistiki v pravem pomenu te besede.

Stohastična spremenljivka, ki jo bomo raziskovali, je sprememba cene

$$Z_{\Delta t}(t) \equiv Y(t + \Delta t) - Y(t) \quad (15)$$

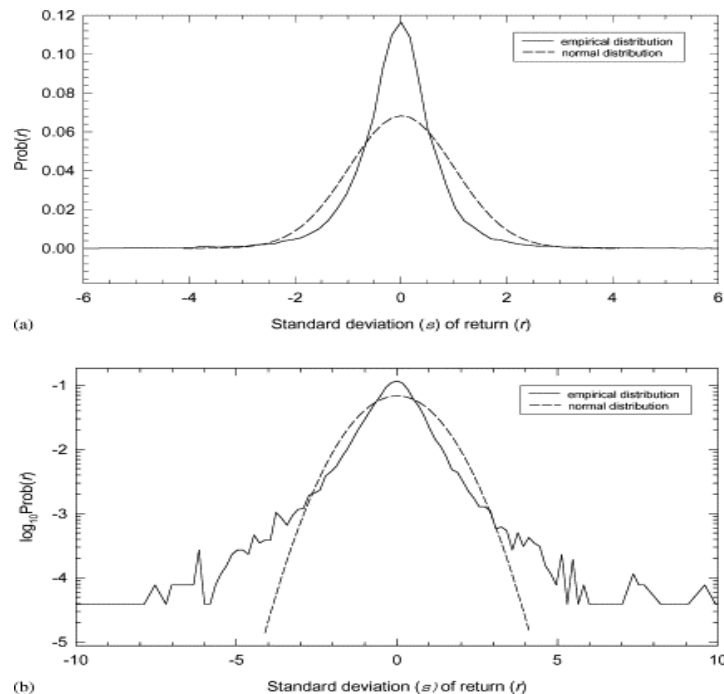
V literaturi pogosto kot stohastično spremenljivko obravnavajo spremembo logaritma cene. S tem je zagotovljena pozitivnost cene, za samo obravnavo pa izbira nima posledic. Tudi čas lahko definiramo na več načinov; kot fizikalni čas, kot trgovalni čas ali kot transakcijski čas. Fizikalni čas je dobro definiran, toda trgovanje na borzi poteka le kratek del dneva. Bolj smiselno je govoriti o trgovalnem času, t.j. času, ko je borza odprta, z nadaljevanjem ob naslednjem odprtju. V tretjem primeru vsaka transakcija hkrati pomeni tudi premik v času. V opisih je čas najpogosteje definiran kot trgovalni čas, med samimi definicijami časa pa, ob določenih privzetkih, ni bistvenih razlik.

Najosnovnejši, najpogostejši stohastični model dinamike cen predvideva, da je $\ln Y(t)$ difuzni proces pri katerem so spremembe $\ln Y(t)$ porazdeljene Gaussovo. Tako je k problemu prvi pristopil leta 1900 Louis Bachelier [3]. Predvideval je, da so spremembe cen neodvisne, identično porazdeljene Gaussove spremenljivke. Res, če obravnavamo vsako spremembo cene kot vsoto številnih majhnih naključnih prispevkov, ki jih povzročijo različni faktorji na trgu, nas centralni limitni teorem napelje na Gaussa kot prvega kandidata!

Ta model, znan kot geometrično Brownovo gibanje, je prvi približek obnašanja cen opaženega v empiričnem raziskovanju. Odstopanja, ki so znova in znova evidentirana na različnih trgih, so precejšnja, predvsem v področju, ki je trgovcem najbolj zanimiv, v repih porazdelitve. Empirične distribucije so precej bolj širokorepe kot predlagana Gaussova porazdelitev - imajo ožji in višji maksimum ter širše repe (Slika 1). Kvantitativno jih izmerimo s četrtilim momentom distribucije razlik cene, definirano z

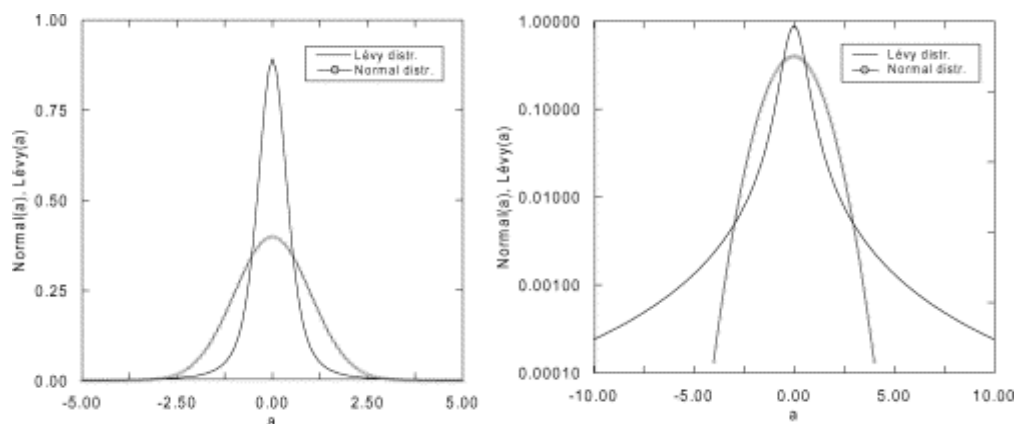
$$\varepsilon \equiv \frac{\overline{(\Delta_T Z - \Delta_T \bar{Z})^4}}{\sigma(T)^4} - 3 \quad (16)$$

Eksces je določen tako, da ima pri Gaussovi porazdelitvi vrednost nič. Pozitivna vrednost ε pomeni počasen asimptotičen razkroj PDF-ja. Vrednost ε sprememb cene izmerjena na trgu tujih valut ima tipične vrednosti okrog $\varepsilon \approx 60$, za indeks S&P 500 pa znaša $\varepsilon \approx 15$.



Slika 1: (a) Empirična porazdelitev spremembe cene r za Dow Jones Industrial Average (DJIA) med leti 1962 in 1993 v primerjavi z Gaussovo porazdelitvijo. (b) Ista porazdelitev v logaritmični skali, ki poudarja razliko v repih porazdelitve

Teoretiki so, upoštevajoč ugotovitve pridobljene z raziskovanjem, predlagali številne alternative modelu geometričnega Brownovega gibanja. Prvi tak model, ki upošteva leptokurtičnost empiričnih verjetnostnih porazdelitev, je leta 1963 predlagal Mandelbrot [4], ko je modeliral $\ln Y(t)$ cene bombaža kot stohastični proces z Levy-stabilnimi negaussovimi spremembami.

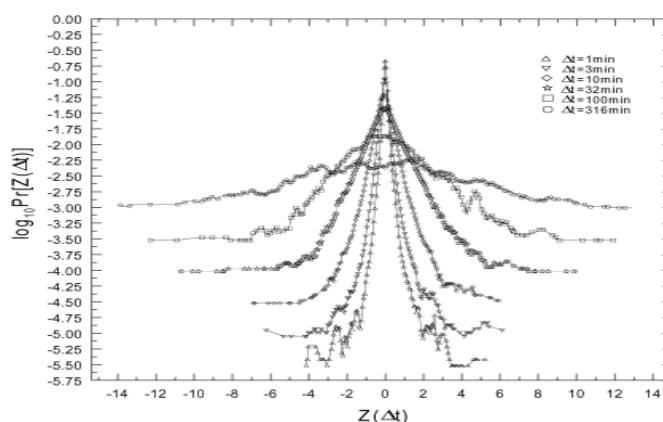


Slika 2: (a) Normalna porazdelitev z ničelno srednjo vrednostjo in standardno deviacijo enako 1 v primerjavi z Levyjevo porazdelitvijo z $\alpha = 1.428$. (b) Ista primerjava v logaritmični skali.

Njegovi najzanimivejši lastnosti sta seveda stabilnost (tudi samopodobnost) in neskončni drugi in višji momenti.

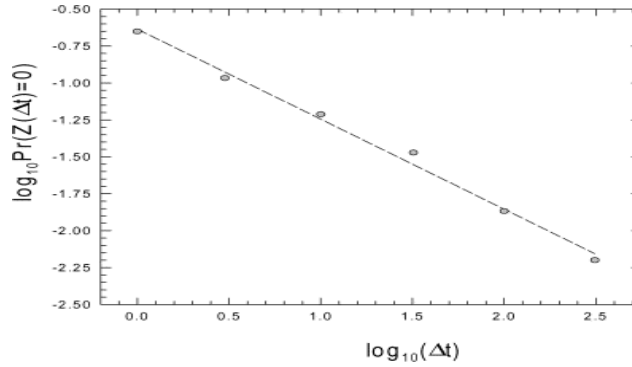
Za časovni interval segajoč tri velikostne stopnje se njegov model izredno dobro prilega dejanskim podatkom v centralnem delu porazdelitve, odpove pa v primeru najredkejših dogodkov.

Za kvalitativno karakterizacijo eksperimentalno opaženega procesa najprej določimo verjetnostno porazdelitev $P(Z)$ sprememb indeksa za različne vrednosti Δt . Vrednosti za Δt izberemo tako, da so logaritmično med sabo enako oddaljeni segajoč od 1 do 1000 minut.



Slika 3: Verjetnostna porazdelitev $P(Z_{\Delta t})$ indeksa OBX v časovnih intervalih Δt od 1 do 316 min. Z rastočim intervalom se verjetnostna porazdelitev širi.

Kot je pričakovano za naključni proces, so distribucije bolj ali manj simetrične in se širijo, ko večamo Δt (Slika 3). Opazimo tudi, da imajo precej širše repe kot bi bilo to pri normalnem procesu. Iskanje parametrov porazdelitve je zahtevno, če se poslužujemo metod, ki se osredotočajo na repe porazdelitve, saj večje vrednosti Δt pomenijo manjše število podatkov. Naš pristop je zato drugačen: raje študiramo verjetnost dogodkov v izhodišču $P(Z = 0)$ kot funkcijo Δt . S to izbiro proučujemo točko vsake porazdelitve, ki je najmanj prizadeta s šumom zaradi omejenosti naše baze podatkov (Slika 4)



Slika 4: Verjetnost dogodka v izhodišču $P(Z = 0)$ kot funkcija intervala Δt za indeks OBX.

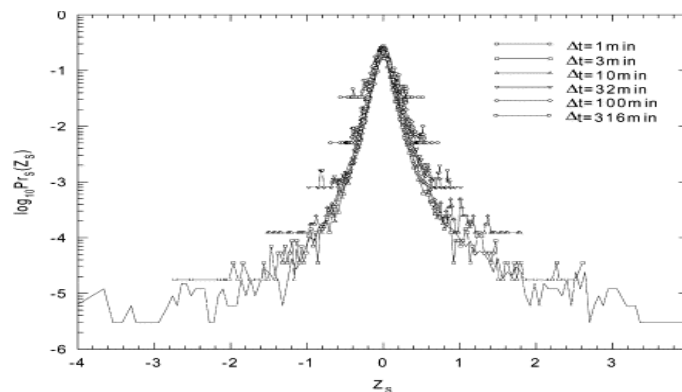
Podatkom se prilega premica s strmino -0.712 ± 0.025 . V območju trgovalnega časa od 1 do 1000 minut opazimo ne-normalno skalirno obnašanje (naklon $\neq -0.5$). Eksperimentalne ugotovitve se skladajo s teoretičnim modelom Levyjeve hoje oz. Levyjevega leta v osrednjem delu porazdelitve; dobro se ji prilega Levyjeva stabilna simetrično porazdelitev z indeksom α in skalnim faktorjem γ (10), ki ju moramo še določiti.

Preko podatka o naklonu grafa za verjetnost dogodka v izhodišču (12)

$$P(Z = 0) \equiv \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma\Delta t)^{1/\alpha}} \quad (17)$$

izračunamo vrednost indeksa α , $\alpha = 1.40 \pm 0.05$.

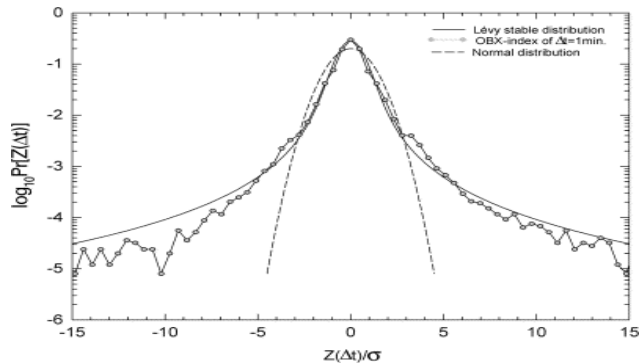
Poglejmo še, če se skaliranje razteza čez celotno verjetnostno porazdelitev. Levyjevo simetrično porazdelitev znamo reskalirati (13, 14)



Slika 5: Iste porazdelitve kot na Sliki 3 toda v skaliranih enotah. Porazdelitve se sesedejo v eno samo. Točke na črtah zunaj povprečnega obnašanja definirajo šum posamezne porazdelitve.

Vsi podatki se sesedejo na porazdelitev za $\Delta t = 1$ min. Sklepamo, da Levyjeva porazdelitev dobro opiše dinamiko porazdelitve $P(Z)$ naključnega procesa prek časovnega intervala dolžine vsaj treh velikostnih stopenj.

Primerjajmo Levyjevo porazdelitev z empirično porazdelitvijo spremembe cene (Slika 6). Polna črta ni samo fit podatkom, primerni skalirni faktor $\gamma = 0.00375$ smo dobili z uporabo eksperimentalnih vrednosti pri $P(Z = 0)$ in (17). Odlično prileganje Levyjevega profila na območju treh velikostnih redov opazimo za $|Z|/\sigma \geq 6$; tukaj je $\sigma = 0.0508$ standardna deviacija.

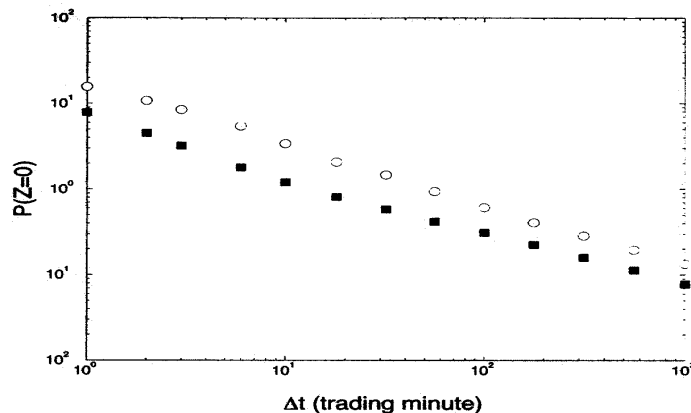


Slika 6: Primerjava $\Delta t = 1$ porazdelitve (indeks OBX) z Levyjevo stabilno porazdelitvijo. Normalna porazdelitev kaže zelo slabo ujemanje s podatki, posebno v repih.

Modelirana porazdelitev pa žal kaže očitna odstopanja repov od empirične porazdelitve. Levyjeva porazdelitev ima neskončen drugi moment, če je $\alpha < 2$ (11), toda eksponentno padanje naše eksperimentalne porazdelitve implicira končen drugi moment. Varianca empiričnih podatkov preverjeno konvergira h končni vrednosti. Kako torej zaobiti problem končne variance, če naj bi za opis porazdelitve sprememb cene uporabljali Levyjevo porazdelitev?

Levyjevo skaliranje na široki časovni skali, ki smo ga pokazali (Slika 4, Slika 5), se zdi v nasprotju s končno varianco, toda najnovejše študije dokazujejo [5], da je Levyjevo skaliranje dobro na daljših časovnih intervalih tudi za dinamiko "kvazi-stabilnih" stohastičnih procesov s končno varianco. Končna varianca pomeni, da je skaliranje približno in velja le na končnem časovnem intervalu. Za daljše časovne intervale se mora skaliranje skaziti. Poglejmo verjetnost dogodkov v izhodišču $P(Z=0)$ za visokofrekvenčne podatke indeksa S&P 500 skupaj s $P_G(Z=0)$, P_G kot Gaussova porazdelitev, verjetnostjo za dogodek v izhodišču za proces, ki bi bil Gaussov.

Empirične vrednosti variance izmerjene za vsako vrednost Δt uporabimo za izračun $P_G(0)$. Razlika med verjetnostma pri vsakem Δt je merilo za ne-normalnost verjetnostne porazdelitve. Opazno je, da razlika verjetnosti v izhodišču sistematično pada za $30 < \Delta t < 1000$ minut (Slika 7). Z ekstrapolacijo skalirnega obnašanja $P(0)$ in $P_G(0)$ ocenimo, da se zlom negaussovega skaliranja zgodi pri približno 10^4 trgovalnih minutah. Zaključimo lahko, da je negaussovo skaliranje opaženo na časovnem intervalu, ki je sicer velik, ne pa neskončen, segajoč od 1 pa do 10^4 trgovalnih minut.



Slika 7: Verjetnost dogodka v izhodišču za visokofrekvenčne podatke S&P 500 (krogci) skupaj z verjetnostjo, če bi bil proces Gaussov (kvadratki) z varianco ocenjeno iz merjenj za vsak Δt .

3.1 Prirezan Levyjev let

Stohastični proces s končno varianco, ki upošteva skalne relacije na velikem, a končnem intervalu, je prirezano Levyjevo gibanje, TLF, definirano z

$$P(x) \equiv \begin{cases} 0 & x > l \\ cP_L(x) & -l \leq x \leq l \\ 0 & x < -l \end{cases} \quad (18)$$

$P_L(x)$ je simetrična Levyjeva porazdelitev z indeksom α in skalnim faktorjem γ , c je normalizacijska konstanta. TLF ni stabilen stohastični proces, dokazali smo namreč, da so stabilne le Levyjeve porazdelitve. Ima pa končno varianco in skonstruira h Gaussovi porazdelitvi. Porazdelitev $P(S_n)$ se dobro prilega $P_L(x)$ v limiti $n \rightarrow 1$, za limito $n \rightarrow \infty$ pa je $P(S_n) = P_G(S_n)$ (Slika 8a). Obstaja mejna vrednost n , n_x , da je

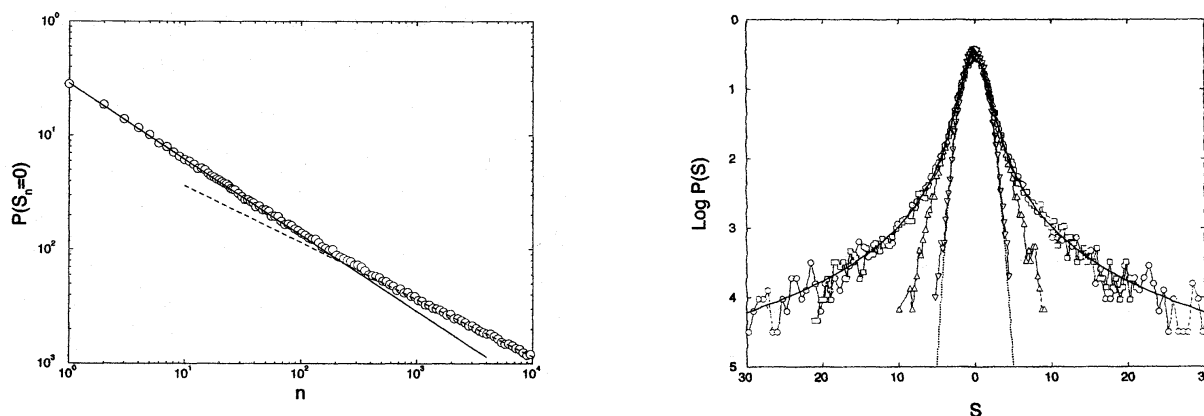
$$P(S_n) \approx \begin{cases} P_L(S_n) & n \ll n_x \\ P_G(S_n) & n \gg n_x \end{cases} \quad (19)$$

n_x je dan z $n_x \approx Al^\alpha$, kjer je za $\gamma = 1$

$$A = \left[\frac{\pi\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)[\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)/(2-\alpha)]^{1/2}} \right]^{2\alpha/(\alpha-2)} \quad (20)$$

Zanimivo je opazovati konvergenco procesa TLF k njegovi asimptoti, Gaussu, z rastočim n . Pri parametrih $\alpha = 1.5$ in $l = 100$ simulacija pokaže, da je mejni $n_x \approx 260$.

Pri enakih parametrih narišimo porazdelitev $P(S_n)$ za različne vrednosti n , vselej primerno skalirano, da si olajšamo primerjavo. Oblika TLF porazdelitve se očitno spreminja z n -jem. Za majhne vrednosti n ($n = 1, 10$) se njena oblika ujema z Levyjevo, za velike n ($n = 1000$) pa se bliža Gaussu.



Slika 8: (a) Verjetnost v izhodišču kot funkcija n za $\alpha = 1.5$ in $l = 100$. Levyjev režim je prikazan s polno črto, Gaussov pa s črtkano. Krogci predstavljajo simulacijo s $5 \cdot 10^4$ realizacijami. (b) TLF proces z enakimi kontrolnimi

parametri za $n = 1, 10, 100$ in 1000 . Za majhne n (1(krogci), 10 (kvadratki)) je centralni del porazdelitve dobro opisan z Levyjevo porazdelitvijo (polna črta), za večje vrednosti n (1000 (obrnjeni trikotniki)) pa je proces že skoraj Gaussov (črtkana črta).

Posledice brutalnega rezanja porazdelitve se žal odražajo tako, da ne poznamo analitičnega izraza za karakteristično funkcijo, računalniške simulacije procesa s tako definirano porazdelitvijo pa zahtevajo precej napora.

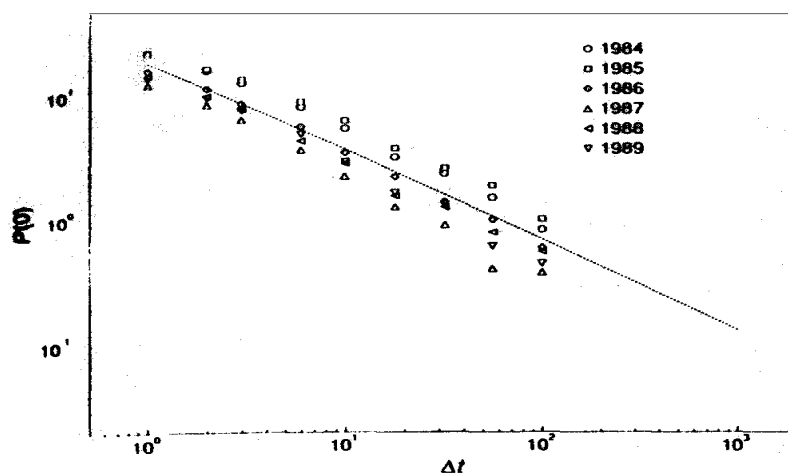
EkspONENTNO odrezano Levyjevo gibanje, ETLF, kjer porazdelitev pri neki meji namesto skokoma eksponentno pošljemo proti ničli, je za simulacije precej primernejše in enostavnejše, poleg tega pa poznamo tudi analitičen zapis njegove karakteristične funkcije

$$\ln \varphi(q) = c_0 - c_1 \frac{(q^2 + 1/l^2)^{\alpha/2}}{\cos(\pi\alpha/2)} \cos[\alpha \arctg(l|q|)] \quad (21)$$

$$c_0 \equiv \frac{l^{-\alpha}}{\cos(\pi\alpha/2)}; \quad c_1 \text{ je skalni faktor} \quad (22)$$

Drugačen način rezanja ne vpliva na konvergenco ETLF h Gaussu.

Raziskava skalirnih lastnosti $P(Z=0)$ v različnih časovnih obdobjih nam pove, kako se obnašata indeks α in skalni faktor γ (Slika 9). Očitno je, da so grafi $P(Z=0)$ za različna leta vzporedni, poleg tega pa so vzporedni tudi grafu za celoten obseg podatkov, kar kaže, da je v grobem indeks α čez leta konstanten. Faktor γ s katerim je povezana vertikalna pozicija grafa, kaže večje fluktuacije. Večji je za obdobja, ko je trg bolj dejaven.



Slika 9: Verjetnost za dogodek v izhodišču indeksa S&P 500 za različna leta. Opaziti je enako skalno vedenje za vsa leta, skalni faktor γ pa kaže večje fluktuacije.

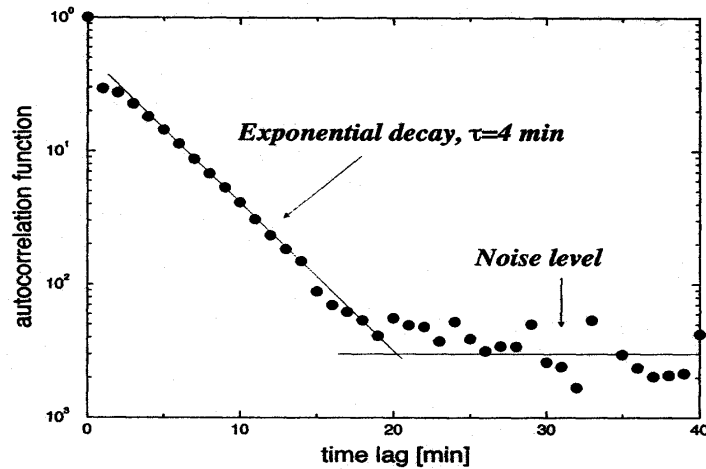
Časovna neodvisnost kontrolnih parametrov TLF-ja, α , γ in l , je glavni pomislek tega modela. TLF model dobro opiše asimptotične porazdelitve sprememb cene merjenih na različnih časovnih skalah, ne omogoča pa pravilnega opisa časovne odvisnosti volatilitosti - dejavnosti - opažene na realnem trgu.

4. Korelacija v finančnih časovnih vrstah

Znano dejstvo je, da gibanja cen na trgu ne posedujejo omembe vredne avtokorelacije [6, 7]. Avtokorelacijska funkcija sprememb cene

$$R(T) \equiv \frac{\overline{\delta y_t \delta y_{t+T}} - \overline{\delta y_t} \overline{\delta y_{t+T}}}{\text{var}(\delta y_t)} \quad (23)$$

se razkroji v nič v nekaj minutah: za $T \geq 15$ min jo lahko mirno enačimo z nič.



Slika 10: Avtokorelacijska funkcija za S&P 500, beležena na minutni skali. Funkcija se razkroja eksponentno s karakterističnim časom $\tau \approx 4$ min .

Odsotnost zaznavnejše korelacije v spremembah cene je velikokrat dokumentirana in običajno citirana kot 'Teorija učinkovitega trga'[6].

Fenomen je intuitivno lahko razložljiv; če bi spremembe cene posedovale občutno korelacijo, bi jo lahko izkoristili v preprosti strategiji, s katero bi dosegali pozitivne rezultate, se pravi zasluzke. Take strategije pa bi tako reducirale korelacije, razen morda na kratek rok, to je čas, ki je potreben, da informacije učinkujejo na trgu. Z gornje slike (Slika 10) je razvidno, da se avtokorelacijska funkcija spremembe cene eksponentno razkroji z relaksacijskim časom $\tau \approx 4$ min .Ta čas je bolj kot ne univerzalen in je povezan z možnostmi informacijske tehnologije. Po teh štirih minutah o informaciji, ki je vplivala na spremembo vrednosti aktive, že vsi vedo in na njen račun zasluzki niso več možni.

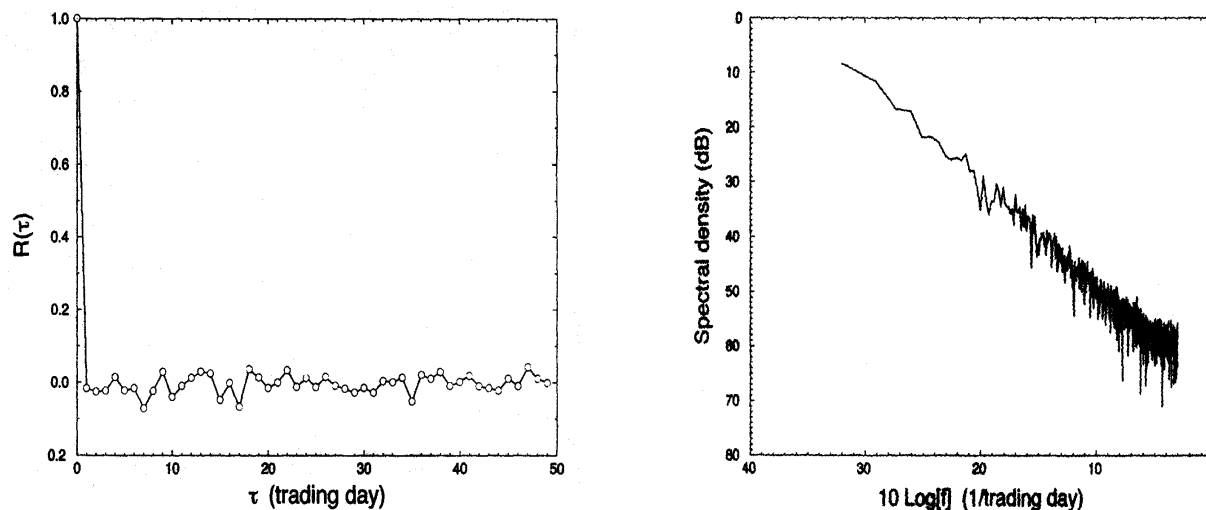
Statistične lastnosti lahko obravnavamo tudi v prostoru frekvenc. Spektralna gostota časovne vrste je dana kot Fourierova transformiranka njene avtokorelacijske funkcije

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(T) e^{-i2\pi f T} dT \quad (24)$$

Za posamezno delnico ugotovimo, da je spektralna gostota logaritma cene dobro opisana z

$$S(f) \approx \frac{1}{f^2} \quad (25)$$

kar je tudi spektralna gostota naključne hoje.



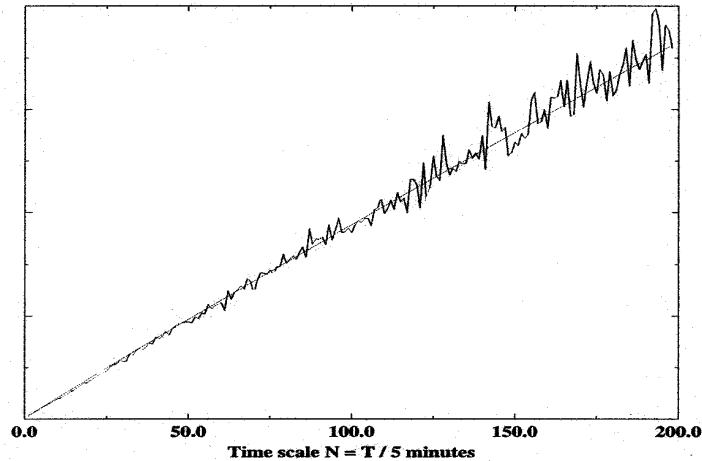
Slika 11: (a) Avtokorelacijska funkcija spremembe logaritma cene za Coca-Colo od 7/89 do 10/95. (b) Spektralna gostota za isto delnico je dobro aproksimirana z $S(f) = 1/f^2$.

Hiter razkroj avtokorelacijske funkcije implicira aditivnost varianc: vemo, da je za nepovezane spremenljivke varianca vsote enaka vsoti njihovih varianc. Odsotnost linearne korelacije je tako konsistentna z linearno rastjo variance glede na časovno skalo kot kaže (Slika 12).

4.1 Volatilnost

Avtokorelacijska funkcija spremembe cene se eksponentno razkroji z majhnim karakterističnim časom nekaj trgovalnih minut. Toda odsotnost zaznavnejše avtokorelacije še ne pomeni, da so spremembe cene neodvisne naključne spremenljivke. Številne študije so pokazale, da imajo avtokorelacijske funkcije nelinearnih funkcij kot so absolutna vrednost ali kvadrat vrednosti daljši spomin. To nas navede na misel, da poleg samih sprememb cen obstaja še en stohastični proces – volatilnost. Volatilnost je najpogosteje ocenjena kot standardna deviacija ali kot absolutna vrednost spremembe cene v ustreznem časovnem okviru in je merilo, kako verjetno je, da bo naša stohastična spremenljivka doživela fluktuacijo. Dober razlog za obravnavo statističnih lastnosti volatilnosti je gotovo ta, da volatilnost direktno lahko povežemo s količino informacije, ki prispe na trg v določenem času. Na veliko količino informacij se trgovci navadno burno odzovejo, količina zamenjanih delnic je velika, in volatilnost v splošnem velika. Poleg tega je iz praktičnega vidika volatilnost ključni parameter za mero tveganja finančne investicije.

Spektralna gostota in avtokorelacijska funkcija spremembe cene sta statistični orodji, ki nista posebno občutljivi na korelacije daljšega dosega. Test, ki je uspešnejši za odkrivanje prisotnosti korelacije daljšega dosega, temelji na opazovanju časovnega razvoja standardne deviacije $\sigma(t)$ spremembe cene. V splošnem je $\sigma(t) \propto t^v$, kjer je $v = 1/2$ za neodvisne spremembe. Empirične raziskave so pokazale, da je vrednost koeficienta v specifična za vsak trg posebej (NYCI ≈ 0.52 , DAX ≈ 0.53 , MIB ≈ 0.57) je pa vedno rahlo večja od 0.5, kar kaže na rahlo korelacijo daljšega dosega.

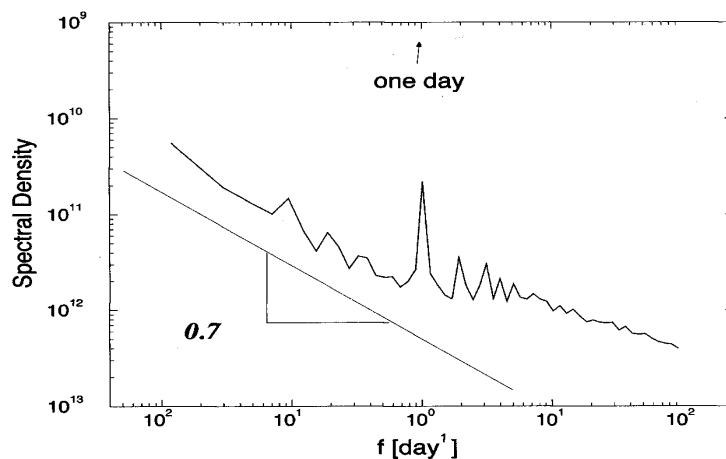


Slika 12: Skalirno obnašanje variance spremembe cene: varianca raste približno linearno s časom. Indeks S&P 500.

S proučevanje visokofrekvenčnih podatkov indeksa S&P 500 so ugotovili, da ima $\sigma(t)$ dva režima. Za kratke čase ($t < 30$ trgovalnih minut) je obnašanje superdifuzno ($\nu > 0.5$) z $\nu \approx 0.8$, dolgočasovni režim pa je blizu difuznemu ($\nu = 0.5$).

Pojav lahko povežemo s "kopičenjem volatilitosti", dejstvom znanim iz finančne literature: velikim gibanjem v ceni sledijo še druge velike fluktuacije, ki pa niso obvezno v isti smeri.

Seveda podobno analizo lahko naredimo tudi v frekvenčnem prostoru. (Slika 13) kaže spekter, ki se obnaša kot $1/f^\eta$ z $\eta \approx 0.7$ in torej potrjuje prisotnost daljšega spomina v časovni vrsti volatilitosti. O karakterističnem razpadnem času je v tem primeru težko govoriti. Obnašanje avtokorelacijske funkcije volatilitosti namreč najbolje opišemo s potenčnim zakonom in funkcija ostane pozitivna in različna od nič več let. Relevanten podatek je le eksponent α , ki je enak $\eta = 1 - \alpha$, $\alpha \approx 0.3$.



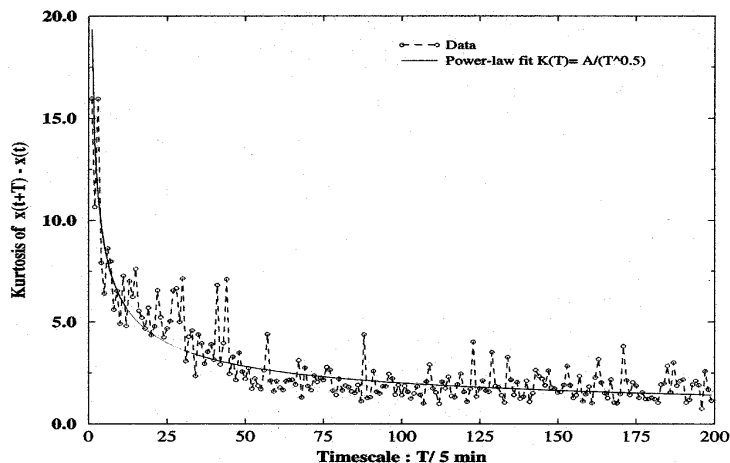
Slika 13: Spekter volatilitosti visokofrekvenčnih podatkov S&P 500 za čas od 1984 do 1996. Oster vrh opažen pri frekvenci 1/dan je povezan s fluktuacijami volatilitosti znotraj enega dne.

Poudariti je treba, da obstoj korelacije v volatilitosti ne nasprotuje opažanjem medsebojne neodvisnosti spremembe cene, saj avtokorelacijski funkciji spremembe cene in volatilitosti zavisita od različnih redov pogojnih verjetnostnih gostot.

Zanimivo je pogledati še obnašanje četrtega momenta porazdelitve $P(Z)$. V primeru i.i.d. sprememb četrti moment z rastočim n pada kot $1/n$, v našem primeru spremembe cen pa se razkroja precej počasneje (Slika 14). Obnašanje opišemo z

$$\kappa(n\tau) \propto \kappa(\tau) / n^\xi \quad (26)$$

s $\xi \approx 0.5$. Prehod $P_L(Z)$ na večji časovni skali h Gaussovi porazdelitvi $P_G(Z)$ je torej konsistentna z dejstvom, da eksces leze k ničli, ko n oz. $\Delta t \rightarrow \infty$.



Slika 14: Skalirno obnašanje ekscesa spremembe cene. Padanje opiše potenčni zakon z eksponentom 0.5. Indeks S&P 500.

Izračunali bi lahko tudi višje momente porazdelitve in preverili njihovo obnašanje, toda napaka takih izračunov z rastočim redom momentov močno naraste.

5. Zaključek

V seminarju smo ugotovili, da imajo porazdelitve spremembe cene aktiv na finančnem trgu širše repe kot jim jih napoveduje Gaussova porazdelitev. Njihovo porazdelitev v centralnem delu dobro opisuje simetrična Levyjeva stabilna porazdelitev indeksa α in skalnega faktorja γ , katere repi pa precenjujejo verjetnost ekstremnih dogodkov. Znano je, da ima empirična porazdelitev spremembe cene končne momente in to je tudi drugi veliki manko Levyjeve porazdelitve – njeni momenti so namreč neskončni. K temu problemu ustrezno pristopimo s prirezano Levyjevo porazdelitvijo, ki pa ima, kot je opisano v razdelku 3.1, žal tudi nekaj pomankljivosti. Preverili smo tudi korelacijske funkcije finančnih časovnih vrst. Avtokorelacijska funkcija spremembe cene se razkroji v nič eksponentno s karakterističnim časom 5 min kar nas navaja na neodvisnost spremenljivk, avtokorelacijska funkcija kvadrata spremembe cene – t.i. volatilitnost, pa kaže precej večjo vztrajnost. Pozitivna in od nič različna ostane v zelo dolgem časovnem obdobju.

Reference

- [1] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2, Second edition (J. Wiley & Sons, New York, (1971)
- [2] A. Ya. Khintchine, P. Levy, ' Sur les loi stables' , C. R. Acad. Sci. Paris 202, 373-376 (1936)
- [3] L. Bechelier, ' Theorie de la speculation' [Ph.D. thesis in mathematics], Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Superieure III 7, 21-86, (1900)
- [4] B. B. Mandelbrot, ' The Variation of Certain Speculative Prices' , J. Business 36, 394-419 (1963)
- [5] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, ' Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: the Truncated Levy Flight' , Phys. Rev. Lett. 73, 2946-2949 (1994)
- [6] E. F. Fama, ' Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work' , Journal of Finance 25, 383-417 (1970)
- [7] A. Pagan, ' The Econometrics of Financial Markets' , Journal of Empirical Finance 3, 150-182 (1996)
- [8] R. N. Mantegna, H. E. Stanley , An Introduction to Econophysics, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)
- [9] P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral, V. Plerou, H. E. Stanley, ' Scaling and Volatility Correlations in the Stock Market' , CondMat. preprint server 9905306
- [10] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, ' Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index' . Nature 376, 46-49 (1995)
- [11] R. Cont, M. Potters, J.-P. Bouchaud, ' Scaling in Stock Market Data: Stable Laws and Beyond' , in *Scale Invariance and Beyond* (Springer, Berlin, 1997)
- [12] R. Cont, ' Scaling and Correlation in Financial Data' , CondMat. preprint server 9705075
- [13] I. Koponen, ' Analytic Approache to the Problem of Convergence of Truncated Levy Flights towards the Gaussian Stochastic Process' , PhysRev E 52, 1197-1199 (1995)
- [14] R. N. Mantegna, ' Levy Walks and Enhanced Diffusion in Milan Stock Exchange' , Physica A 179, 232-242 (1991)
- [15] R. N. Mantegna, H. E. Stanley, ' Turbulence and Financial Markets' , Nature 383, 587-588 (1996)
- [16] L. C. Miranda, R. Riera, ' Truncated Levy Walks and an Emerging Market Economic Index' , Physica A 297, 509-520, (2001)
- [17] P. Gopikrishnan, V. Plerou, Y. Liu, L. A. N. Amarla, X. Gabaix, H. E. Stanley, ' Scaling and Correlatation in Financial Time Series' , PhysicaA 287, 362-373, (2000)

[18] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L. A. N. Amaral, M. Meyer, H. E. Stanley, ' Scaling of the Distribution of Price Fluctuations of Individual Companies' , CondMat. preprint server 9907161