

**Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za fiziko**

**Seminar**

# **TURBULENCA**

Jurij SODJA

Mentor: prof. Rudolf PODGORNIK

Ljubljana, marec 2007

## **POVZETEK**

Turbulenca je danes navkljub številnim naporom še vedno eno največjih nerešenih vprašanj klasične fizike. Pravilno razumevanje turbulentnih pojavov ni le akademska kaprica, temveč je tudi nuja za uspešen razvoj in optimizacijo številnih aplikacij. Namen seminarja je zato predstaviti pomembne dosežke na področju razumevanja turbulenc v dvo- in tridimenzionalnem prostoru.

V uvodnem poglavju je podana osnovna tematika, na kateri sloni nadaljnja razprava o turbulentnih tokovih. Na kratko je predstavljena analiza turbulence na osnovi analize Navier-Stokesove enačbe. Predstavljeni so tudi glavni rezultati Kolmogorove teorije o turbulencah

V drugem poglavju je predstavljena obravnava posebnega primera dvodimenzionalnih vrtinčnih tokov, v katerem je vrtinčnost skoncentrirana le v posameznih, izoliranih točkah.

V tretjem poglavju seminar obravnava fizikalni model turbulentnih tokov v treh dimenzijah, ki bazira na analogijah s proteinskimi sistemi.

Na koncu sledi še zaključek.

**KAZALO**

1	UVOD .....	4
1.1	Turbulenca in Kolmogorov zakon .....	4
1.2	Konvergentna evolucija .....	7
2	DVODIMENZIONALNA VRTINČNOST .....	8
2.1	Sistem dvodimenzionalnih vrtincev .....	8
2.1.1	Sistem vrtincev je Hamiltonski sistem .....	9
3	SAW TURBULENTNI MODEL .....	11
3.1	Proteini .....	11
3.1.1	Energijska bilanca proteinske klopke .....	11
3.1.2	Korelacijska funkcija proteinske klopke .....	14
3.2	Vrtinčni model .....	15
3.3	Problem disipacije energije .....	17
4	ZAKLJUČEK .....	18
5	LITERATURA .....	19

## 1 UVOD

### 1.1 Turbulenca in Kolmogorov zakon

O turbulenci lahko marsikaj izvemo že z analizo Navier-Stokesove enačbe. Navier-Stokesova enačba se glasi (1.1):

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \quad (1.1)$$

Privzamemo, da je obravnavana tekočina nestisljiva in brez izvorov gibanja. Potem veljata še naslednji zvezi (1.2):

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{f} = 0 \quad (1.2)$$

V enačbi (1.1) nastopajoče količine razvijemo po ravnih valovih v  $\vec{k}$ -prostoru. Na enačbi (1.2) delujemo s Fourierovo transformacijo. Transformirani enačbi upoštevamo skupaj s predelano Navier-Stokesovo enačbo in dobimo naslednjo enačbo (po komponentah)(1.3):

$$\rho \frac{\partial v_j(\vec{k}, t)}{\partial t} = -\eta k^2 v_j(\vec{k}, t) - i\rho \sum_{\vec{k}'} \left( \delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right) v_l(\vec{k}', t) \left( k'_n v_n(\vec{k} - \vec{k}', t) + f_j(\vec{k}, t) \right) \quad (1.3)$$

Prvi člen na desni strani gornje enačbe predstavlja disipacijski člen.  $k^2$  lahko zapišemo tudi drugače:  $k^2 = 4\pi^2/\lambda$ .  $\lambda$  predstavlja tako imenovano velikostno skalo hitrosti. Opazimo, da je viskozna disipacija energije na velikih skalah zanemarljiva, saj pada sorazmerno z  $1/\lambda^2$ .

Tretji člen na desni strani enačbe (1.3) predstavlja gonilni člen, saj opisuje vpliv zunanjih sil, na časovno spreminjanje hitrostnega polja v tekočini.

Drugi člen na desni strani izraza (1.3) sklaplja med seboj različne velikostne skale. Če z gonilnim členom ustvarimo vrtinec na skali  $\vec{k}$ , bo ta člen proizvedel komponente hitrosti še na vseh ostalih velikostnih skalah.



Slika 1.1: Primer različnih dolžinskih skal v turbulentnem toku

Glede na to, kateri člen dominira na določeni velikostni skali, velikostne skale lahko razdelimo v tri skupine: zunanja, disipacijska in inercialna skala. Na zunanji skali prevladuje gonilni člen. Na tej skali turbulentni tok prejema energijo iz okolice. Disipacijsko skalo določa disipativni člen Navier-Stokesove enačbe. Na tej skali prevladuje viskozna disipacija energije. Inercialno skalo pa definira sklopitveni člen prej omenjene enačbe. Na inercialni skali sistem ne izmenjuje energije z okolico. Energija se samo pretaka iz zunanje skale na disipacijsko skalo. Tak način prenašanja energije imenujemo tudi energijska kaskada.

Kolmogorov se je pri izpeljavi svoje teorije močno opiral na zgoraj opisani model energijske kaskade ter na dimenzijsko analizo. Ukvarjal se je predvsem z inercialno in disipacijsko skalo.

Za energijski spekter na inercialni skali je Kolmogorov predpostavil, da je ta odvisen le od valovnega števila  $\vec{k}$  in od hitrosti disipacije energije  $\varepsilon \propto d\langle v^2 \rangle / dt$ . Z dimenzijsko analizo ugotovimo, da je edina dimenzijsko pravilna kombinacija za energijski spekter sledeča (1.4):

$$E(\bar{k}) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (1.4)$$

kjer  $C$  predstavlja brezdimenzijsko konstanto. Enačba (1.4) predstavlja enega od pomembnih rezultatov Kolmogorove teorije. Gornja enačba je neodvisna od enačb gibanja - Navier-Stokesove enačbe. Njena veljavnost je dobro potrjena skozi poskuse in numerične simulacije.

Drug pomemben rezultat Kolmogorove analize je »strukturna funkcija drugega reda«. Strukturna funkcija meri povprečno amplitudo spremembe hitrosti tekočine med dvema točkama, ki sta med seboj oddaljeni za  $\vec{r}$  (1.5):

$$\left\langle \left( v(\vec{x} + \vec{r}) - v(\vec{x}) \right)^2 \right\rangle = D \varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad (1.5)$$

kjer je  $D$  ponovno brezdimenzijska konstanta. Pojav strukturne funkcije v turbulentnem toku si lahko razlagamo z opažanjem, da ima turbulentni tok na vsaki skali vedno še neko dodatno notranje gibanje tekočine. Na primer: veliki vrtinci so sestavljeni iz množice majhnih. Tudi enačbo (1.5) je možno izpeljati zgolj z dimenzijsko analizo.

Na disipacijski skali pa je najpomembnejši dosežek Kolmogorova povezava med velikostjo zunanje skale ter velikostjo disipacijske skale (1.6):

$$\frac{\lambda_{dis}}{\lambda_{zun}} \propto \text{Re}^{-3/4}, \quad (1.6)$$

Kjer  $\text{Re}$  predstavlja Reynoldsovo število na zunanji skali.

Dosedanje teoretsko in eksperimentalno raziskovanje turbulence kaže na to, da so rezultati Kolmogorovega sicer pravilni, predpostavke in fizikalna slika na katere se je pri izpeljavi opiral Kolmogorov pa žal ne!

## 1.2 Konvergentna evolucija

Konvergentna evolucija je lastnost dinamičnih sistemov, da dosežejo enako stacionarno stanje neodvisno od začetnih pogojev. Konvergentna evolucija je splošen fenomen v disipativnih stohastičnih pojavih, kamor spada tudi turbulenca.

Na tem mestu je potrebno poudariti, da konvergentna evolucija ne velja za vse velikostne skale, ki sestavljajo turbulentni tok. Dogajanje na večjih velikostnih skalah se močno razlikuje od primera do primera, saj je pogojeno s silami ter začetnimi in robnimi pogoji, ki delujejo na tekočino. Na manjših velikostnih skalah pa opazimo lastnosti, ki so skupne vsem turbulentnim tokovom, ne glede na to, kaj se dogaja na makroskopski skali. Razumevanje teh lastnosti zato močno pripomore k splošnemu razumevanju turbulenc.

Konvergentno evolucijo opazimo pri pojavih – sistemih, ki zadostijo dvema predpostavkama: predpostavki o univerzalnem ravnovesju ter predpostavki o neodvisnosti asimptotskega stanja od narave problema.

Predpostavka o univerzalnem ravnovesju zahteva predvsem, da je odziv sistema bistveno hitrejši od sprememb pogojev v katerih se opazovani sistem nahaja. Od tod takoj sledi, zakaj lahko opazujemo konvergentno evolucijo samo na zadosti majhnih velikostnih skalah. Odzivni čas »makroskopskih« tokov na spremembe v okolici je enostavno prepočasen. Zato je dogajanje na teh velikostnih skalah pogojeno s spremembami v okolici. Odzivni čas »mikroskopskih« tokov pa je zadosti hiter, da spreminjanje zunanjih pogojev na dogajanje na teh velikostnih skalah nima bistvenega vpliva. Turbulenca na mikroskopski skali zato lahko doseže neko asimptotsko stanje.

Na »mikroskopski« skali bi turbulenca v različnih pogojih načeloma lahko zavzela različna asimptotska stanja. Zato je nujno, da sistem zadosti tudi drugi predpostavki, ki zahteva neodvisnosti asimptotskega stanja od narave problema. Ta predpostavka dejansko zahteva, da je dogajanje na mikroskopskih skalah neodvisno od dogajanja na makroskopskih skalah. Ta zahteva se zdi v nasprotju z močno medsebojno sklopitvijo posameznih velikostnih skal, ki omogoča prenos energije po velikostni kaskadi navzdol.

Izkaže se, da se omenjeni zahtevi v primeru tridimenzionalnega turbulentnega toka ne izključujeta.

## 2 DVODIMENZIONALNA VRTINČNOST

### 2.1 Sistem dvodimenzionalnih vrtincev

Kadar je v dvodimenzionalnem toku prisotna vrtinčnost omejena na posamezne izolirane točke, lahko tak tok obravnavamo kot potencialni. Vpeljemo ustrezne kompleksne vrednosti. Koordinate nadomestimo s kompleksno spremenljivko  $z = x + iy$ , vpeljemo kompleksen hitrostni potencial  $w(z) = \phi + i\psi$  ter kompleksno hitrost  $v(z) = \partial w / \partial z = v_x - iv_y$ .  $\phi$  in  $\psi$  sta prvotni hitrostni potencial in tokovna funkcija.

Vrtince opišemo s Helmholtzevim modelom za točkast vrtinec (2.1):

$$\vec{v} = \left( v_r = 0, v_\phi = \frac{\Gamma}{2r}, v_z = 0 \right) \quad (2.1)$$

S pomočjo izraza (2.1) lahko uganemo ustrezen kompleksni hitrostni potencial (2.2):

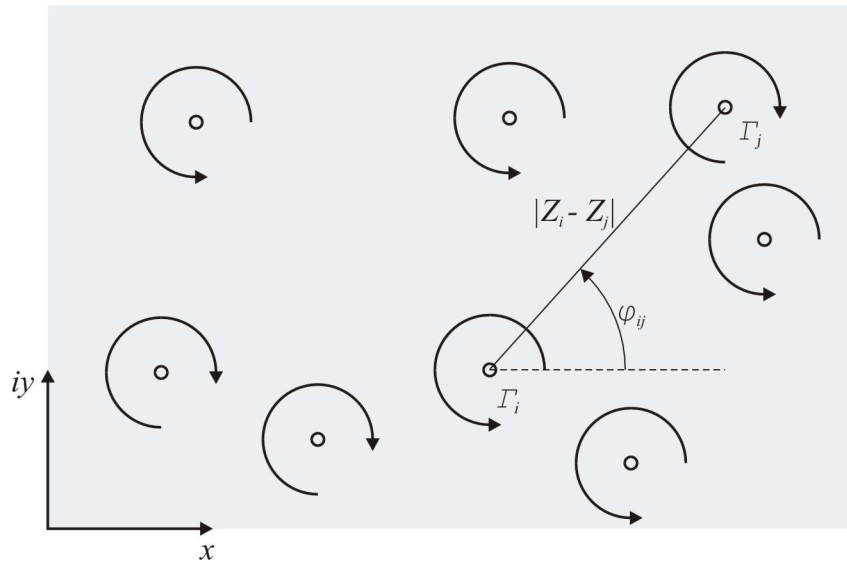
$$w(z) = \phi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \phi - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad (2.2)$$

Hitrostni potencial  $w(z)$  za sistem  $N$  vrtincev v takem primeru lahko zapišem kot (2.3):

$$w(z) = \sum_{j=1}^N w_j(z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \ln(z - z_j) \quad (2.3)$$

Primer dvodimenzionalnega toka, ki ga lahko obravnavamo z zgoraj predstavljenim modelom prikazuje slika 2.1.





Slika 2.1: Sistem dvodimenzionalnih vrtincev

### 2.1.1 Sistem vrtincev je Hamiltonski sistem

Predpostavljen model dvodimenzionalnega vrtinčnega toka je hamiltonski, kar pomeni, da je energija sistema konstanta gibanja in se s časom ne spreminja. Hamiltonjan se glasi (2.4):

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \ln(z_i - z_j) \quad (2.4)$$

Predpostavljen model velja v neskončnem dvodimenzionalnem prostoru, kjer ne nastopajo robni efekti. V omejenem prostoru se Hamiltonjan spremeni. Faktor  $\ln(z_i - z_j)$  nadomesti splošna Greenova funkcija za Poissonovo enačbo z ustreznimi robnimi pogoji. Dodatno se pojavijo še »enovrtinčni« členi, ki opisujejo interakcijo posameznega vrtinca s svojo vrtinčno sliko (analogno metodi zrcaljenja v EMP), ter členi, ki opišejo interakcijo vrtincev z zunanjim tokom tekočine.

Nastanek vrtincev je posledica »neviskozne« Eulerjeve enačbe. Predlagan model za opis vrtinčnih sistemov strogo drži le v dveh dimenzijah, ob predpostavki, da je razdalja med posameznimi vrtinci bistveno večja od karakteristične prečne dimenzije vrtincev

(premera). Model uspešno opiše tudi pojave v viskoznih tokovih, kadar je disipacija energije zaradi viskoznosti majhna.



Slika 2.2: Jupitrova rdeča pega – primer 2D vrtničnega toka

Za uspešen opis nastanka makroskopskih vrtnicev privzamemo, da se vrtnični sistem obnaša ergodično ter, da po dovolj dolgem času zasedenost stanj takega sistema lahko opišemo s porazdelitvijo (2.5):

$$g(H) \propto e^{-\beta H} \quad (2.5)$$

Sistem točkastih vrtnicev z dovolj energije zavzame stanja, ki ustrezajo negativni absolutni temperaturi. V takem režimu, se zaradi narave porazdelitev zasedenosti stanj vrtnici z enakim predznakom cirkulacije privlačijo, vrtnici z nasprotnim predznakom cirkulacije pa se odbijajo. Posledično se vrtnici z enakim predznakom cirkulacije začno združevati v večje - makroskopske, vrtnice.

### 3 SAW TURBULENTNI MODEL

Sledeče poglavje se ukvarja z analogijo med proteinskim in turbulentnim modelom.

#### 3.1 Proteini

Proteini so velike, kompleksne molekule sestavljene iz različnih sekvenc aminokislin. Oblika, ki jo proteinske klopke zavzamejo, je tudi zelo kompleksna in je odvisna od številnih parametrov. Pomembna lastnost oblike proteinske klopke je tudi ta, da se med seboj različna začetna stanja razvijajo proti enakemu stacionarnemu stanju. Različni proteini, različnih začetnih oblik, se v danih pogojih preoblikujejo v zelo podobno končno stacionarno stanje – zavzamejo podobne oblike.

Obnašanje proteinov je zelo kompleksno, saj se procesi odvijajo na različnih dolžinskih - velikostnih skalah. V takih primerih je energijsko bilanco težje določiti, saj sistem energijo prejme na določeni velikostni skali, energija se nato razporeja med posameznimi velikostnimi skalami, preden se disipira nazaj v okolico. Energija se lahko pretaka skozi sistem po različnih poteh. Najbolj verjetna pot prenosa energije skozi sistem okarakterizira tudi končno stacionarno stanje sistema.

Iz napisanega lahko razberemo kar nekaj podobnosti med proteinskimi in turbulentnimi sistemi. Najbolj opazni sta konvergentna evolucija ter energijska kaskada. Poznavanje teh analogij nam omogoča, da s pomočjo opazovanja in razumevanja dinamike oblike proteinskih klopok skušamo razložiti pojave, ki nastopajo pri turbulenci. Možno je tudi obratno. Z raziskovanjem turbulentnih pojavov lahko skušamo razložiti pojave, ki nastopajo pri evoluciji oblike proteinskih klopok.

##### 3.1.1 Energijska bilanca proteinske klopke

Protein je v denaturiranem stanju naključno zvita veriga monomer v prostoru. Tako stanje najlažje simuliramo s sebi izogibajočo se hojo ( self-avoiding walk - SAW ). SAW je naključna hoja pri kateri zahtevamo, da proteinska veriga vsako mesto v prostoru lahko zasede le enkrat - dve različni monomeri ne moreta zavzemati istega dela prostora.  $N$

korakov v SAW simulaciji predstavlja protein sestavljen iz  $N$  monomer v denaturiranem stanju. Proteinska veriga se lahko tudi Brownovo giba. Brownovo gibanje se simulira tako, da se izbere naključno monomero, preostanek verige pa se zavrti za naključni kot.

Številaska gostota monomer je definirana na sledeč način (3.1):

$$n \propto \frac{N}{R^D}, \quad (3.1)$$

kjer  $N$  predstavlja število monomer, ki sestavljajo protein,  $R$  je razdalja med začetkom in koncem proteinske verige,  $D$  pa predstavlja dimenzionalnost prostora.

Zahteva, da protein vsako mesto v prostoru lahko zasede le enkrat, se odraža z odbojnim členom v energijski bilanci. Gostota odbojne energije  $\varepsilon$  je sorazmerna  $n^2$ - gostoti monomernih parov (3.2):

$$\varepsilon \propto k_B T V_0 n^2, \quad (3.2)$$

kjer  $V_0$  predstavlja prepovedan volumen,  $k_B T$  pa termično energijo. Celotna odbojna energija  $E_{rep}$  znaša (3.3):

$$E_{rep} \propto \varepsilon R^D = \frac{k_B T V_0 N^2}{R^D} \quad (3.3)$$

$E_{rep}$  proteinsko klopko razpihuje. Razpihovanje proteinske klopke prek vseh meja uravnovesijo elastične deformacije proteina. Elastične deformacije proteina v energijski bilanci opišemo s členom, ki ustreza elastični energiji proteina  $E_{ela}$  (3.4):

$$E_{ela} \propto k_B T \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 = \frac{k_B T R^2}{N a^2} \quad (3.4)$$

kjer je  $R_0 = a\sqrt{N}$  karakteristična razdalja pri običajni naključni hoji.  $a$  je dolžina posamezne monomere,  $N$  pa je število monomer, ki sestavljajo proteinsko klopko.

Energijska bilanca  $E_{tot}$  se glasi (3.5):

$$E_{tot} = E_{rep} + E_{ela} \propto k_B T \left( \frac{V_0 N^2}{R^D} + \frac{R^2}{N a^2} \right) \quad (3.5)$$

Z minimizacijo  $E_{tot}$  glede na  $R$ , lahko določimo povprečni ravnovesni radij proteinske klopke (3.6):

$$R_{eq} \propto N^{3/(D+2)} \quad (3.6)$$

Eksponent v izrazu (3.6) se imenuje indeks kompaktnosti  $\nu$ . V tridimenzionalnem prostoru  $\nu$  znaša (3.7):

$$\nu = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} \quad (3.7)$$

Eksponent v enačbi (3.6) se pogosto imenuje tudi Floryjev koeficient. Interpretacija Floryjevega koeficienta je nazorna, če si pogledamo njegovo definicijo (3.8):

$$\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(R_{eq})}{\log(N)} \quad (3.8)$$

Iz poznavanja lastnosti naključne hoje sledi, da je  $\nu$  navzdol omejen z  $1/2$ , kar je ravno Floryjev eksponent navadne naključne hoje. S »privijanjem« zahteve po sebi izogibajoči hoji se Floryjev koeficient povečuje, kar se odraža v povečevanju  $R_{eq}$  same proteinske klopke. Lahko rečemo, da zahteva po sebi izogibajoči hoji proteinsko klopko »ravna«:

V eni dimenziji da enačba (3.6) smiseln rezultat. Takrat je  $R_{eq}$  kar sorazmeren številu monomer, ki sestavljajo protein.

V dveh in treh dimenzijah enačba (3.6) napove indeks kompaktnosti  $3/4$  in  $3/5$ , kar se še tudi dobro ujema z računalniškimi simulacijami.

Pri več dimenzijah pa omenjena enačba odpove. S pomočjo računalniških simulacij in poznavanja lastnosti naključne hoje se izkaže, da se v problemih, katerih dimenzionalnost presega tri dimenzije, sebi izogibajoča hoja izenači z navadno naključno hojo. Torej znaša v takih primerih Floryjev koeficient  $1/2$ .

### 3.1.2 Korelacijska funkcija proteinske klopke

Korelacijsko funkcijo proteinske klopke je smiselno definirati s pomočjo številske gostote monomer (3.9):

$$P(\vec{r}) = \langle n(\vec{x}) \cdot n(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (3.9)$$

Iz enačbe (3.6) lahko izrazim število monomer v odvisnosti od zajetega prostora (3.10):

$$N = R_{eq}^{\frac{1}{\nu}} \quad (3.10)$$

Izberem  $\vec{x}$  nekje na proteinski klopki in si zamislim kroglo z radijem  $r$  okrog izbranega mesta. V izbrani krogli je število monomer sorazmerno  $r^{1/\nu}$ , kar sledi iz enačbe (3.10). V krogelnem plašču med  $r$  in  $dr$  je gostota monomer podana z naslednjim izrazom (3.11):

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{dN}{dr} \frac{dr}{dV} \sim \frac{r^{1/\nu-1}}{r^{d-1}} = r^{1/\nu-d} \quad (3.11)$$

Za korelacijsko funkcijo  $P(\vec{r})$  potem lahko zapišem (3.12):

$$P(\vec{r}) = \langle n(\vec{x}) \cdot n(\vec{x}, \vec{r}) \rangle \sim r^{1/\nu-d} \quad (3.12)$$

S Fourierevo transformacijo izraza (3.12) dobim (3.13):

$$\psi(\vec{k}) = F(P(\vec{r})) \sim O(k^{-5/3}) \quad (3.13)$$

S trditvijo, da smo z izpeljavo korelacijske funkcije za proteine – polimere, izpeljali tudi korelacijsko funkcijo za turbulence, je potrebno biti pazljiv. V primeru polimerov

korelacijsko funkcijo sestavljajo skalarne vrednosti - številske gostote monomer na določenem mestu v prostoru. V primeru turbulence, pa korelacijsko funkcijo sestavljajo vektorji – vrtinčnosti, kar je pomembna razlika! Zato trivialna analogija ni možna.

Lahko pa za proteine definiramo tudi drugačno (vektor-vektorsko) korelacijsko funkcijo, kjer vsaki monomeri pripišemo vektor  $\vec{\Gamma}_i$ , ki kaže vzdolž monomere. Korelacijska funkcija se v tem primeru glasi (3.14):

$$P(\vec{r}) = \langle \vec{\Gamma}(\vec{x}) \cdot \vec{\Gamma}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \sim r^{1/\tilde{\nu}-3}, \quad (3.14)$$

kjer je  $\tilde{\nu}$  »vektorski« analog Floryjevemu koeficientu.

V tem primeru je korelacijska funkcija proteinov direktno analogna korelacijski funkciji turbulence. Poznavanje koeficienta  $\tilde{\nu}$  omogoča izračun korelacijske funkcije za vrtinčnost, spektra vrtinčnosti in v končni fazi tudi energijskega spektra turbulence.

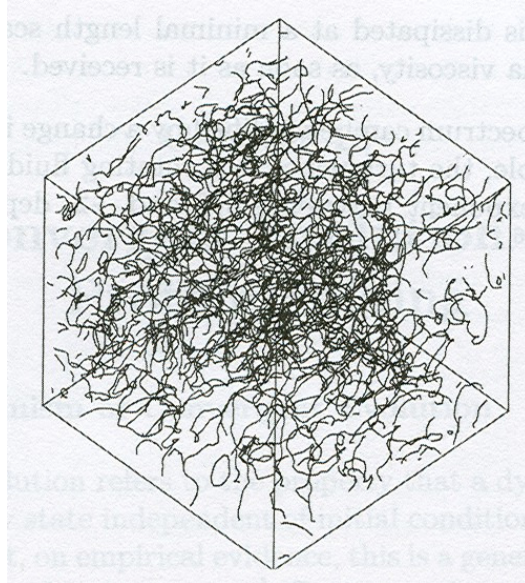
### 3.2 Vrtinčni model

Proteinski sistem modeliramo kot preplet proteinskih niti, podobno lahko turbulentni tok modeliramo kot preplet vrtinčnih niti. Pri tem početju se lahko opremo tudi na Kelvinov teorem, ki trdi, da se v idealni tekočini vrtinčne niti ne križajo niti ne sekajo. Preplet vrtinčnih niti v danem prostoru zato poskusimo simulirati s SAW modelom.

Vrtinčno nit si predstavljajmo kot cev z radijem  $\xi$  in lastno cirkulacijo  $\Gamma$  (3.15):

$$\Gamma \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (3.15)$$

V gornji enačbi je  $\vec{v}$  hitrostno polje okrog jedra vrtinčne niti,  $C$  pa predstavlja krivuljo, s katero vrtinčno nit objamemo. Radij vrtinčne niti  $\xi$  določa dolžinska skala, na kateri se energija celotnega vrtinca disipira v okolico. To je tudi ena od pomembnih predpostavk Kolmogorovega zakona o turbulenci: vsa energija vrtinca se disipira samo v njegovem jedru.



**Slika 3.1: Primer simulacije prepleta vrtinčnih niti z modelom SAW**

S pomočjo klasične hidrodinamike ugotovim, da je dolžinska gostota energije posamezne vrtinčne niti enaka  $\rho\Gamma^2$ .  $\rho$  je gostota medija, v katerem opazujemo vrtince. Od tod z dimenzijsko analizo dobim gostoto energije prepleta vrtinčnih niti (3.16):

$$w(\vec{r}) = \rho\Gamma^2 P(\vec{r}). \quad (3.16)$$

S Fourierovo transformacijo izraza (3.16) pa dobim še spekter gostote energije prepleta vrtinčnih niti (3.17):

$$w(\vec{k}) = \rho\Gamma^2 \psi(\vec{k}) \propto \rho\Gamma^2 k^{-5/3} \quad (3.17)$$

$\Gamma$  v enačbi (3.17) se lahko izrazi z ostalimi fizikalnimi lastnostmi turbulence. Moč disipacije  $\varepsilon$  je sorazmerna produktu  $\eta \cdot \Gamma$ .  $\eta$  predstavlja viskoznost medija, ki jo izrazimo s pomočjo Reynoldsovega števila (3.18):

$$\text{Re} = \frac{\lambda u}{\eta}, \quad (3.18)$$



kjer je  $\lambda$  izbrana dolžinska skala,  $u$  pa tipična hitrost na tej dolžinski skali. Energija vrtinca disipira samo v njegovem jedru - na dolžinski skali  $\xi$ , zato velja:  $\Gamma \propto \lambda u$ . Sedaj cirkulacijo vrtinca izrazim z Reynoldsovim številom  $Re$  in močjo disipacije  $\varepsilon$  (3.19) :

$$\Gamma \propto (Re \varepsilon)^{1/3} \quad (3.19)$$

Sorazmernost (3.19) lahko vstavim v izraz (3.17) in dobim Kolmogorov zakon o turbulencah (1.4) :

$$E(\vec{k}) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.20)$$

### 3.3 Problem disipacije energije

Kolmogorov zakon predpostavlja, da se energija, ki jo turbulentni tok prejme na zunanji skali, prenaša po kaskadah preko inercialne skale do disipacijske skale, kjer se energija zaradi viskoznosti disipira nazaj okolico.

Poskusi kažejo, da je hitrost disipacije energije v primeru majhne viskoznosti tekočine oziroma v primeru visokih Reynoldsovih števil, neodvisna od viskoznosti tekočine. hitrost disipacije kinetične energije turbulentnega toka opisuje naslednja fenomenološka formula (3.21):

$$\varepsilon = A \frac{V^3}{L}, \quad (3.21)$$

kjer je  $V = \sqrt{\langle (v - \bar{v})^2 \rangle}$  koren povprečnega kvadrata odmika hitrosti od povprečne vrednosti hitrosti,  $L$  je korelacijska dolžina za hitrost,  $A = A(Re)$  pa je samo funkcija Reynoldsovega števila. Eksperimenti kažejo, da se v primeru visokih Reynoldsovih števil  $A$  asimptotsko približuje neki konstantni vrednosti.

Poskusi prav tako kažejo na dejstvo, da se hitrost disipacije energije v tridimenzionalnem toku močno poveča napram hitrosti disipacije v dvodimenzionalnem turbulentnem toku.

Eksperimentalna opažanja navajajo na to, da ima viskoznost pri disipaciji energije v turbulentnih tokovih sekundaren pomen. Zato so mnogi poskušali izpeljati mehanizem disipacije tudi v turbulentnih tokovih neviskozni tekočin.

## 4 ZAKLJUČEK

V seminarju sem ugotovil sledeče:

dvo in tridimenzionalni turbulentni tokovi se obravnavajo ločeno. Izkaže se, da posplošitve rezultatov obravnave iz dvo na tridimenzionalne tokove in obratno, v večini primerov niso možne,

dvodimenzionalne vrtilne tokove lahko ob določenih poenostavitvah obravnavamo analitično in še dobimo dobre približke realnemu stanju,

tridimenzionalne tokove se obravnava s statističnimi prijemi ter bolj ali manj pravilnimi fizikalnimi modeli. Splošno sprejeta fizikalna slika turbulentnih pojavov še ne obstaja. Kljub temu se rezultati obstoječih teorij dobro ujemajo z eksperimentalnimi poskusi,

pri analizi turbulentnih tokov si lahko močno pomagamo z analizo polimernih sistemov. Navkljub veliki podobnosti pa je potrebno biti pri vlečenju analogij zelo pazljiv.

## 5 LITERATURA

PODGORNIK, R. Mehanika kontinuov, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, SLO, 2006

CHORIN, A. J. Vorticity and Turbulence, Springer – Verlag NewYork, NewYork, USA, 1998

HUANG, K. Statistical physics and protein folding, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 2005

EYINK, G. L. , SREENIVASAN, K. R. Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence, Reviews of modern Physics, Volume 78, USA, January 2006

<http://www.plus.maths.org/issue26/news/turbulence/index.html>

<http://maartenrutgers.org/science/turbulence/gallery.html>

[www.brilliantidiot.com/WGWW/Wallpaper.htm](http://www.brilliantidiot.com/WGWW/Wallpaper.htm)