



SEMINAR - 3. LETNIK

Physicists untangle the geometry of rope. Twine, string, cord or cable, it all winds up the same way.

Fiziki razvozljajo geometrijo vrvi. Sukanec, nit, kabel ali vrv, vse se razplete na isti način.

Avtor: Ana Marin

Mentor: prof. dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, marec 2011

Povzetek

Pogledali bomo, s kakšnim matematičnim opisom lahko razdelamo geometrijo vrvi. Postopoma bomo napredovali od enojne prek dvojne in večkratne vijačnice ter vsakič izračunali nekaj značilnih lastnosti posebnih konfiguracij. Opisali bomo, s katerimi drugimi orodji se lahko spopadamo v primeru podobnih problemov. Našteli bomo tudi kje vse drugje se lahko uporabi pridobljeno znanje iz spletanja vrvi.

Kazalo

1	Uvod	3
2	Vrv naša vsakdanja	3
2.1	Nekaj lastnosti	3
2.2	Kratka zgodovina	4
3	Kako matematično opisati strukturo vrvi?	4
3.1	Enojna vijačnica in njen opis	4
3.2	Dvojna vijačnica	6
3.3	Še več vijačnic in končne ugotovitve	8
3.3.1	Še kratek skok k realnim vrvem	9
3.4	Model elastične palice in Kirchoffova teorija	9
3.5	Dodatek o vozlih	10
3.5.1	White-Fullerjev teorem	10
4	Uporabnost poleg običajnih vrvi	11
4.1	Primer DNK	11
4.2	Primer nanocevk	11
5	Zaključek	12

1 Uvod

Pogosto se ne zavedamo, koliko znanosti je skrite za vsakdanjimi stvarmi, stvarmi, ki nas spremljajo že toliko časa, da jih imamo za samoumevne. Tu se bomo ukvarjali s primerom vrvi, natančneje, z njeno obliko. Ste se kdaj vprašali, zakaj vse vrvi izgledajo bolj ali manj enake, zakaj pri plezanju raje zaupate spleteni vrvi kot množici posameznih vlaken? Vse te stvari so skrite v načinu izdelave, ki proizvede natanko določeno obliko, tisto najbolj optimalno, neraztegljivo, tisto, ki jo poznajo že iz prazgodovine. Seveda, oblika vrvi ni nikakršna dobro varovana skrivnost, znana je že predolgo, z računom ne bomo odkrili ničesar spektakularnega in še nevidenega, vendar ali ni čar fizike ravno razumeti zakaj so stvari takšne kot so?

2 Vrv naša vsakdanja

2.1 Nekaj lastnosti

Vrv je niz niti, vlaken, ki so spletena skupaj na način, s katerim se poveča trdnost pri vlečenju. Ima zelo veliko natezno trdnost, pri raztegotovanju se njen presek začne zmanjševati šele za zelo velike sile (kar praktično pomeni, da z njo lahko vlečemo stvari), vendar pa ni narejena, da zdrži velike sile, ki bi jo potisnile skupaj (to pomeni, da z njo stvari ne moremo potiskati).

Dandanes delamo vrvi iz naravnih ali umetnih materialov, vsaka vrsta materiala ima seveda svoje prednosti in slabosti. Naravne surovine so konoplja, abaka, lan, bombaž, vlakna kokosovih orehov, juta ter vrsta agave. Sintetična vlakna so se pojavila v začetku 20. stoletja in zavzemajo večinoma različne polimere od najlona, polipropilenov, poliestrov, polietilenov, aramidov (zagotovo najbolj znan predstavnik je kevlar) do poliaramidov [1]. Človek bi si mislil, da je za vrvi iz različnih materialov potrebno drugačno spletanje vlaken, da dobimo klasično vrv, vendar bomo pokazali, da je univerzalna oblika vrvi popolnoma neodvisna od materiala, iz katerega je spletena, ter da je ta oblika popolnoma geometrijskega izvora. V šali bi lahko rekli, da če na drugih planetih obstaja življenje in tam izdelujejo vrvi, te izgledajo popolnoma enako kot pri nas na Zemlji.



Težko bi našli nekoga, ki se še ni srečal z vrvjo, naj bo to pri gradbeništvu, pomorstvu, športih kot so plezanje, ročnih delih, cirkusu ... Večina vrvi ima to skupno lastnost, da pri vlečenju narazen ohranijo svojo dolžino. Izjema je edino dinamična vrv pri plezanju [2], ki se ob obremenitvi raztegne za približno 10% svoje dolžine. Razlog tiči v povečevanju varnosti v primeru padca, saj tako raztegljiva vrv absorbira energijo in ublaži padec, vsi vemo, da nam nenadna zaustavitev po parih metrih padca lahko le škodi. Razlika med to in tako imenovano statično vrvjo ni v materialu, temveč v izdelavi. Sredico statične vrvi spletejo iz napetih vlaken, medtem ko so ta pri dinamični vrvi med izdelavo veliko bolj mlahavo napeta.

2.2 Kratka zgodovina

Tu smo sedaj prvič omenili podrobnost v postopku izdelave, ki je ključna za neraztegljivo vrv, torej da mora biti med spletnjem močno napeta, kar pa ni kakšen moderen izum. Umetnost spletnja vrvi sega daleč v preteklost, lahko bi rekli da celo do prazgodovinskih obdobj. Vrv se je uporabljala za lov, vlečenje, nošenje, plezanje, pri različnih verstvih tudi kot simbol, naprimer vrteči seidr v skandinavskih deželah, molilna vrv shimenawa v šintoizmu, celo kot hieroglif v egipčanski pisavi. Prve vrvi so bile najverjetneje narejene iz rastlin, ki že same spominjajo na vrv, kot so naprimer bršljan, kasneje pa so začeli vlakna še prepletati. Slike iz egipčanskih grobnic kažejo, da so Egipčani že uporabljali posebne naprave za izdelovanje vrvi. Na njih so vidni tudi kamni, s katerimi so najverjetneje dovolj napeli vlakna, da so lahko izdelali uporabno vrv, izdelovalci vrvi pa so včasih v ta namen uporabili kar lastno težo [3].

3 Kako matematično opisati strukturo vrvi?

V fiziki si je pri reševanju problema modro izbrati primerno matematično orodje, s katerim se bomo kar najlažje spopadli z nalogo. Tu potrebujemo primeren opis vijačne strukture, ki se pojavi pri spletnju, če hočemo všteti še fizikalne količine, potrebujemo nadgradnjo, za opis vozlanja pa imamo kar svoje matematično področje.

3.1 Enojna vijačnica in njen opis

Najbolje je začeti pri najenostavnejšem gradniku, enojni vijačnici, čeprav vemo, da nam za opis funkcionalne vrvi ne bo zadostovalo eno samo vlakno.

Enojno vijačnico lahko najenostavneje zapišemo v parametrični obliki. Krivuljo predstavimo s kroženjem okoli izhodišča v xy ravnini ter enakomerno dviganje v z smeri. Izrazimo jo s parametrom t , ki teče vzdolž nje, kot

$$\mathbf{r}_1 = (a \cos t, a \sin t, ht), \quad (1)$$

kjer je a radij valja, po katerem se vijačnica vije, h pa je višina enega zavoja deljena z 2π . Za vijačnico je značilno, da ima konstantno ukrivljenost κ ter torzijo τ (kako ostro zavije krivulja)

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + h^2}, \quad \tau = \frac{h}{a^2 + h^2}. \quad (2)$$

Kot naklona, pod katerim se krivulja vzpenja dobimo preko odvoda r :

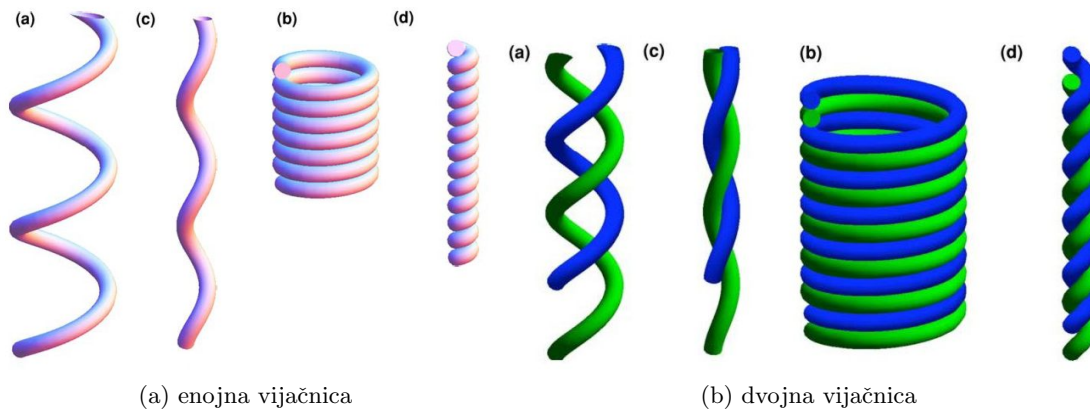
$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, h), \quad \text{ter} \quad \left| \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right| = \sqrt{a^2 + h^2}. \quad (3)$$

Tangenta je glede na horizontalno ravnino nagnjena za naklonski kot ν_\perp , ki je določen z enačbo:

$$\cos \nu_\perp = \left(1 + \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (4)$$

S tem imamo sedaj opis strukture, ki nam popolnoma zadošča z matematičnega vidika, uvedemo le še parameter D , ki nam pove, kakšen je premer 'cevi' iz katere je narejena vijačnica. Na tem mestu si lahko ogledamo, katere tipe vijačnic poznamo in kateri so za naš problem relevantni.

Vijačnice lahko razdelimo v grobem na štiri tipe (razdelitev velja ne glede na število vijačnic, ki strukturo sestavljajo):



Slika 1: izgled tipov vijačnih struktur, povzeto po [4]

- (a) **Odprte**, kjer se vijačnica vije po valju polmera a z določeno višino zavoja (kot navadna vzmet).
- (b) **Pakirane**, kjer je višina enega zavoja enaka premeru vijačnice D (pod tem si lahko predstavljamo npr. tesno navito vzmet).
- (c) **Tesno zvite**, kjer je premer valja, na katerem je vijačnica, minimalen in perioda ponovitve ne divergira (s tem izvajamo izrojen primer ravne cevi).
- (d) **Tesno pakirane**, kjer je vijačnica tesno zvita in pakirana.

V realnosti nas pri obravnavanju zanimajo le pakirane in tesno pakirane vijačnice, saj te edine lahko tvorijo koristno vrvo. Opis bi koristil tudi za opis molekul, kot so proteini, vendar se moramo zavedati, da naš model ne razlikuje med različnimi kiralnostmi molekul, ki so ena od pomembnih lastnosti organskih molekul.

Če sedaj vzamemo dve točki na vijačnici (brez izgube splošnosti lahko vzamemo $(a, 0, 0)$ in $(a \cos t, a \sin t, ht)$), lahko izračunamo kvadrat njune razdalje ter njegov odvod kot:

$$|\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t + h^2 t^2 \quad \text{in} \quad \frac{d}{dt} |\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2|^2 = 2a^2 \sin t + 2h^2 t \quad (5)$$

Tako lokalni minimum enačbe (5) predstavljajo točke, kjer se vijačnica lahko dotika same sebe. Dobljena transcendentna enačba se tako glasi:

$$a^2 \sin t + h^2 t = 0 \quad (6)$$

in ima trivialno rešitev pri $t = 0$, maksimalen ν_{\perp} pa je pri 25.0° , saj za večje vrednosti ni netrivialnih rešitev, kar pomeni, da nad temi koti ne obstaja pakirana struktura, odprta in tesno zvita pa sta vseeno možni.

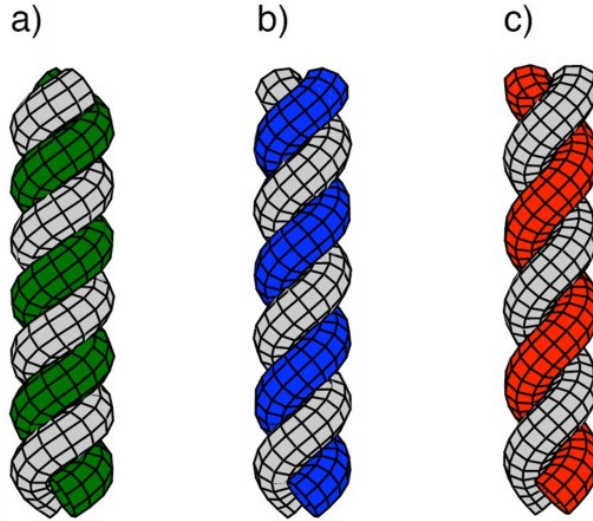
Pri študiju tridimenzionalnih deformacij teles je mnogokrat ugodno predpostaviti, da je cev vijačnice nestisljivo telo, kar pomeni, da se njeni diferencialni volumski elementi pri spremembi oblike ohranijo. Pri trdnih snoveh so to snovi s Poissonovim številom $\sigma = 0.5$. V našem primeru žal hitro uvidimo, da se na zunanji strani naše cevi volumen razširi, medtem ko se na notranji skrči, kar lahko opazimo, če poskusimo upogniti navadno cev. Res je, volumski element se spremeni, vendar se raztezki in skrčki izničijo, tako da se volumen na sredini cevi diferencialno ohranja, vsaj dokler velja, da je $D \leq 2/\kappa$. Ta posplošeni Poissonov kriterij nam

$$\nu_{\perp} = \arccos \sqrt{\frac{-(t + (1 - \Delta)\pi)}{\sin t - (t + (1 - \Delta)\pi)}} \quad (11)$$

Enačba (9) predstavlja enojno vijačnico, (10) dvojno in (11) trojno.

Raziskujemo lahko tudi geometrijsko sklopitev med natezanjem in ukrivljanjem, kar sta naredila že Olsen in Bohr [5]. Opazimo lahko, da se vijačnice, ki so zvite z naklonskim kotom, manjšim od mejnega, ob natezanju dodatno spletajo, medtem ko se tiste s prevelikim kotom odmotajo. Naklonski kot, pri katerem se tako spletena vrv ob natezanju ne premakne (ne namota ali odmotata), pravimo *kot ničelnega zasuka* (*zero-twist angle*).

V primeru dvojnih vijačnic lahko naletimo na tri vrste namotavanja, vsaka predstavlja nek mejni primer in vsaka ima svojo značilnost. Pri kotu 32.5° imamo tako imenovano CLOSE-PACKED STRUCTURE, ki zasede najmanjši volumen. Če vrv vlečemo za konca, se bo ali namotavala ali odmotavala, odvisno od razmerja med pridobljeno dolžino zaradi zmanjšanega radija valja po katerem se vzpenja in odmotavanjem. Točka obrata je pri kotu 39.4° in za to strukturo pravimo, da je ZERO-TWIST STRUCTURE. Od kota 45° naprej je radij valja enak premeru cevi vijačnice, taki strukturi z najmanjšim kotom rečemo, da je TIGHTLY PACKED. Vse konfiguracije so prikazane na Sliki 3.



Slika 3: (a) predstavlja close packed, (b) zero-twist in (c) tightly packed strukturo.

Če želimo izraziti, koliko bo narejena vrv pod- oz. prenavita, vzamemo dvojno vijačnico iz dveh enako dolgih cevčic, kjer je dolžina strukture kar $H = L \sin \nu_{\perp}$, L pa je dolžina posameznih cevi/vlaken. Za totalni zasuk vzamemo $\Theta = L \cos \nu_{\perp}/a$.

Ko raztegnemo dolgo dvojno vijačnico, se bo kot ν_{\perp} spremenil za čisto malo, torej za $d\nu_{\perp}$, zato se bosta spremenila tudi H in Θ . Odvod totalnega zasuka po dolžini lahko zapišem kot (zaradi lepše interpretacije se ga prej pomnoži z $D/2$):

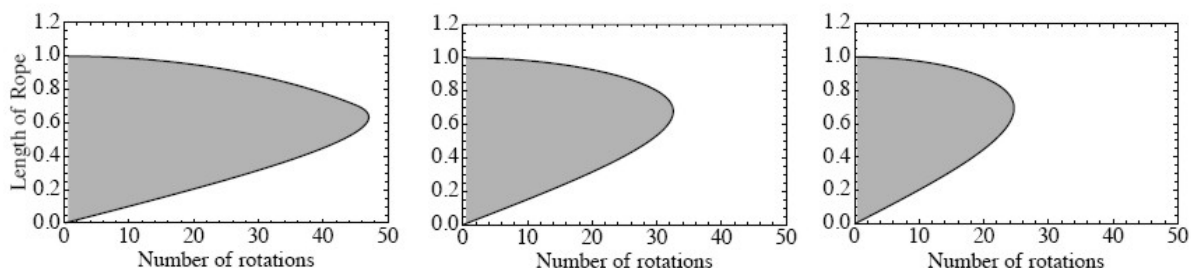
$$\frac{D}{2} \frac{d\Theta}{dH} = -\frac{D}{2a} \tan \nu_{\perp} + \frac{d}{d\nu_{\perp}} \left(\frac{D}{2a} \right).$$

Enačbo lahko interpretiramo na sledeč način: negativni člen predstavlja odvitje, pozitivni pa navitje. Za *close packed* strukturo imamo le tako imenovani *overwinding* (*prenavijanje*, saj

je kot manjši od mejnega), kar so zapazili pri molekulah DNK, kjer so z magnetno pinceto kontrolirali zvijanje, z optično pa so nadzorovali njeno vlečenje [6].

3.3 Še več vijačnic in končne ugotovitve

Kot smo že ugotovili, lahko krivuljo v prostoru opišemo s količinama ukrivljenosti κ in torzije τ , za opis vlaken, ki jih aproksimiramo s cevkami pa je primeren tudi opis s številom obhodov oz. zavojev, ki jih naredi vijačnica - n_r ter dolžino vrvi - L_r (pri tej izpeljavi se bomo naslonili na [3]). Niso možne vse kombinacije teh dveh parametrov, saj imajo cevke trdne stene in ne morejo prehajati ena skozi drugo. V spodnjih grafih (Slika 4) so dovoljeni pari označeni v sivem področju, medtem ko polna črta predstavlja mejni primer že prej omenjene pakirane vijačnice.



Slika 4: Dolžina dobljene vrvi v odvisnosti od števila zavojev za 2, 3 in 4 vlakna. Za ta graf je bila vzeta dolžina vlaken $1m$, njihov premer pa $5mm$. Oblika grafov je univerzalna, število rotacij pa je odvisno od mer naših vlaken.

n_r lahko zapišemo kot

$$n_r = (L_r/2\pi a \sin \nu_{\perp}) \cos \nu_{\perp}. \quad (12)$$

Če rečemo, da se morajo vlakna dotikati, kar se prevede v pogoj

$$D^2 = a^2(\cos t - 1)^2 + a^2 \sin^2 t + \left(\frac{L_r}{2\pi n}\right)^2 \left(t + \frac{2\pi}{N}\right)^2, \quad (13)$$

dobimo enačbo, podobno že zgoraj omenjeni enačbu (6), in sicer (zdaj razširjeno na poljubno število vlaken N):

$$\sin t + \left(\frac{L}{2\pi na}\right)^2 \left(t + \frac{2\pi}{N}\right) = 0. \quad (14)$$

Osupljivo je seveda to, da imamo za vrv določene dolžine maksimalno število zavojev, ki jih lahko naredimo, tej točki, kot smo že omenili, rečemo *zero twist*. Ob obremenitvi se vlakna ne bodo vrtela v nobeno smer (od- in zamotavanje), saj je v točki obrata odvod $dn_r/dL_r = 0$. Totalni zasuk $\Theta = 2\pi n_r$ predstavlja rotacijo vlaken okoli namišljenega valja in tudi njegov odvod po dolžini vrvi $d\Theta/dL_r$ je za točko brez zasuka enak 0. Zanimivo je videti še, da je največja dolžina spletene vrvi enaka 63%, 68% in 69% enega vlakna za vrvi iz 2, 3 in 4 vlaken.

Tako strukturo lahko dosežemo pri značilnih kotih naklona naših vijačnic, ki so 39.4° za dve, 42.8° za tri, 43.8° za štiri in 45° za neskončno vlaken. Za le eno vlakno pride do divergence geometrijske rešitve v dve veji in zato ne obstaja univerzalna točka, ki jo iščemo. Ta divergenca izgine, če upoštevamo snovne lastnosti, kar pa privede do rezultatov odvisnih od materiala iz katerega je vlakno.

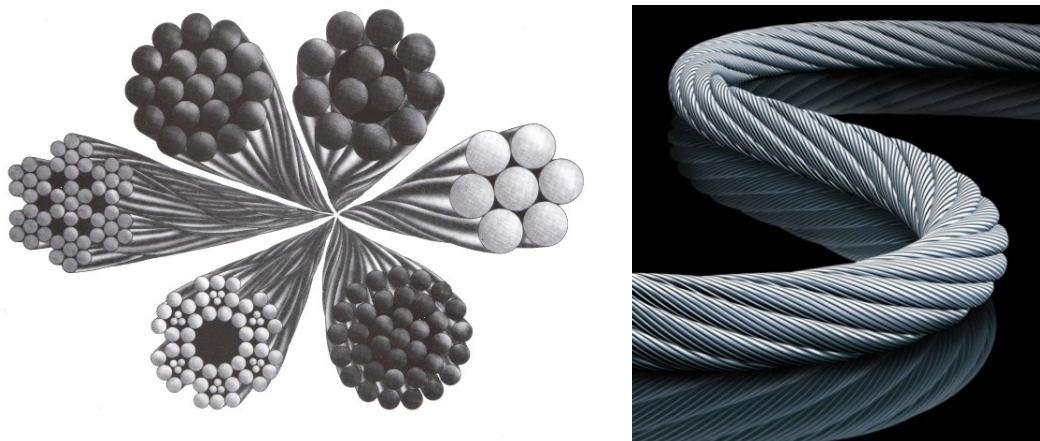
Vendar, zakaj se spletena vrvi ne razveže? Ko spletemo napeta vlakna, se bodo ta ustalila v ravnovesju, kjer je:

$$\frac{dL_r}{dn_r} = \frac{\partial L_r}{\partial n_r} + \frac{\partial L_r}{\partial L_s} \frac{\partial L_s}{\partial n_s} \frac{\partial n_s}{\partial n_r} = 0, \quad (15)$$

kjer se indeks r nanaša na celotno vrvi, indeks s pa na posamezna vlakna, n je število zavojev ali vrvi ali vlaken (zavoji le teh so v obratni smeri in so zato negativni), L pa dolžina vrvi ali vlaken. V tesno narejeni vrvi je vsota $n_r + n_s$ enaka maksimalnemu številu zavojev, ta vsota pa je v splošnem konstantna in nam pove, kako tesno je spletena vrvi. Izraženo ravnovesje je vzrok sposobnosti vrvi, da ohrani svojo prvotno dolžino.

3.3.1 Še kratek skok k realnim vrvm

Spomnimo se, ko smo rekli, da imajo najbolj prostorsko varčne vijačnice v sredini nekaj praznega prostora. Z večanjem števila uporabljenih vlaken nad 3 nam ta prostor zmanjšuje stabilnost strukture, kar pa lahko popravimo z vnosom novega središčnega vlakna prave debeline. V praksi se srečamo s tem problemom npr. pri keratinu in vrvi za privezovanje ladij, kjer 6 vlaken obdaja sredinsko enake velikosti. Problem lahko zastavimo tudi inverzno, kjer okoli središčnega vlakna spletemo N drugih vlaken. S tem lahko nadaljujemo še stopnično višje in tudi zunanja vlakna obdamo z novimi vlakni, kar lahko opazimo pri 7x7x7 vrvi [7]. Primer takega nadaljevanja pletenja so jeklene vrvi, ki se očitno razlikujejo od navadnih vrvi načeloma spletenih iz le treh vlaken. Če bi se velikost celic ohranjala, bi tako dobili nekakšno fraktalno strukturo vrvi.



Izgled jeklenih vrvi, ki so spletene na drugačen način kot običajne vrvi.

3.4 Model elastične palice in Kirchoffova teorija

V mehaniki kontinuov [8] se naš problem zvijanja 'cevi' v vijačnico pripelje še dlje, saj se upošteva tudi deformacija cevk ob zvijanju v vijačno strukturo. Tu ohranimo zapis vijačnice, dodamo pa vektorje tangento \mathbf{t} , normalo \mathbf{n} in binormalo \mathbf{b} , tri pravokotne vektorje, ki z vzpenjanjem po krivulji preko razlike Eulerjevih kotov kažejo deformacijo (v povezavi so tudi z že prej omenjenima količinama, κ in τ (enačba (2)) in sicer kot $\kappa\mathbf{n} = \mathbf{t}'$ ter $\tau\mathbf{n} = -\mathbf{b}'$). Za deformiran elastičen filament (deformabilno tanko palico) lahko zapišemo enačbo proste energije, stanja, gostoto notranjega elastičnega navora. Zapišemo lahko tudi tako imenovane Euler-Kirchoffove enačbe deformirane palice s simetričnim presekom, ki pa so popolnoma analogne Eulerjevim enačbam za vrtenje osnosimetričnega toglega telesa. Naš primer vijačnice oz. vijačno deformiranega filameta je tako analogen precesijskemu gibanju simetrične vrtavke.

3.5 Dodatek o vozlih

Z razvojem vrvi je nastala potreba po zaključevanju in združevanju le teh, kar je privedlo do uporabe vozlov. Vsak od nas pozna vsaj nekaj vrst le-teh, od navadnega vozla, osmice, pomorščaki in plezalci jih poznajo še veliko več, vendar jih mnogo ne ve, da se je iz njih razvila cela matematična teorija, prikladno imenovana *teorija vozlov*.

Naš glavni namen tu ni globoko zabresti v eno izmed težjih matematičnih teorij, ampak le omeniti obširno področje, ki prinaša rešitve tudi za naš problem.

Običajno si pod besedo vrv predstavljamo nezaključeno cev, v teoriji vozlov je ta seveda sklenjena, kar pa nam ne predstavlja prevelikih ovir, saj bi si za našo vsakdanjo vrv lahko predstavljali, da se konca nekje v neskončnosti združita, lahko pa tudi konca sklenemo šele po narejenem vozlu. Vozli se delijo na več skupin glede na to, koliko križnih točk imajo (najmanj koliko križišč imajo s samimi seboj). Tako poznamo trivialni vozle, ki jih nima (primer takega vozla je navadna elastika ali pa mitološki Gordijski vozle), najbolj običajen vozle pa je primer detelje (trefoil knot), ki ima tri križne točke. Fizikalna teorija vozlov, ki v matematično teorijo doda še koncepte, kot so fizikalna torzija in trenje, nam lahko pove, kako močni so taki vozli in kako radi se bodo razvezali, kako je potrebno speljati vrv pri planinarjenju, da si zagotovimo čim večjo varnost [9] ter zakaj se nam slušalke v torbi tako rade zavozlajo [10].

3.5.1 White-Fullerjev teorem

Opis struktur v teoriji vozlov je drugačen kot smo bili vajeni do sedaj. Krivulje lahko opišemo s tremi števili - torzijo $\mathcal{T}w$ (*twist*, ki ni ista kot torzija τ), zvojem $\mathcal{W}r$ (*writhe*) in številom povezav $\mathcal{L}k$ (*linking number* [12], z drugim imenom tudi Gaussova invarianta oz. \mathcal{G}), ki jih povezuje White-Fullerjev teorem:

$$\mathcal{W}r = \mathcal{L}k - \mathcal{T}w. \quad (16)$$

Splošno so ta števila odvisna od \mathbf{r} (funkcija, ki opiše krivuljo) in \mathbf{u} (da velja $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}' = 0$) in se zapišejo kot:

$$\mathcal{T}w = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \mathbf{r}' \times \mathbf{u} \, du \quad (17)$$

$$\mathcal{W}r = \frac{1}{4\pi} \int_0^L \int_0^L \frac{(\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2)) \cdot (\mathbf{t}(s_1) \times \mathbf{t}(s_2))}{|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{r}(s_2)|^3} \, ds_1 ds_2 \quad (18)$$

$$\mathcal{L}k(A, B) = \frac{1}{4\pi} \int_B \int_A \frac{(\mathbf{r}_A(s_1) - \mathbf{r}_B(s_2)) \cdot (\mathbf{t}_A(s_1) \times \mathbf{t}_B(s_2))}{|\mathbf{r}_A(s_1) - \mathbf{r}_B(s_2)|^3} \, ds_1 ds_2 \quad (19)$$

Tangenta \mathbf{t} je $\mathbf{t} = \mathbf{r}'(s)$, s_1, s_2 sta ločni dolžini krivulje, A in B pa označujeta dve zaprti krivulji, ki se ne sekata.

Za vijačne strukture vzamemo opis krivulje (enačba (1)), zamenjamo t s s in h s $\sqrt{1 - a^2}$, število T označuje periodo, m pa število polperiod. Števili $\mathcal{W}r$ in $\mathcal{T}w$ lahko zdaj zapišemo kot:

$$\mathcal{T}w(L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \tau ds = \frac{L}{2\pi} a \sqrt{1 - a^2} \quad (20)$$

$$\mathcal{W}_r \left(\frac{mT}{2} \right) = \frac{m}{2} (1 - \sqrt{1 - a^2}) \quad (21)$$

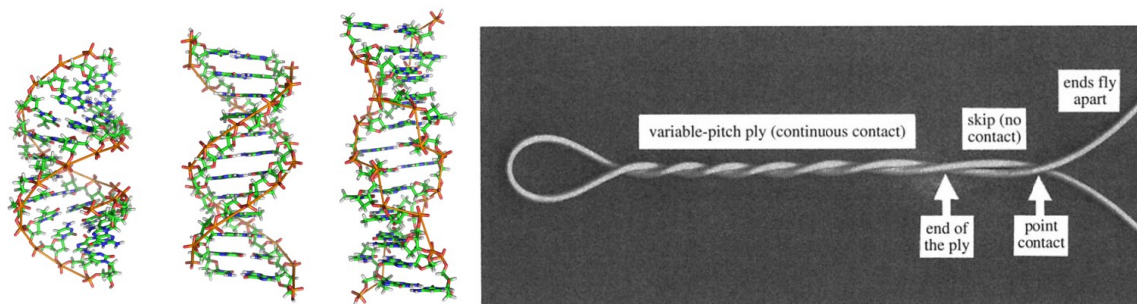
Število $\mathcal{L}k$ ima tudi predstavljalno geometrijsko interpretacijo, namreč da invarianta pove, kolikokrat prva krivulja prebode površino, ki jo napenja druga krivulja.

4 Uporabnost poleg običajnih vrvi

Razdelana geometrija ne drži le za običajne vrvi. Podobne strukture najdemo tudi v biofiziki ter pri izdelavi nanostruktur.

4.1 Primer DNK

Ko pomislimo na vijačnico in biologijo, je DNK (deoksiribonukleinska kislina) gotovo prva molekula, ki nam pride na misel. V petdesetih letih prejšnjega stoletja so znanstveniki menili (tudi Watson in Crick, ki sta kasneje dobila Nobelovo nagrado za odkritje dejanske oblike), da ima DNK sestavo trojne vijačnice [13]. Danes vemo, da ima molekula obliko dvojne vijačnice s tremi različnimi biološko aktivnimi strukturami - A, B in Z (prvi dve sta desnosični, tretja levosučna).



Oblike A, B in Z DNK in dodatno zvitje vrvi.

Zanimiva stvar, ki jo počne B DNK, je analogna poskusu na makroskopski ravni. V roke vzemimo vrvico, na eni strani jo močno navijmo, nato pa približamo konca, kjer jo držimo. Vrvica bo ustvarila dodatne zavoje pravokotno na prvotno in s tem poskušala zmanjšati napetost zaradi teh dodatnih navojev (podobno se seveda zgodi, če vrvico odvijamo - vrvica bo vedno poskušala doseči ravnovesno stanje pred posegom, da bi ohranila število zvojev in integralnih torzij (v originalu writhe in twist)). Taka vrvica oz. molekula z velikim W_r oz. \mathcal{G} je podvržena pojavu, ki se mu reče *dodatno zvitje* (*supercoiling*). Problem se razreši z uporabo teorije vozlov [14], praktično pa lahko dodatno zvitje uporabimo za učinkovito pakiranje DNK v celice, saj dodatno zvitja DNK zasede manj prostora, pojavlja pa se tudi pri procesih transkripcije (genskega prepisovanja) in replikacije (podvojevanja DNK).

4.2 Primer nanocevk

Vrvi lahko spletemo tudi na zelo majhni skali. Nanocevkve so splekli na podoben način kot makroskopske sorodnice [15] - z dodatnim navijanjem med pletenjem so naredili nekakšno prejo iz mnogih vlaken, ki je veliko močnejša od nenavite ter skoraj tako močna kot vlakna, ki se jih uporablja za neprebojne jopiče. V nasprotju z običajnimi vlakni, z vozlanjem ne zmanjšujemo njihove trdnosti, prav tako ohranijo svoje lastnosti pri razponu temperatur od temperature

tekočega dušika do 450°C. Za praktično uporabo so te spletene nanocevke zanimive predvsem zaradi trdnosti ter visokih električne in toplotne prevodnosti

5 Zaključek

Spoznali smo, kako matematično opišemo obliko spletene vrvi ter kakšno strukturo mora imeti vrv, da se ob raztezanju ne zavija ali odvíja, s čimer smo dokazali to, kar izdelovalci vrvi vejo že stoletja. Ugotovili smo tudi, da izračunano ni uporabno le pri produkciji vrvi, temveč tudi na drugih področjih znanosti.

Literatura

- [1] en.wikipedia.org/wiki/Rope(10.3.2011)
- [2] www.ehow.com/facts_4896387_what-climbing-rope-made.html(9.3.2011)
- [3] J. Bohr in K. Olsen, *The ancient art of laying rope*. arXiv:1004.0814v3 [physics.pop-ph] (2010)
- [4] K. Olsen in J. Bohr, *The generic geometry of helices and their close-packed structures*, Theor. Chem. Acc. 125, 207-215 (2010)
- [5] K. Olsen in J. Bohr, *The geometrical origin of the strain-twist coupling in double helices*, arXiv:1003.5358v2 [physics.bio-ph] (2010)
- [6] J. Gore, Z. Bryant, M. Nöllmann in drugi, *DNA overwinds when stretched*, Nature **442** (2006)
- [7] G.A. Costello, *Mechanics of Wire Rope*, Mordica Lecture—Interwire (2003)
- [8] R. Podgornik, *Mehanika kontinuov, skripta*, (2002)
- [9] <http://www.volkerschatz.com/knots/knots.html>(20.1.2011)
- [10] D.M. Raymer in D.E. Smith, *Spontaneous knotting of an agitated string*, Proceedings of the National Academy of Sciences (2007), dosegljivo na naslovu <http://www.pnas.org/content/104/42/16432.full.pdf>(9.3.2011)
- [11] O. Gonzalez, in J.H. Maddocks, *Global curvature, thickness, and the ideal shapes of knots*, PNAS **96**, 4769-4773 (1999)
- [12] E. L. Starostin, *On the writhe on non-closed curves*, arXiv:physics/0212095v1 [physics.bio-ph] (2002)
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Triple-stranded_DNA(9.3.2011)
- [14] J.M.T. Thompson, G.H.M. van der Heijden in S. Neukirch, *Supercoiling of DNA plasmids: mechanics of the generalized ply*, Proceedings: Royal Society, London A 458, 959-985 (2002)
- [15] M. Zhang, K.R. Atkinson in R.H. Baughman, *Multifunctional carbon nanotube yarns by downsizing an ancient technology*, Science **306**, 1358-1361 (2004)