Kazalo

1 Uvod

V seminarju se bom ukvarjal s splošno teorijo ravninske elastičnosti. Dvodimenzionalnih problemov se v splošnem lahko lotimo klasično. Podrobneje si bomo ogledali predvsem primer takoimenovane ravninske napetosti in primer ravninske deformacije. Primer ravninske napetosti ustreza problemu tanke plošče konstantne debeline, na katero delujemo na robu samo s silami v ravnini plošče. Problem ravninske deformacije pa ustreza plošči, ki je na površini obremenjena z enakomerno porazdeljenim bremenom. Na koncu se bom ukvarjal še z uporabo kompleksnih funkcij v dvodimenzionalni teoriji elastičnosti. Za ponovitev najprej zapišimo osnovne enačbe elastomehanike. Kot prvo zapišimo Greenov tenzor deformacije, katerega linearna komponenta je definirana kot

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) \tag{1.1}$$

in napetostni tenzor σ_{ik}

$$\sigma_{ik} = \frac{dF_i}{dS_k}, \tag{1.2}$$

ki nam predstavlja silo na enoto površine, ki deluje v smeri i, če normala elementa površine kaže v smeri k. Osnovna enačba elastomehanike je drugi Newtonov zakon za elastično telo, ki ga zapišemo kot

$$\rho \ddot{u}_i = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{1.3}$$

Zanimala nas bodo ravnovesna stanja, torej oblika že deformiranih teles. V takih primerih so vsi pospeški enaki 0 in se enačba ravnovesja glasi

$$0 = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{1.4}$$

Prvi člen na levi strani nam opisuje zunanje sile, ki delujejo na telo, drugi pa opisuje notranje napetosti v telesu. Za reševanje enačbe potrebujemo še povezavo med napetostnim tenzorem σ_{ik} in deformacijskim tenzorjem u_{ik}. Dobro znani Hookov zakon za splošno izotropno elastično telo zapišemo v obliki

$$\sigma_{ik} = \lambda(Tru_{ik})\delta_{ik} + 2\mu u_{ik}. \tag{1.5}$$

Enačbo lahko obrnemo in dobimo u_{ik} izražen s σ_{ik}

$$u_{ik} = \frac{1}{E}((1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma(Tr\sigma_{ik})\delta_{ik}). \tag{1.6}$$

Zaradi boljšega pregleda in lepšega zapisa enačb, uporabljam pri zapisu enkrat Laméjeva koeficienta λ in μ, drugič pa Young-Poissonove koeficiente E in σ. Zveze med obema naboroma konstant zapišemo v obliki

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \tag{1.7}$$

oziroma če zapišemo drugače

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \tag{1.8}$$

Ponovili smo vse glavne povezave in lahko se lotimo reševanja Newtonove enačbe za omenjena primera.

2 Primer ravninske deformacije

V primeru ravninske deformacije se ukvarjamo s problemom, ko imamo ploščo obremenjeno z enakomerno porazdeljenim bremenom po površini. V tem primeru bo komponenta vektorja deformacije v z smeri enaka nič, $u_z = 0$, komponenti u_x in u_y pa sta od z neodvisni. Ob predpostavki, da gre debelina plošče proti nič, lahko zapišemo pogoje za problem ravninske deformacije kot

$$u_{xz} = u_{yz} = u_{zz} = 0. \tag{2.1}$$

Če zapišemo osnovne enačbe v skalarni notaciji, dobimo

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho f_x = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho f_y = 0,$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad u_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}),$$

$$\sigma_{xx} = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + 2\mu u_{xx}, \qquad u_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})),$$

$$\sigma_{yy} = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + 2\mu u_{yy}, \qquad u_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})),$$

$$\sigma_{zz} = \lambda(u_{xx} + u_{yy}), \qquad 0 = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})),$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu u_{xy}.$$

Hitro lahko vidimo, da s poznavanjem σ_{xx} in σ_{yy} in upoštevanjem, da je u_{zz} enak nič, lahko hitro izračunamo σ_{zz} preko zveze

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \qquad (2.2),$$

oziroma

$$\sigma_{zz} = \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}). \tag{2.3}$$

V tem trenutku lahko oblikujemo problem v terminologiji komponent napetostnega ali komponent deformacijskega tenzorja. Zapišimo najprej komponente napetostnega tenzorja malo drugače:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\sigma}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}), \tag{2.4}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\sigma}(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}), \tag{2.5}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma}\frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}). \tag{2.6}$$

Če to vnesemo v Nevtonovo enačbo in preračunamo dobimo takoimenovano Navier-ovo enačbo

$$G[\nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})] + \rho f_x = 0, \tag{2.7}$$

$$G[\nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})] + \rho f_y = 0, \tag{2.8}$$

pri čemer je ∇^2 dvodimenzionalni Laplaceov operator, konstanta G pa strižni modul. Strižni modul, Youngov modul in Poissonovo število niso neodvisni, ampak so povezani z zvezo $G = E/2(1+\sigma)$. Prišli smo do dveh sklopljenih enačb za u_x in u_y. Če hočemo formulirati problem s komponentami napetostnega tenzorja sledimo sledeči proceduri: Definirajmo P kot

$$P = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = (2\lambda + 2\mu)(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}). \tag{2.9}$$

Hookov zakon lahko potemtakem zapišem kot

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1+\sigma}{E}[\sigma_{xx} - \sigma P], \tag{2.10}$$

$$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1+\sigma}{E}[\sigma_{yy} - \sigma P]. \tag{2.11}$$

Po odvajanju enačbe (2.6) dobimo

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \mu(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}). \tag{2.12}$$

Ko nadomestimo $\partial u_x/\partial x$ in $\partial u_y/\partial y$ dobimo

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 2\frac{E}{1+\sigma}(\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xx} - \frac{\sigma(1+\sigma)}{E}P] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yy} - \frac{\sigma(1+\sigma)}{E}P]),$$

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{yy} - \sigma\nabla^2 P. \tag{2.13}$$

Zapišemo sedaj še ravnovesno enačbo v obliki

$$\rho f_x = -(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}) = F_x,$$

$$\rho f_y = -(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}) = F_y.$$

Zgornji enačbi najprej odvajamo in nato seštejemo, tako da dobimo

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = -(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}).$$

Če enačbo še prav premečemo dobimo

$$-2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}. \tag{2.14}$$

S kombinacijo enačb (2.13) in (2.14) dobimo

$$\nabla^2 P - \sigma \nabla^2 + \nabla \vec{F} = 0,$$

pri čemer je $\vec{F} = (F_x, F_y)$. Končno lahko zapišemo

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{1-\sigma}\nabla \vec{F}. \tag{2.15}$$

Dobljena enačba sestavlja skupaj z ravnovesnima enačbama sistem treh enačb za tri neznane komponente napetostnega tenzorja σ_{xx}, σ_{yy} in σ_{xy}. Zapišimo enačbo še malo drugače. Definirajmo dve novi konstanti σ^* in E^* kot

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \qquad E^* = \frac{E}{1-\sigma^2}. \tag{2.16}$$

Enačbe dobijo potem obliko

$$\sigma_{xx} = \frac{E^*}{1-\sigma^{*2}}(u_{xx} + \sigma^* u_{yy}), \qquad u_{xx} = \frac{1}{E^*}(\sigma_{xx} - \sigma^* \sigma_{yy}),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E^*}{1-\sigma^{*2}}(u_{yy} + \sigma^* u_{xx}), \qquad u_{yy} = \frac{1}{E^*}(\sigma_{yy} - \sigma^* \sigma_{xx}),$$

$$u_{xy} = \frac{1+\sigma^*}{E^*}\sigma_{xy}.$$

Navierova enačba ima potemtakem obliko

$$G[\nabla^2 u_x + \frac{1+\sigma^*}{1-\sigma^*}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})] + F_x = 0, \tag{2.17}$$

$$G[\nabla^2 u_y + \frac{1+\sigma^*}{1-\sigma^*}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})] + F_y = 0. \tag{2.18}$$

Sistem enačb za izračun neznanih komponent napetostnega tenzorja σ_{xx}, σ_{yy} in σ_{xy} lahko zapišemo v obliki

$$\nabla_i \sigma_{ik} + F_k = 0, \tag{2.19}$$

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \sigma^* \nabla \vec{F}), \tag{2.20}$$

Zakaj smo vpeljali konstanti z zvezdico, bomo spoznali nekoliko kasneje.

3 Primer ravninske napetosti

Pogoje za problem ravninske napetosti, ko na tanko ploščo delujemo na robovih le s silami, ki ležijo v ravnini xy, lahko zapišemo kot

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \tag{3.1}$$

Enačbe elastičnosti imajo torej obliko

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0,$$

$$F_z = 0,$$

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad u_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}),$$

$$\sigma_{xx} = \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2\mu u_{xx}, \qquad u_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \sigma\sigma_{yy}),$$

$$\sigma_{yy} = \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2\mu u_{yy}, \qquad u_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \sigma\sigma_{xx}),$$

$$0 = \lambda(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2\mu u_{zz}, \qquad u_{zz} = -\frac{\sigma}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu u_{xy}, \qquad u_{xy} = -\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}.$$

Reševanja se lotimo podobno kot v primeru ravninske deformacije. Iz enačb izločimo komponento u_{zz}, tako da jo izrazimo z u_{xx} in u_{yy} ali z σ_{xx} in σ_{yy}. Omeniti je treba, da v splošnem u_{zz} ni enaka nič in u_x,u_y in u_z so funkcije z-ja. Zato primer ravninske napetosti ni pravi dvodimenzionalni problem. Da bi zapisali Navierovo enačbo, izrazimo komponento u_{zz} s preostalima komponentama u_{xx} in u_{yy}. Tako dobimo

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx} + u_{yy}), \tag{3.2}$$

$$G[\nabla^2 u_x + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})] + F_x = 0, \tag{3.3}$$

$$G[\nabla^2 u_y + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y})] + F_y = 0. \tag{3.4}$$

Enačbi imata enako obliko kot enačbi (2.17) in (2.18), ki ju dobimo v primeru ravninske deformacije z upeljavo konstant z zvezdico E^* in σ^*. Enačbi sicer nista povsem ekvivalentni, saj Laplaceov operator v primeru ravninske napetosti vsebuje neničelne odvode po koordinati z. Da bi zapisali podobne enačbe za neznane komponente napetostnega tenzorja, potrebujemo v tem primeru več podatkov, ker nimamo opravka s pravim dvodimenzionalnim sklopom enačb. Če pa odvisnost po koordinati z zanemarimo (primer kvazi ravninske napetosti) dobimo za tretjo enačbo sistema

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\sigma)\nabla\vec{F}. \tag{3.5}$$

Enačbe za primer kvazi ravninske napetosti so torej po obliki identične enačbam za primer ravninske deformacije, različen je samo nabor konstant.

4 Biharmonične rešitve

Ravninske probleme lahko reduciramo na problem reševanja biharmoničnih funkcij. Enačbi (3.3) in (3.4) lahko združim v eno enačbo kot

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\nabla(\nabla\vec{u}) + \frac{\vec{F}}{G} = 0. \tag{4.1}$$

Predvidevamo, da ima vektor $\vec{u}$ obliko

$$\vec{u} = A\nabla^2\vec{P} - B\nabla(\nabla\vec{P}), \tag{4.2}$$

pri čemer bomo konstanti A in B izbrali pozneje. Substitucija v enačbo (4.1) vodi do enačbe

$$A\nabla^2\nabla^2\vec{P} - B\nabla^2(\nabla\nabla\vec{P}) + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}A\nabla\nabla(\nabla^2\vec{P}) - \frac{1+\sigma}{1-\sigma}B\nabla\nabla^2(\nabla\vec{P}) = -\frac{\vec{F}}{G}. \tag{4.3}$$

Ker operatorja ∇^2 in ∇ komutirata, velja

$$\nabla^2(\nabla\nabla\vec{P}) = \nabla\nabla(\nabla^2\vec{P}) = \nabla\nabla^2(\nabla\vec{P}). \tag{4.4}$$

Konstanto B zapišemo v odvisnosti od konstanta A in jo izberemo tako, da se zadnji trije členi na levi strani enačbe izničijo. Dobimo torej

$$-B + A\frac{1+\sigma}{1-\sigma} - B\frac{1+\sigma}{1-\sigma} = 0,$$

$$B = \frac{1+\sigma}{2}A. \tag{4.5}$$

Tako dobi glavna enačba obliko

$$\nabla^2\nabla^2\vec{P} = \frac{\vec{F}}{AG}. \tag{4.6}$$

Če ni zunanjih sil, zapišemo enačbo v obliki

$$\nabla^2\nabla^2\vec{P} = 0. \tag{4.7}$$

Vsako funkcijo, za katero velja (4.7), imenujemo biharmonična funkcija.
Oglejmo si raje malce starejšo formulacijo, ki jo je predlagal G.B. Airy. Izberimo napetosti v odvisnosti od funkcije φ, tako da zadostimo ravnovesnim enačbam v primerih, ko imamo opravka s konzervativno silo

$$\vec{F} = -\nabla V. \tag{4.8}$$

Izberimo sledeči napetostni tenzor

$$\underline{\sigma} = \nabla^2 \varphi \underline{I} - \nabla\nabla\varphi + V\underline{I}, \tag{4.9}$$

ki ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot

$$\sigma_{ik} = \nabla^2 \varphi \delta_{ik} - \nabla_i \nabla_k \varphi + V \delta_{ik}. \tag{4.10}$$

Ko tako izbran napetostni tenzor vnesemo v ravnovesno enačbo

$$\nabla_i \sigma_{ik} - \nabla_k V = 0, \tag{4.11}$$

dobimo

$$\nabla_k \nabla^2 \varphi - \nabla^2 \nabla_k \varphi + \nabla_K V - \nabla_K V = 0. \tag{4.12}$$

Vidimo, da z izbrano substitucijo zadostimo ravnovesni enačbi. Ravnovesni enačbi sami namigujeta na obstoj funkcije φ. To lahko vidimo, če zapišemo posamezni ravnovesni enačbi v obliki

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} - V) + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy} - V) = 0. \tag{4.14}$$

Enačbi namigujeta na obstoj dveh funkcij A in B tako da velja

$$\sigma_{xx} - V = \frac{\partial A}{\partial y}, \qquad \sigma_{yx} = -\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial B}{\partial y}, \qquad \sigma_{yy} - V = -\frac{\partial B}{\partial x}, \tag{4.15}$$

Ker je napetostni tenzor simetričen, sta komponenti σ_{xy} in σ_{yx} enaki, tako da velja

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0. \tag{4.16}$$

Torej lahko zapišemo

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad B = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{4.17}$$

Če to vnesemo v enačbe (4.15) dobimo izraze za napetosti

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + V, \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V, \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{4.18}$$

Kot lahko opazimo so enačbe razvita oblika enačb (4.9) in (4.10). Ker nam tako definirana funkcija φ zadosti ravnovesne enačbe, pa nam enačba (3.5) po substituciji služi kot definicijska enačba za Airy-jevo napetostno funkcijo φ.

$$\nabla^2\nabla^2\varphi + 2\nabla^2 V - (1+\sigma)\nabla^2 V = 0,$$
$$\nabla^2\nabla^2\varphi = -(1-\sigma)\nabla^2 V. \tag{4.19}$$

5 Nekaj teoretičnih osnov kompleksne analize

V tem poglavju bom na kratko omenil in zapisal nekaj matematičnih osnov v teoriji kompleksnih števil. Kompleksno število z in njegovo konjugirano vrednost $\overline{z}$ definiramo kot

$$z = x + iy, \qquad \overline{z} = x - iy. \tag{5.1}$$

Analogno vsaki kompleksni funkciji kompleksne spremenljivke $f(z)$ pripada konjugirana vrednost $\overline{f(z)}$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad \overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y). \tag{5.2}$$

Realni in imaginarni del kompleksnega števila dobimo s seštevanjem in odštevanjem enačb (5.1). Dobimo

$$x = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \qquad y = -\frac{1}{2}i(z-\overline{z}). \tag{5.3}$$

In podobno za kompleksno funkcijo

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(f(z)+\overline{f(z)}), \qquad v(x,y) = \frac{1}{2i}i(f(z)-\overline{f(z)}). \tag{5.4}$$

Funkcija $f(z)$ analitična, če so izpoljeni Cauchy-Riemann-ovi pogoji,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{5.5}$$

pri čemer sta u in v zvezni. Če je funkcija $f(z)$ analitična, sta funkciji $u(x,y)$ in $v(x,y)$ harmonični

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \nabla^2 v = 0. \tag{5.6}$$

Omenimo še, da je odvajanje kompleksnege funkcije s kompleksno spremenljivko, če so izpolnjeni Cauchy-Riemann-ovi pogoji, določeno s operatorjem

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}). \tag{5.7}$$

S seštevanjem in odštevanjem enačb (5.7) dobimo izražene parcialne odvode po posameznih koordinatah v obliki

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}). \tag{5.8}$$

Ostale zakonitosti in relacije pa si po potrebi lahko pogledamo v matematičnem priročniku ali kakšni podobni literaturi.

6 Uporaba pri problemih dvodimenzionalne elastičnosti

Zapišimo zvezo med napetostmi in deformacijami, do katere pridemo pri splošnem reševanju problema ravninske deformacije, v zvezi z Airy-jevo napetostno funkcijo:

$$\sigma_{xx} = \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}) + 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \tag{6.1}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}) + 2G\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{6.2}$$

$$\sigma_{xy} = G(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \tag{6.3}$$

Če enačbi (6.1) in (6.2) seštejemo dobimo

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{2(\lambda + G)}\nabla^2 \varphi. \tag{6.4}$$

Če vzamemo za $P = \nabla^2\varphi$, lahko enačbe (6.1) in (6.2) zapišemo še malo drugače

$$2G\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}P = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)}P, \tag{6.5}$$

$$2G\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}P = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)}P. \tag{6.6}$$

Ker je P harmonična funkcija

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = \nabla^2 P = 0, \tag{6.7}$$

lahko vpeljimo s pomočjo Cauchy-Riemann-ovih pogojev konjugirano harmonično funkcijo Q, tako da velja

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6.8}$$

Tako lahko vpeljemo neko kompleksno analitično funkcijo oblike

$$f(z) = P + iQ. \tag{6.9}$$

Reševanja problema se lotimo tako, da uporabimo dve kompleksni analitični funkciji $\gamma(z)$ in $\chi(z)$. Definirajmo analitično kompleksno funkcijo $\gamma(z)$ kot

$$\gamma(z) = p + iq = \frac{1}{4}\int f(z)\, dz. \tag{6.10}$$

Če funkcijo odvajamo dobimo

$$\gamma'(z) = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + i(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}). \tag{6.11}$$

Ob upoštevanju relacij (5.3) lahko odvod funkcije zapišemo kot

$$\gamma'(z) = \frac{1}{2}(\frac{\partial p}{\partial x} - i\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}). \tag{6.12}$$

Funkcija $\gamma(z)$ je analitična, torej veljajo Cauchy-Riemann-ovi pogoji tudi za p in q. Torej dobimo za odvod funkcije relacijo

$$\gamma'(z) = (\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial p}{\partial x}) = \frac{1}{4}(P + iQ). \tag{6.13}$$

Če izenačimo realne in imaginarne dele in upoštevamo Cauchy-Riemann-ove pogoje dobimo

$$(\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}) = \frac{1}{4}P, \tag{6.14}$$

$$(\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}) = -\frac{1}{4}Q. \tag{6.15}$$

Z vpeljavo dveh različnih oblik enačb (6.14) v enačbi (6.5) in (6.6) pridemo do

$$2G\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{6.16}$$

$$2G\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G}\frac{\partial q}{\partial y}. \tag{6.17}$$

Če enačbe pointegriramo, dobimo

$$2Gu_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G}p, \tag{6.18}$$

$$2Gu_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2G)}{\lambda + G}q. \tag{6.19}$$

Pomnožimo enačbo (6.14) s štiri, tako da dobimo

$$4\frac{\partial p}{\partial x} = 2\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial q}{\partial y} = P, \tag{6.20}$$

oziroma če zapišemo še malo drugače

$$2(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}) = \nabla^2 \varphi. \tag{6.21}$$

Izraz v oklepajih lahko zapišemo tudi kot

$$2(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}) = \nabla^2(px + qy). \tag{6.22}$$

Če enačbi (6.21) in (6.22) med seboj odštejemo, dobimo izraz

$$\nabla^2(\varphi - px - qy) = 0, \tag{6.23}$$

kateri predstavlja katerokoli harmonično funkcijo. Če še definiramo že prej omenjeno kompleksno analitično funkcijo $\chi(z)$ kot

$$\chi(z) = p_1 + iq_1, \tag{6.24}$$

smemo zapisati

$$(\varphi - px - qy) = p_1. \tag{6.25}$$

S pomočjo enačb (5.4) lahko izrazimo realni in imaginarni del izraza (6.10) kot funkcijo analitičnih funkcij $\gamma(z)$ in $\overline{\gamma(z)}$

$$p = \frac{1}{2}(\gamma(z) + \overline{\gamma(z)}), \qquad q = \frac{1}{2i}i(\gamma(z) - \overline{\gamma(z)}). \tag{6.26}$$

Ko dobljeni izraz ob upoštevanju zveze (5.3) vstavimo v (6.25) dobimo

$$\varphi - \frac{1}{4}(\gamma(z) + \overline{\gamma(z)})(z + \overline{z}) + \frac{1}{4}(\gamma(z) - \overline{\gamma(z)})(z - \overline{z}) = p_1.$$

Ko posamezne člene zmnožimo in združimo dobimo

$$2\varphi - \overline{\gamma(z)}z - \gamma(z)\overline{z} = 2p_1. \tag{6.27}$$

Izraz za $2p_1$ se da po drugi strani zapisati kot

$$2p_1 = \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \tag{6.28}$$

Na osnovi enačb (6.27) in (6.28) lahko Airy-jevo napetostno funkcijo zapišemo kot funkcijo kompleksnih analitičnih funkcij $\gamma(z)$ in $\chi(z)$ kot

$$2\varphi = \gamma(z)\overline{z} + \overline{\gamma(z)}z + \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \tag{6.29}$$

Ker pa je Airy-jeva napetostna funkcija skalarna funkcija z neko realno vrednostjo, smemo zapisati naslednje enakosti

$$\gamma(z) = \overline{\gamma(z)}, \qquad \chi(z) = \overline{\chi(z)}. \tag{6.30}$$

Posledično lahko enačbo (6.29) zapišemo krajše kot

$$\varphi = Re[\overline{z}\gamma(z) + \chi(z)]. \tag{6.31}$$

Takšno obliko Airy-jeve napetostna funkcije je prvi leta 1898 zapisal francoski matematik E.Goursat. Ko odvajamo Airy-jevo napetostno funkcijo po operatorjih odvajanja (5.8) dobimo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \gamma(z) + z\overline{\gamma'(z)} + \overline{\chi'(z)}. \tag{6.32}$$

Ob uporabi enačb (6.18),(6.19) in (6.32) lahko zapišemo kompleksni premik kot

$$2G(u_x + iu_y) = \eta\gamma(z) - z\overline{\gamma'(z)} - \overline{\chi'(z)}, \tag{6.33}$$

pri čemer je faktor η enak

$$\eta = \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G}, \tag{6.34}$$

in velja za

$$\eta = \begin{cases} (3 - 4\sigma) > 1 & \text{primer ravninske deformacije} \\ \dfrac{3-\sigma}{1+\sigma} > 1 & \text{primer ravninske napetosti} \end{cases}$$

Če z uporabo enačbe (6.32) izračunamo napetosti, pridemo do takoimenovanih "fundamentalnih" napetostnih kombinacij, ki imajo obliko

$$(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2(\gamma'(z) + \overline{\gamma'(z)}) = 4Re[\gamma'(z)], \tag{6.35}$$

$$(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}) = 2(\overline{z}\gamma''(z) + \chi''(z)). \tag{6.36}$$

Zapisane enačbe so vse analitične funkcije za spremenljivki x in y. Z računanjem realnih in imaginarnih delov enačbe (6.36) ob uporabi (6.35), dobimo tri enačbe, s pomočjo katerih določimo tri neznane komponente napetostnega tenzorja. Tudi komponente deformacijskega tenzorja lahko izrazimo s pomočjo kompleksnih analitičnih funkcij $\gamma(z)$ in $\chi(z)$, s čimer pa se v seminarju ne bom ukvarjal.

7 Konformne preslikave

Pogosto se nam pri obravnavanju raznih problemov v praksi zgodi, da imamo že pri definiranju robnih pogojev matematične težave. Še večje težave pa nastopijo, ko skušamo določiti kompleksni funkciji $\gamma(z)$ in $\chi(z)$, saj se morata podrejati robnim pogojem. Če uspemo določiti takšni funkciji, da se podrejata robnim pogojem, potem lahko določimo tudi napetostne koncentracije v neposredni bližini napak v materjalu (razpoke, zareze, luknje...). Ker pa so v splošnem te napake najrazličnejših oblik, si lahko težavno matematično izpeljevanje olajšamo s konformnimi preslikavami.
Oglejmo si kot primer konformno preslikavo oblike

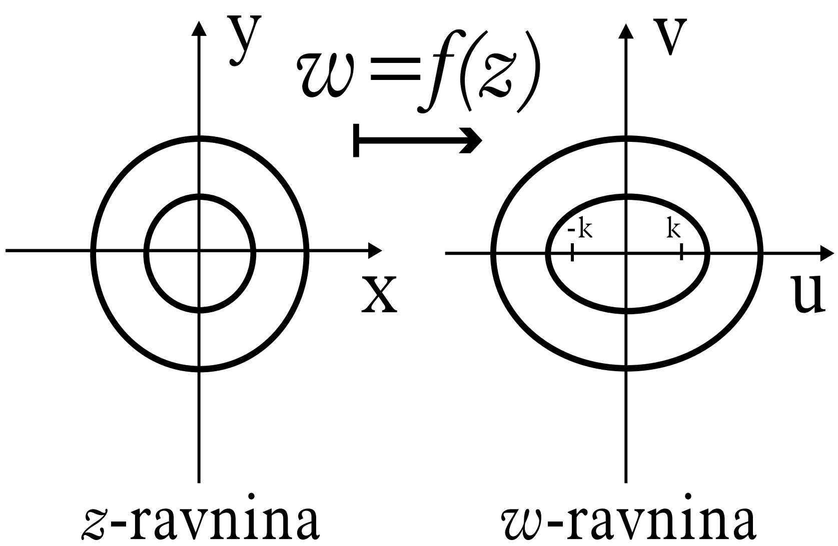
$$w = \frac{k}{2}(z + \frac{1}{z}), \qquad k = konst > 0. \tag{7.1}$$

Vstavimo $z = e^{i\varphi}$ in zapišemo realno in imaginarno komponento w:

$$u = \frac{k}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi, \quad v = \frac{k}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi. \tag{7.2}$$

Krogi s polmerom $r = r_0$ v z-ravnini se preslikajo v elipse v w-ravnini:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad za \quad a = \frac{k}{2}(r_0 + \frac{1}{r_0}), \quad b = \frac{k}{2}(r_0 - \frac{1}{r_0}). \tag{7.3}$$



Slika 1: Primer konformne preslikave

Gorišči elipse sta točki $\pm k$ realne osi. Enotski krog $r = r_0 = 1$ se transformira v dvakrat šteto daljico $(-k, +k)$ realne osi. Notranjost in zunanjost enotskega kroga se preslika na celotno w-ravnino, če izvzamemo daljico $(-k, +k)$. Obratna funkcija ima obliko

$$z = \frac{w + \sqrt{w^2 - k^2}}{k}. \tag{7.4}$$

Če bi torej poznali rešitev elastičnosti za en primer, v našem primeru je to krog, in poznali konformno preslikavo, bi posledično poznali rešitev tudi za primer elipse. Če veliko os elipse povečujemo v neskončnost, bi dobili daljico. Posledično bi poznali rešitev problema tudi za razpoke.

8 Zaključek

Kot smo imeli priložnost spoznati, predstavlja kompleksni zapis dvodimenzionalnih problemov elastičnosti učinkovito orodje za reševanje le teh. Zapis sam po sebi ne bi bil nič posebnega, če skupaj s kompleksno analizo (predvsem lastnosti konformnih preslikav) ne bi bil mnogo bolj uporaben in učinkovit od klasične poti raševanja omenjenih problemov.

9 Literatura

[1] Robert William Soutac-Little : Elasticity
[2] Maks Oblak : Mehanika loma - zbrano gradivo-1 del
[3] L.D Landau, E.M Lifshitz : Theory of Elasticity