UVOD

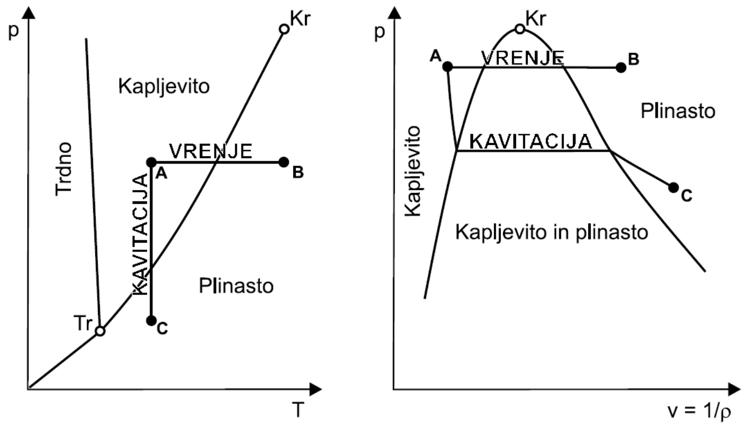
Pojem kavitacija opisuje in razlaga pojav mehurčkov v tekočini. Mehurčki predstavljajo parno (plinasto) fazo v kapljevinastem toku, ki tako iz enofaznega preide v dvofazni tok.

Kratka zgodovinska kronologija

Reynolds leta 1873 prepozna vrtenje ladijskih propelerjev brez pravega učinka in krivdo za to naprti mehurčkom v tekočini Fenomen je konec 19. stoletja prepoznal in poimenoval prvi William Froude, Charles Parsons pa je s sodelavci to ime prvič uporabil v strokovnem članku leta 1893 (lat. cavitas – votlina, prazen prostor). Parsons je leta 1895 prvi izdelal kavitacijski tunel (slika), znotraj katerega je preizkušal modele ladijskih vijakov. Že prej zabeležene opazke o mehurčkih so imeli: Newton (1704, Optiks), Euler (1754, teorija turbinskih strojev), Reynolds (1873, model ladjice). Rayleigh leta 1917 postavi osnovno teorijo mehurčka, ki jo leta 1949 zaradi novejših eksperimentalnih rezultatov, ki nastanejo kot posledica snemanj s kamero, dopolni Plesset. Thoma predlaga leta 1925 brezdimenzijsko kavitacijsko število σ. Z razvojem računalništva in izboljšanjem snemalnih sposobnosti se zadnjih 50 let dela predvsem na numeričnih modelih, ter izdelavi hitrostnih polj s pomočjo visokofrekevenčnih snemalnih naprav.

Termodinamska primerjava vrenja in kavitacije

Pri kavitaciji gre za fazni prehod iz kapljevinaste faze v parno, kjer pride do lokalnega zmanjšanja tlaka pri konstanti temperaturi. Druga možnost faznega prehoda obstaja s pomočjo vrenja, kjer pri konstantnem tlaku povečujemo temperaturo. Oba primera sta prikazana na sliki 1.



Slika 1.

1.) Vrenje je fazni prehod, ko pri konstantnem tlaku povečujemo temperaturo T. Razlika med nasičeno temperaturo T_s in temperaturo T imenujemo supertoplota in jo označimo z ΔT. Supertoploto, kjer se pojavi para, imenujemo kritična supertoplota ΔT_c.

2.) Kavitacija je fazni prehod, kjer pri konstanti temperaturi zmanjšujemo tlak pod vrednostjo nasičenega tlaka p_V . Količino $(p_V - p)$ poimenujemo napetost Δp, vrednost pri kateri se zgodi »razpad« tekočine, pa natezno trdnost tekočine Δp_C.

Obe količini lahko pri manjših vrednostih primerjamo s pomočjo Clausius-Clapeyron-ove enačbe (C.E. Brenner, Cavitation and Bubble Dynamics, 1995)

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{\substack{pogoj\,i\\ nasièasiè}} = \frac{L}{T(\rho_v^{-1} - \rho_L^{-1})} \qquad (1.1)$$

Pri čemer je L latentna toplota. Če privzamemo, da nismo blizu kritične točke, je volumen pare mnogo večji od tekočine in zato lahko podamo sledečo oceno

$$\Delta T_c \approx \Delta p_c \cdot \frac{T}{\rho_V L} \qquad (1.2)$$

Pojmovnik

Glede na nastanek ločimo kavitacijo, ki nastane zaradi napetosti v tekočini in kavitacijo, ki je posledica lokalno dovedene energije. Opredelimo 4 vrste kavitacije:
- hidrodinamična (padec tlaka zaradi bodisi geometrije bodisi hrapavosti obtekajočega telesa, ter tlačnih pulzacij)
- akustična (povzročajo jo zvočni valovi v tekočini)
- optična (povzročitelj fotoni)
- kavitacija delcev (povzročajo jo elementarni delci)

V našem seminarju se bomo osredotočili na hidrodinamično kavitacijo. Naj navedemo pojavne oblike kavitacije, ki jih razločimo glede na izgled

- Začetna kavitacija
- Razvita kavitacija
- Superkavitacija
- Kavitacija osamljenih potujočih mehurčkov
- Kavitacijski vrtinec

Vse pojavne oblike razen kavitacijskega vtrinca, bomo slikovno predstavili v enem izmed naslednjih poglavij.

Tipi kavitacijskih jeder:

Pri kavitaciji se do tedaj raztopljeni plini in para v tekočini izločajo v obliki mehurčkov, ki jih poimenujemo kavitacijski mehurčki ali kavitacijska jedra.

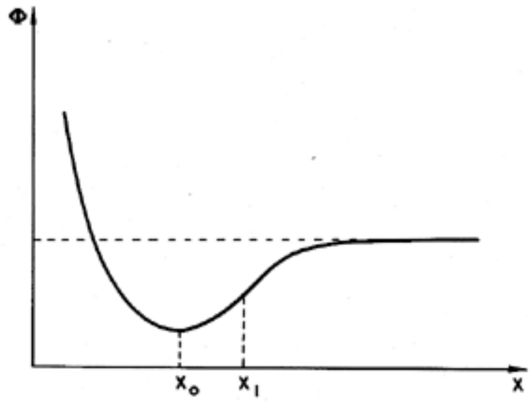
- Homogena - pri gibanju tekočine se formirajo mikroskopske vrzeli znotraj medija iz katerih se potem »odtrga« tekočina in se razvijejo mehurčki
- Heterogena – na stiku trdne snovi in tekočine se pojavijo šibka mesta – tu lahko obravnavamo tako nečistoče znotraj medija kot tudi okolje po katerem se pretaka medij

Težko je ločiti homogene od heterogenih kavitacijskih jeder, večina heterogenih mehurčkov tudi nima krogelne oblike. Osredotočimo se na krogelne mehurčke, ki jih lahko fizikalno najlažje opišemo.

OPIS TEMELJNIH FIZIKALNIH MODELOV KAVITACIJE KROGELNIH MEHURČKOV

Mikroskopska slika in primerjava z makroskopskimi količinami

Natezno trdnost tekočine na makroskopskem nivoju predstavi Frenkel (1955), ki jo opiše s pomočjo mikroskopske slike. Medsebojni potencial dveh posamičnih molekul ima sledečo obliko (slika 1)



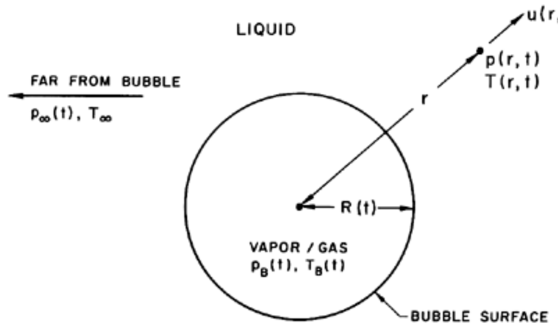
Slika 2. Potencial dveh molekul

Dve značilni točki sta ravnovesna lega dveh molekul x_o v minimumu potencala in maksimum privlačne sile dveh molekul $\partial\Phi/\partial x$, ki se zgodi na medsebojni razdalji x_1. Iz maksimuma privlačne sile lahko sklepamo na vrednosti tlaka, ki bi raztrgale molekule tekočine iz medsebojnega objema. Ker ima za večino tekočin brezdimenzijsko razmerje x_1/x_o velikost okoli 1.1, bi to ustrezalo relativni spremembi volumna $\Delta V/V_o$ v vrednosti približno ene tretjine. Ker so stisljivostni moduli κ za tekočine tipičnega velikostnega reda 10^{10} to 10^{11} $kg/m\,s^2$ in je potemtakem tlak $p=-\kappa(\Delta V/V_o)$, potem sledi da bi se tekočina »raztrgala« pod napetostmi velikostnega reda, p_T, od 3×10^9 Pa do -3×10^{10} Pa. Dejanske vrednosti, ki jih dobimo preko eksperimentalnih poskusov, so stokrat manjše. Glavni razlog je predvsem v nečistosti tekočine.
Elastična energija na enoto volumna se lahko oceni kot $\kappa(\Delta V)^2/2V_o$ ali $|p|\Delta V_o/2$. Da bi razdružili molekule kapljevine in napravili parno fazo prostih molekul, moramo vložiti po oceni med 5×10^8 in 5×10^9 $kg/m\,s^2$energije na enoto volumna, kar se ujema s tipičnimi velikostnimi redi latentne toplote tekočin. Predstavimo lahko kritično temperaturo T_c (temperaturo, kjer pride do nasičenja), kot temperaturo, čigar termična energija kT_c molekul ustreza energiji, ki je potrebna, da se razdružita dve molekuli kapljevine. Eksperimentalno se velikostni redi kritičnih temperatur in latentnih toplot ujemajo z velikostnimi redi, medtem ko imamo že prej omenjeno neujemanje nateznih trdnosti.

Ravnotežno stanje homogenega krogelnega mehurčka v mirujoči tekočini

Vzemimo v mediju osamljen mikromehurček krogelne oblike, za njegovo ravnotežno obliko poskrbi površinska napetost γ, v njegovi okolici je tlak v tekočini p, znotraj njega pa tlak p_B (slika 3).
Ravnotežna enačba na njegovi površini je

$$p_B - p = \frac{2\gamma}{R} \qquad (2.1)$$



Slika 3.

Če je temperatura v tekočini konstantna in mehurček vsebuje samo paro, lahko tlak v mehurčku p_B smatramo kot nasičen parni tlak $p_V(T)$. V tem primeru mora biti zunanji tlak v tekočini $p=p_V-2\gamma/R$ mora biti manjši od p_V, da bi lahko obstajali ravnovesni pogoji.

Maksimalno tlačno razliko Δp_c lahko tolmačimo kot natezno trdnost tekočine (C.E. Brennen, Cavitation and Bubble dynamics, Oxford 1995) , iz katere potem dobimo t.i. kritični radij mehurčka. Torej

$$\Delta p_c = \frac{2\gamma}{R_c} \qquad (2.2)$$

Če imamo v mehurčku plin in paro, potem lahko zapišemo

$$p_B = p_{pare} + p_{plina} \qquad (2.3)$$

Iz zgoraj napisanega lahko sklepamo, da raztopljeni plini v tekočini močno zmanjšajo natezno trdnost kapljevine. Energijo za tvorbo mehurčka Wm lahko razdelimo na dva dela: površinsko energijo in pa delo tlaka pri tvorbi. Za delo tlaka moramo upoštevati tlačno razliko, ki je kar Δp_c . Izračun da

$$W_m = 4\pi R_c^2\gamma - \frac{4}{3}\pi R_c^3 \Delta p_c \qquad (2.4)$$

Če iz te enakosti izločimo kritični radij s pomočjo enakosti (2.2), dobimo Gibbs-ov izraz

$$Wm = \frac{16\pi\gamma^3}{3(\Delta p_c)^2} \qquad (2.5)$$

Gibbs je vpeljal posebno število G , s pomočjo katerega je statistično opredelil verjetnost za nastanek izbranih jeder v enoti volumna na enoto časa (zapisano kot spremenljivko J) v mirujoči tekočini.

$$G = {W_m}/{kT} \qquad J = J_0 e^{-G} \qquad (2.6)$$

, kjer je neznanka vrednost J_0 . Predlog sta podala Blander in Katz (1975)

$$J_0 = N\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi \cdot m}} \qquad (2.7)$$

N je tu števila gostota molekul in m masa posamezne molekule.

Eksperimentalna opazovanja nam razdelijo naše ugotovitve v dve področji. Če vpeljemo brezdimenzijski parameter T/T_c, imamo za mejnik vrednost 0.9. Vzemimo napetost, ki jo lahko dobimo izpeljano preko prejšnjih ugotovitev (od (2.4) do (2.7))

$$\Delta p_c = \sqrt{\frac{16\pi\gamma(T)^3}{3kT\ln\left(J_0/J\right)}} \qquad (2.8)$$

Pri tem ne smemo pozabiti, da se tudi površinska napetost spreminja s temperaturo. V območju okoli kritične temperature je odvisnost napetostne trdnosti od temperature izrazita, za nizke vrednosti glede na kritično temperaturo pa bolj pohlevna. Izračunane supertoplote se najbolje ujemajo v rangu nad 0.9 T_c. Teoretično lahko to opravičimo s tem, da imajo termični efekti večji vpliv od ostalih (onesnaženja s plini in trdnimi delci), medtem ko pri nizkih temperaturah pridejo do izraza ostali vplivi. Žal pa ta model odpove pri najbolj pogosti tekočini, vodi. Posledično to pomeni, da je teorija homogenih jeder, ki jo bomo spoznavali pri nadaljni obravnavi, pri vodi najšibkejša.

Tvorba jeder v gibajoči tekočini in kavitacijsko število

Pojavljanje jeder v tekoči kapljevini predstavlja njihov največji delež tvorbe. Privzamemo, da je tekočina Newtonovska in enofazna, ima konstantno gostoto , hitrost toka in tlak pa opisujemo s pomočjo vektorskih in tenzorskih polj. Za lažjo predstavo privzemimo naj bo tlak skalarnega značaja. Imejmo neko geometrijo obtekanja. Vpeljemo brezdimenzijski tlačni koeficient

$$C_p(x_i) = \frac{p(x_i) - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty} \qquad (2.9)$$

pri čemer bosta količini p_∞ in v_∞ vrednosti stacionarnega toka daleč izven okolja tvorbe kavitacijskih jeder. Do kavitacije prihaja v primeru, ko je tlačni koeficient negativen. Thoma je uvedel kavitacijsko število σ kot absolutno vrednost minimalnega tlačnega koeficienta ob predpisani temperaturi

$$\sigma_i = -C_p \min = -\left[\frac{p(x_i) - p_\infty(T)}{\frac{1}{2}\rho v_\infty}\right] \qquad (2.10)$$

Pri dani geometriji opisujemo viskozne učinke s pomočjo Reynoldsovega števila $Re=\rho_L v_\infty \ell /\mu_L= v_\infty \ell /v_L$, kjer je μ_L n dinamična, v_L pa kinematična viskoznost. Tlačna koeficient in kavitacijsko število sta takrat odvisna od Reynoldsovega števila Re. V neviskoznih tekočinah lahko privzamemo, da sta oba koeficienta odvisna samo od geometrije obtekajočega telesa.

Dosedanji opis je zelo idealističen. Obstaja več razlogov, da se predpostavka o enakosti med kavitacijskim številom σ_i in negativnim tlačnim koeficientom $-C_{pmin}$, ki jo izpeljemo iz znanja o tlakih v enofaznem kapljevinastem toku ne ujema z eksperimentalnimi rezultati:

- napetostna trdnost zmanjša vrednost kavitacijskega števila
- prisotnost plinov v kapljevini poveča vrednost kavitacijskega števila

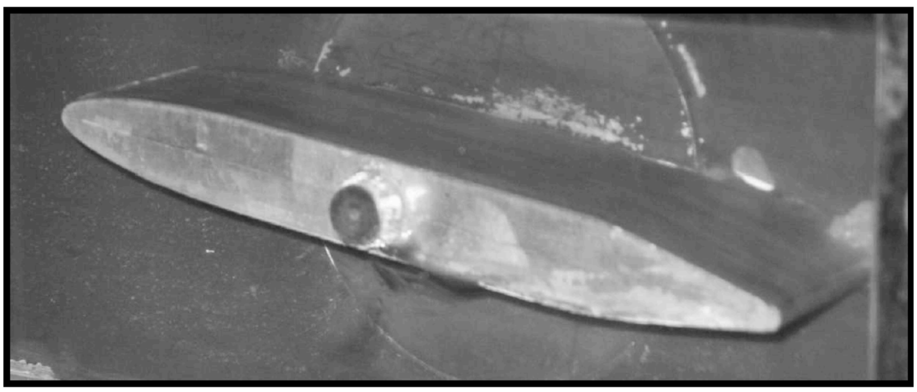
- viskoznost v tekočini, povezana z Reynoldsovim številom, povzroči, da je posledično tudi kavitacijsko število funkcija Re
- učinki turbulence v tekočini povečajo Re
- učinki življenjskega časa mehurčkov zmanjšajo kavitacijsko število
- vpliv časa zadrževanja v območju z nizkim tlakom zmanjša kavitacijsko število

Eksperimentalno moramo kontrolirati sledeče parametre pri opazovanju nastanka kavitacije v gibajoči tekočini:

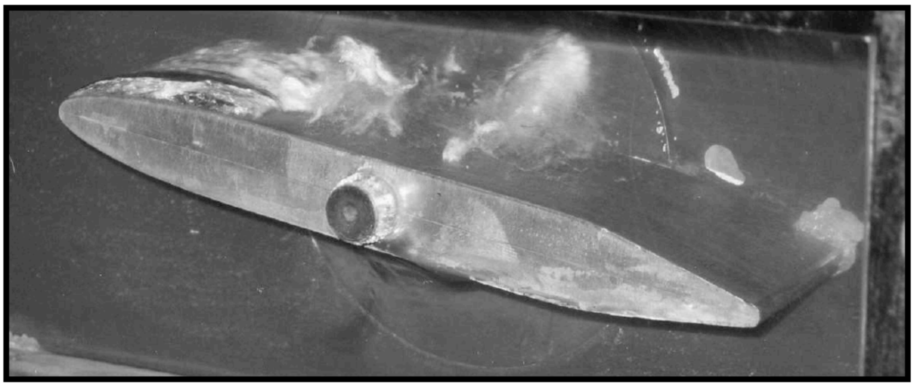
- kvaliteto tekočine (število kavitacijskih jeder v prostega toka tekočine, vsebnost plinov v kapljevini in turbulenco prostega toka)
- kavitacijsko število
- temperaturo tekočine T_∞
- Reynoldsovo število Re
- kvaliteto trdnih stičnih površin s tekočino (hrapavost)

Pojavne oblike kavitacije glede na kavitacijsko število

Pokažemo pojavne oblike kavitacije pri obtekanju telesa z dano geometrijo v kavitacijskem tunelu glede na velikost kavitacijskega števila. Na slikah imamo osamljen profil z eliptičnim vpadnim robom nameščen pod vpadnim kotom $\varphi = 6^\circ$ glede na smer toka. Hitrost toka je stalna, 15 m/s. Pri zmanjševanju tlaka tok preide v dvofaznega, pojavi se prvi mehurčki – nastopi stanje začetne kavitacije. Ob nadaljevanju zmanjševanja tlaka in s tem posledično kavitacijskega števila nastajajo parni strnjeni oblaki, ki potujejo ob profilu – nastane razvita kavitacija. Zadnja faza pri nadaljnem zmanjševanju tlaka se imenuje superkavitacija. Ta preseže dimenzijo obtekajočega telesa. Za njo je značilna ostra meja med obema fazama dvofaznega toka.



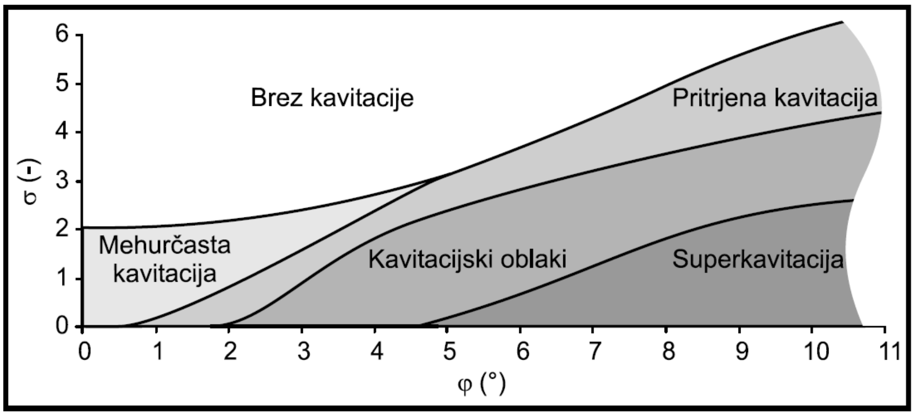
Slika 4. Začetna kavitacija pri $\sigma = 3,5$



Slika 5. Razvita kavitacija pri σ = 2,0

Slika 6. Superkavitacija σ = 0,3

Imamo še kavitacijo osamljenih potujočih mehurčkov v področjih ravnega, nezvrtinčenega toka. Za obtekajoče telo v našem primeru lahko narišemo diagram, ki opredeljuje tip kavitacije v odvisnosti od kavitacijskega števila σ in vpadnega kota φ (tok naj bo stalen)



Slika 7. Diagram pojavnih oblik kavitacije za eliptični profil na slikah pri toku 15 m /s (Širok, Dular, Stoffel, Kavitacija, 2006)

Osnove dinamike krogelnega mehurčka

Pri obravnavi najenostavejšega modela dinamike krogelnega mehurčka se bomo oprli na osamljen mehurček v okolju Newtonovske tekočine s privzetkom, kjer večinoma ne upoštevamo temperaturnih sprememb in morebitnega pretoka toplote. Temperatura v okolici mehurčka torej naj bo stalna, prav tako naj bo konstanten tlak daleč od mehurčka. Seveda bomo tudi komentirali ozadje takih predpostavk in na kratko opisali metodologijo pri drugačnih obravnavah.

Rayleigh – Plessetova enačba in njena izpeljava

Vrnimo se k sliki 2**.** Glavna pozornost je posvečena spremembi radija mehurčka. Zakon o ohranitvi mase zahteva

$$u(\vec{r},t) = \frac{F(t)}{r^2} \qquad (2.11)$$

kjer je sila F(t) povezana z R(t) preko robnih pogojev. V idealiziranem primeru brez masnega pretoka imamo v sferični sliki

$$u(R,t) = \frac{dR}{dt} \qquad (2.12)$$

in ko vse združimo, dobimo

$$F(t) = R^2 \frac{dR}{dt} \qquad (2.13)$$

Ta aproksimacija je lahko dober primer tudi v primeru kondenzacije ali vrenja (kavitacije) na površini mehurčka. Produkcija pare naj bo enaka produkciji velikosti mehurčka $4\pi R^2 dR/dt$, s tem dobimo tudi količino proizvedene pare $\rho_V(T_B)\ 4\pi R^2 dR/dt$ kjer je $\rho_V(T_B)$ gostota nasičene pare pri temperaturi mehurčka. Popravka sta sledeča

$$u(R,t) = \frac{dR}{dt} - \frac{\rho_V(T_B)}{\rho_L} \cdot \frac{dR}{dt}$$

$$F(t) = (1 - \frac{\rho_V(T_B)}{\rho_L})R^2 \frac{dR}{dt} \qquad (2.14)$$

Ker je v večini primerov gostota kapljevine ρ_L mnogo večja od gostote nasičene pare $\rho_V(T_B)$, se zadovoljimo s prvo aproksimacijo.

Nadaljno konstrukcijo naredimo s pomočjo Navier Stokes-ove enačbe za radialno širjenje Newtonovske tekočine

$$-\frac{1}{\rho_L} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} - \nu_L \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) - \frac{2u}{r^2} \right] \qquad (2.15)$$

vstavimo substitucijo

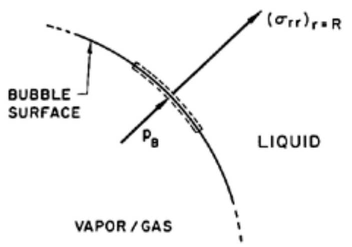
$u = \dfrac{F(t)}{r}$ in dobimo

$$-\frac{1}{\rho_L}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{dF}{dt} - \frac{2F^2}{r^5} \qquad (2.16)$$

Del ob dinamični viskoznosti odpade. Takoj lahko integriramo po r in dobimo novo enakost

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_L} = \frac{1}{r}\frac{dF}{dt} - \frac{F^2}{r^4} \qquad (2.17)$$

Tlak z oznako p_∞ imamo, ko $r \to \infty$. Ozremo se na površino mehurčka in silo na enoto površine v radialni smeri (slika 8)



Slika 8.

$$(\sigma_{rr})_{r=R} + p_B - \frac{2\gamma}{R} \qquad (2.18)$$

ker je $\sigma_{rr}=-p+2\mu_L\partial u/\partial r$, iz tega dobimo za silo na enoto površine

$$p_B - (p)_{r=R} - \frac{4\mu_L}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{2\gamma}{R} \qquad (2.19)$$

Če ni masnega transporta preko meje mehurčka, mora biti ta sila nič in preko prejšnjih izpeljav sledi Rayleigh-Plesset-ova diferencialna enačba za dinamiko mehurčka

$$\frac{p_B(t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_L}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{2\gamma}{\rho_L R} \qquad (2.20)$$

Rayleigh-Plesset-ovo enačbo lahko še izpopolnimo, če vzamemo v obzir še neparno vsebino mehurčka. Privzamemo, da mehurček vsebuje količino onesnažujočega plina s parcialnim tlakom p_{Go} pri neki referenčni razdalji R_o, in temperaturi, T_∞ .Če ni masnega pretoka preko mej mehurčka, lahko tlak mehurčka popravimo z oceno

$$p_B(t) = p_V(T_B) + p_{G_0}\cdot\left(\frac{T_B}{T_\infty}\right)\cdot\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \qquad (2.21)$$

V mnogih primerih ta predpostavka ni najboljša in je potrebno reševati problem masnega transporta v tekočini. Preostane nam določitev temperature mehurčka T_B. V večini primerov je razlika med zunanjo temperaturo medija T_∞ in T_B zanemarljiva, če pa je zaznavna, jo je potrebno upoštevati v Rayleigh – Plesset-ovi enačbi.

Enačba tako dobi obliko

$$\frac{p_V(T_\infty)-p_\infty(t)}{\rho_L}+\frac{p_V(T_B)-p_V(T_\infty)}{\rho_L}+\frac{p_{Go}}{\rho_L}(\frac{T_B}{T_\infty})\cdot\left(\frac{R_0}{R}\right)^3=R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\nu_L}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{2\gamma}{\rho_L R}$$
(2.22)

V enakosti prepoznamo 6 delov:

1. Gonilni del
2. Termični del
3. Pogoji plinov
4. Inertni pogoj
5. Pogoj viskoznosti kapljevine
6. Vpliv površinske napetosti

Prvi ulomek na levi strani enačaja ima vsebovane količine, ki se ne dotikajo mehurčka. Imenujemo ga gonilni del in podaja trenutno napetost. Drugi ulomek na levi strani enakosti je termični del in pričakujemo lahko zelo različne dinamike mehurčka glede na njegov velikostni red. Za zelo majhne temperaturne razlike lahko števec razvijemo v Taylorjevo vrsto do prvega reda

$$\frac{p_V(T_B)-p_V(T_\infty)}{\rho_L}=A(T_B-T_\infty) \qquad (2.23)$$

Konstanta A je določljiva preko Clausius-Clapeyron – ove relacije

$$A=\frac{1}{\rho_L}\frac{dp_V}{dT}=\frac{\rho_V(T_\infty)L(T_\infty)}{\rho_L T_\infty} \qquad (2.24)$$

Zavedati se je potrebno, kako lahko ocenimo temperaturno razliko med notranjostjo mehurčka T_B in zunanje tekočine T_∞. Potrebujemo temperaturno porazdelitev temperature v tekočini ob izbranem času. V ta namen rešimo difuzijsko enačbo za prenos toplote

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{dR}{dt}(\frac{R}{r})\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\alpha_L}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad (2.25)$$

Kjer je α_L termični difuzijski koeficient. Naredimo tudi energijsko bilanco mehurčka. Toplota, ki gre na njegovo površino mehurčka (k_L je koeficient toplotne prevodnosti tekočine)

$$4\pi R^2 k_L\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad (2.26)$$

se troši za nastanek nove pare in s tem povečuje mehurček.

$$\frac{dR}{dt}=\frac{k_L}{\rho_V L}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \qquad (2.27)$$

Od tu lahko ocenimo T_B . Najbolj preprosta obravnava je izotermna (temperaturna razlika je kvečjemu ekstremno majhna) in raziskave kažejo, da je ta upravičena do faze kolapsa mehurčka. Vzemimo v obzir, da obstaja težavnost reševanja zaradi nelinearnostih v zadnji enačbi: ne obstaja analitična rešitev enačbe. Zato se poslužimo lahko novih aproksimacij kot je npr. Plesset- Zwick-ova rešitev. Predpostavimo, da je termična mejna plast δ_T meje mehurčka mnogo manjša od radija mehurčka. V grobem to lahko zapišemo kot

$$R >> \delta_T \approx (T_\infty - T_B) \Big/ \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \qquad (2.28)$$

Plesset-Zwick-ov rezultat

$$T_\infty - T_B(t) = \frac{L\rho_V}{\rho_L c_{PL}\sqrt{\alpha_L \pi}} \int_0^t \frac{[R(x)]^2 \frac{dR}{dt} dx}{\left[\int_x^t R^4(y)dy\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.29)$$

ne vračamo takoj v diferencialno enačbo, pač pa predpostavimo

$$R = R^* \cdot t^n$$

kjer sta R^* in n konstanti. Konstanta n dosega vrednosti med 0 in 1.

Prejšnja enakost se poenostavi na

$$T_\infty - T_B(t) = \frac{L\rho_V}{\rho_L c_{PL}\sqrt{\alpha_L}} R^* t^{n-\frac{1}{2}} C(n) \qquad (2.30)$$

Kjer so koeficienti C(n)

$$C(n) = n\left(\frac{4n+1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{z^{3n-1}dz}{(1-z^{4n+1})^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.31)$$

Termični del Rayleigh-Plesset-ove enačbe postane tako

$$(T_\infty - T_B)\frac{\rho_V L}{\rho_L T_\infty} = -\Sigma(T_\infty) C(n) R^* t^{n-\frac{1}{2}} \qquad (2.32)$$

Kjer je Σ (T_∞) termodinamični parameter, ki določa dinamično vedenje mehurčka. Če obravnavamo stanja nasičene tekočine in nasičene pare, moramo privzeti, da se gostota nasičene tekočine razen v okolici kritične temperature skorajda ne spreminja, medtem ko se gostota nasičene pare spreminja radikalno s temperaturo v območju med 2 in 5 redi velikosti.
Tedaj dobi termični člen zaradi velikosti termodinamičnega parametra bistveno vlogo.

Izotermno obnašanje krogelnega mehurčka

Zanemarili bomo temperaturne spremembe, tako da termični člen v Rayleigh-Plessetovi enačbi odpade. Predpostavimo politropično obnašanje plina znotraj mehurčka

$$p_G = p_{Go}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n} \qquad (2.33)$$

Kjer je n konstanta. Za izotermno obnašanje je n =1 , za adiabatno pa n = κ. Rayleigh – Plesset-ova enačba je tedaj brez termičnega dela in ima poseben plinski pogoj

$$\frac{p_V(T_\infty) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{Go}}{\rho_L}\cdot\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_L}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{2\gamma}{\rho_L R} \qquad (2.34)$$

Če se omejimo na primer skočne spremembe okoliškega tlaka, ($p_\infty(t>0) = p^*_\infty$) in neviskozno tekočino, lahko našo enačbo pomnožimo z $2R^2\frac{dR}{dt}$ in pri začetnem pogoju $\frac{dR}{dt}(t=0)=0$ dobimo

$$\dot{R}^2 = \frac{2(p_V - p^*_\infty)}{3\rho_L}\left[1 - \left(\frac{R_0}{R}\right)^3\right] + \frac{2p_{Go}}{3\rho_L(1-n)}\left[\frac{R_0^{3n}}{R^{3n}} - \frac{R_0^3}{R^3}\right] - \frac{2\gamma}{\rho_L R}\left[1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right] \qquad (2.35)$$

S piko označimo odvod po času. Ker so splošne rešitve parametrične in zapletene, si poglejmo zanimiv limitni primer. Privzemimo da je po zelo dolgem času, $t \to \infty$, $R >> R_0$, zato lahko predpostavimo

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dR}{dt} = \frac{2(p_V - p^*_\infty)}{3\rho_L} \qquad (2.36)$$

Iz napisanega sledi, da po zelo dolgem času ob tej predpostavki radij narašča linearno s časom. Ocenimo lahko tudi kolaps mehurčka. V ta namen se zatečemo k obratni predpostavki $R << R_0$, hkrati pa predpostavimo skočno spremembo tlaka. V limitnem primeru se hitrost spreminjanja velikosti mehurčka približuje

$$\dot{R} \to -\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2(p^*_\infty - p_V}{3\rho_L} + \frac{2\gamma}{\rho_L R_0} - \frac{2p_{G0}}{3(n-1)\rho_L}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3(n-1)}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.37)$$

Ta predpostavka drži v primeru, da je tlak plinov p_{Go} mnogo manjši od tlaka pare p_V. Če ta predpostavka ni izpolnjena, dobimo nihanja mehurčka okoli neke ravnotežne vrednosti (Brenner, 1995). Posledično predpostavka o mnogo manjšem tlaku pomeni tudi manjšo vsebnost plinov v tekočini. Upoštevati moramo, da je proces kolapsa zelo hiter, tako da je v praksi bližje adiabatnemu procesu kot pa izotermnemu. Če bo zadnji člen pod korenom večji od prvih dveh, potem pridemo do ponovne rasti. Logično sklep torej nanese, da nam da ničelna vrednost pod korenom minimalno vrednost velikosti mehurčka

$$R_{\min} = R_0 \left[\frac{1}{(n-1)} \frac{p_{Go}}{(p_\infty^* - p_V + \frac{3\gamma}{R_0}} \right]^{\frac{1}{3(n-1)}} \qquad (2.38)$$

Za opisani primer lahko dobimo tudi maksimalno vrednost tlaka p_{max} in temperature T_{max}.

$$p_{\max} = p_{Go} \left[\frac{\left[(k-1)(p_\infty^* - p_V + \frac{3\gamma}{R_0}) \right]}{p_{Go}} \right]^{\frac{n}{(n-1)}}$$

$$T_{\max} = T_\infty \left[(k-1)(p_\infty^* - p_V + \frac{3\gamma}{R_0}) \right] \qquad (2.39)$$

Če tekočina ne bi bila onesnažena s plini, bi bil po naših predpostavkah minimalen radij krogelnih mehurčkov enak nič. Vsekakor pa je potrebno takoj vzeti na znanje, da opazovanja pokažejo, da je znaten delež mehurčkov pri kolapsu nesimetrične oblike.
Rayleigh je še integriral lastno enačbo in dobil čas trajanja kolapsa mehurčka.

$$t_{col} = 0{,}915 \sqrt{\frac{\rho_L R_0^2}{p_\infty^* - p_V}} \qquad (2.40)$$

Kriteriji stabilnosti kavitacijskih mehurčkov

Enačba (ravnovesne vrednosti naj imajo indeks E)

$$p_V + p_{GE} = p_\infty + \frac{2\gamma}{R_E} \qquad (2.41)$$

nam ne podaja vedno stabilnega ravnovesnega stanja. V dokaz temu se opremo perturbacije ravnovesnega radija in pa opazovanju Rayleigh-Plessetove enačbe. Predpostavimo dva možna primera:

1. Konstantnost parcialnega tlaka plina p_{GE}
2. Masa plina v mehurčku in njegova temperatura naj se ne spreminjata

Omejimo se najprej na drugi primer. Če predpostavimo, da se radij mehurčka poveča za zelo majhen ε, dobimo naslednjo diferencialno enačbo za ta primer

$$R\ddot{R}+\frac{3}{2}(\dot{R})^2+4\nu_L\frac{\dot{R}}{R}=\frac{\varepsilon}{\rho_L}\left[\frac{2\gamma}{R_E}-3np_{GE}\right] \qquad (2.42)$$

V primeru, da je

$$\frac{2\gamma}{R_E} > 3np_{GE}$$

imamo nestabilno rešitev, saj se v tem primeru glede na naravo diferencialne enačbe prične mehurček povečevati. V obratnem primeru imamo stabilno rešitev. V prvem primeru člena $3np_{GE}$ ni, zato imamo vedno nestabilno rešitev. Vzrok temu je pravilna predpostavka, da v našem modelu ne smemo dovoljevati masnega transporta preko meja mehurčka, sicer se le-tem radiji vedno spreminjajo.
Za drugi primer imamo povezavo med ravnotežnim tlakom plina v mehurčku in ravnotežnim radijem mehurčka

$$p_{GE}=\frac{m_G k T_B}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} > \frac{2\gamma}{3nR_E}$$

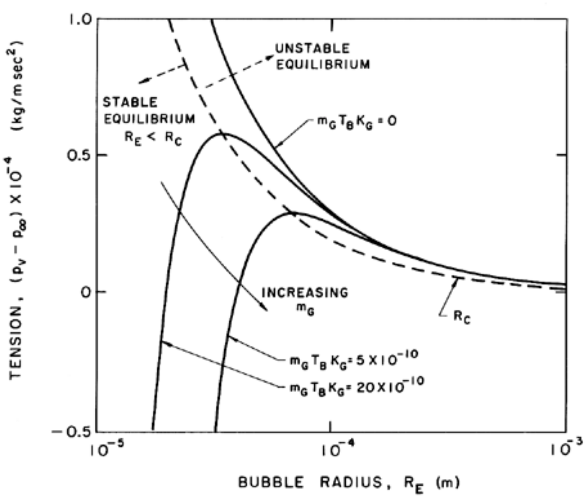
Odtod lahko izrazimo kritični radij mehurčka pri masi plina v njem (Blake , 1961)

$$R_C=\sqrt{\frac{9nm_G T_B k}{8\pi\gamma}} \qquad (2.43)$$

V danih pogojih so vsi mehurčki z radijem manjšim od R_C v stabilnem ravnovesju, vsi z večjim pa so nestabilni. Kritični radij je lahko dosežen s povečanjem zunanjega tlaka

$$p_{\infty c}=p_V-\frac{4\gamma}{3}\sqrt{\frac{8\pi\gamma}{9nm_G kT_B}} \qquad (2.44)$$

Zapisana vrednost se imenuje Blake-ov mejni tlak.



Slika 9. Stabilni in nestabilni ravnotežni radiji kot funkcija pritiska so ločeni na diagrama z črtkano črto (C.E. Brenner, 1995)

Empirična opazovanja so dala povezavo kritičnega radija z kavitacijskim številom in tlačnim koeficientom.

$$R_C \approx \frac{\kappa\gamma}{\rho_L v_\infty^2}(-\sigma - C_{p\min}) \qquad (2.45)$$

C_{pmin} je minimalni tlačni koeficient v toku, konstanta κ pa je blizu enote. Upoštevati moramo, da so lahko tudi kavitacijska števila manjša od tlačnega koeficienta (Brenner). Ne glede na začetno velikost vsa nestabilna jedra z enakimi karakteristikami rastejo do identične maksimalne velikosti.

Povečevanje mehurčkov na račun masne difuzije

Do sedaj smo masni pretok preko meja mehurčkov zanemarjali. Za parcialni tlak plina v mehurčku lahko zapišemo Henry-ev zakon

$$p_{GE} = H(T)c_{sat} \qquad (2.46)$$

H je Henry-eva konstanta, ki je odvisna od trenutne temperature in z naraščajočo temperaturo strmo pada , c pa je ravnotežna koncentracija nasičenega plina. Ta je podana z razmerjem volumnov plina in kapljevine pri difuzijskem ravnotežnem stanju med kapljevino in okolico (plinom)

$$\left(\frac{V_G}{V_L}\right)_{sat} = c_{sat} \qquad (2.47)$$

Ob porušitvi ravnotežnega stanja nastajajo nenasičene ali prenasičene raztopine. Definiramo stopnjo nasičenosti f

$$f = \frac{c}{c_{sat}} = \frac{p_{sat}}{p} \qquad (2.48)$$

Na prosti površini med kapljevino in okolico vedno vlada nasičeno (ravnotežno stanje). V primeru, ko je kapljevina bodisi prenasičena bodisi nenasičena, preko reševanja difuzijskih enačb določimo smer in hitrost transporta raztopljene snovi.
Ločimo:

- f >1 - tok teče iz kapljevine preko proste površine v plinsko notranjost
- f <1 – tok teče iz plina preko proste površine v kapljevino

Plesset in drugi so npr. pokazali, da se mehurček z zgornjimi predpostavkami spreminja kot korenska funkcija časa

$$R \propto \sqrt{t} \qquad (2.49)$$

Lastne frekvence nihanja mehurčka

Gledamo odziv mehurčka na nihajoče tlačno polje, ki ga obdaja. Obravnavamo torej vsiljeno nihanje, kjer dušenje nastopa preko viskoznosti mehurčka, medtem ko termični vpliv in stisljivost za sedaj zanemarimo. Imejmo zunanji tlak p_∞

$$p_\infty = p_0 + \mathrm{Re}\left|p^{'} e^{i\omega t}\right| \qquad (2.50)$$

S p_0 označimo srednjo vrednost tlaka, s $p^{'}$ pa amplitudo nihajočega dela. Odziv velikosti mehurčka na tako tlačno motnjo bo

$$R = R_E \left[1 + \mathrm{Re}\left|\varphi \cdot p^{'} e^{i\omega t}\right|\right] \qquad (2.51)$$

Tu predstavlja φ fazni zamik med nihanjema tlaka in radija. Naredimo vnos v Rayleigh- Plesset-ovo izotermno enačbo, obdržimo samo linearne člene φ. Dobimo

$$\frac{p^{'}}{\rho_L R_E^2 \varphi} = \omega^2 - i\omega \frac{4\nu_L}{R_E^2} + \frac{1}{\rho_L R_E^2}\left[\frac{2\gamma}{R_E} - 3np_{GE}\right] \qquad (2.52)$$

Potrebno je povezati še vse tlake pri srednji vrednosti z ravnotežno enačbo

$$p_{GE} = p_0 - p_V + \frac{2\gamma}{R_E} \qquad (2.53)$$

Resonančna frekvenca nastopi pri

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{3n(p_0 - p_V)}{\rho_L R_E^2} + \frac{2(3n-1)\gamma}{\rho_L R_E^3} - \frac{8\nu_L^2}{R_E^4}} \qquad (2.54)$$

In pri tej frekvenci je amplituda odziva mehurčka

$$R_E|\varphi| = \frac{p^{'}}{4\mu_L \sqrt{\omega_{res}^2 + \frac{4\nu_L^2}{R_E^4}}} \qquad (2.55)$$

Linearna predpostavka drži ob že omenjenih predpostavkah le v primerih, da se pri nihanju velikost ne spreminja drastično (za več velikostnih redov). Če upoštevamo še stisljivost na račun akustičnih valov v tekočini in termični člen, vzamemo vse dosedanje izpeljave tega razdelka, le korigiramo viskoznost v Rayleigh- Plesset-ovi enačbi. Vpeljemo efektivno viskoznost (Chapman in Plesset, 1971)

$$\mu_E = \mu_L + \mu_T + \mu_A \qquad (2.56)$$

Akustična viskoznost (c_L bodi hitrost zvoka v tekočini) je tu

$$\mu_A = \frac{\rho_L \omega^2 R_E^2}{4c_L} \qquad (2.57)$$

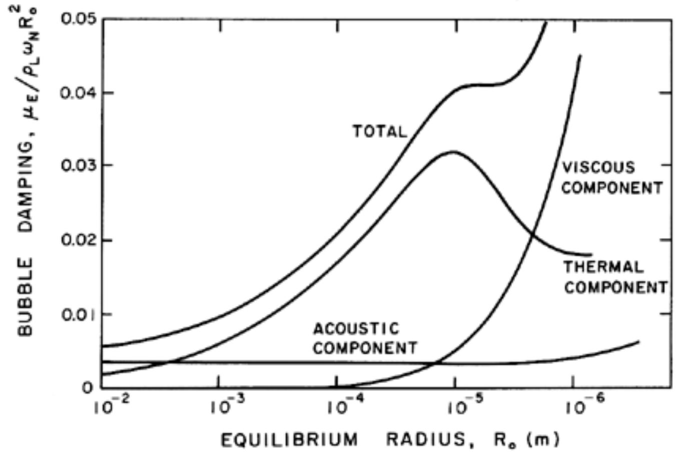
Za vpeljavo termičnega vpliva moramo narediti popravek politropični Rayleigh – Plesset-ovi enačbi. Raziskave in opazovanja datirajo od 1940. Prosperetti, Crum in Commander (1988) vpeljejo

$$\mu_T = \frac{\left(p_0 + \frac{2\gamma}{R_E}\right)}{4\omega} \operatorname{Im} Y \qquad (2.58)$$

Y v tej enačbi je kompleksna funkcija

$$Y = \frac{3\kappa}{1 - 3(\kappa - 1) i\chi \left[\left(\frac{i}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} \coth \left(\frac{i}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]} \qquad (2.59)$$

kjer je κ izentropična konstanta, χ pa brezdimenzijska konstanta $\chi = \alpha_G / \omega R_E^2$, kjer je α_G termična difuzivnost plina.



Slika 10. Vplivi posameznih komponent (Chapman in Plesset 1971)

Nelinearni efekti obveljajo ob večjih spremembah radija. Kavitacija v tem primeru poimenujemo tranzientna kavitacija. Definirajmo »naravno« frekevnco nihanja mehurčka kot poseben primer resonančne, kjer odmislimo viskozni člen

$$\omega_N = \sqrt{\frac{3n(p_0 - p_V)}{\rho_L R_E^2} + \frac{2(3n-1)\gamma}{\rho_L R_E^3}} \qquad (2.60)$$

Če to frekvenco povežemo s stabilnostim kriterijem, ugotovimo, da se stabilne frekvence pojavljajo samo pri stabilnih ravnovesnih stanjih.

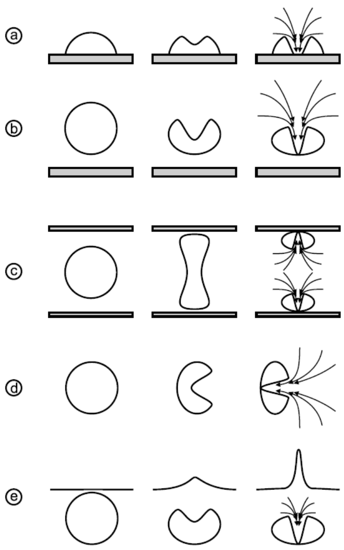
Pri obsevanju tekočine (ki vsebuje mehurčke) z zvokom s frekvenco ω se ne pojavljajo samo superharmonične frekvence nihanja, ki so celoštevilčni večkratniki osnovne frekvence, pač pa tudi subharmonične frekvence, ki so ulomljeni večkratniki osnovne frekvence. Superharmoničnost in subharmoničnost postaneta bolj izrazita v nelinearnem območju. Mejnik za obe področji je Blake-ov prag iz kriterija stabilnosti. Ko razlika med ravnovesno vrednostjo nihanja tlaka in amplitudo preseže Blake-ov prag, imamo nelinearno obnašanje

$$p_0 - p^{'} = p_V - \frac{4\gamma}{3}\sqrt{\frac{8\pi\gamma}{9nm_G kT_B}} \qquad (2.61)$$

Ker velik delež opazovanj nelinearnih pojavov temelji na numeričnih modelih, se v nadaljne primere ne bomo poglabljali. Za konec razdelka omenimo le primer, ko je mehurček v zvočnem polju podvržen sili na račun končne valovne dolžine zvoka. Prisotnost zvočnih valov pomeni tudi tlačni gradient. Fenomen je bil predstavljen v enem izmed prejšnjih seminarjev in je poimenovan Bjerknesova sila.

Kolaps mehurčkov

Slikovno lahko pogledamo par primerov kolapsa mehurčkov (Blake in Doherty 1986, Blake in Gibson 1981).



Slika 11. Primeri kolapsa mehurčkov

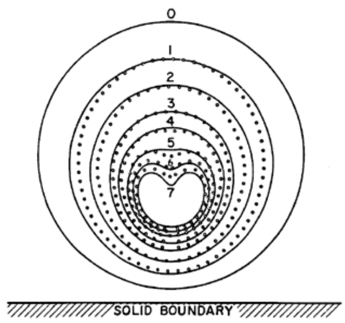
Neposredno je nastanek nesimetrije posledica nehomogenega tlačnega polja v okolici proste površine mehurčka, medtem ko tlak v mehurčku ostaja homogeno porazdeljen. Pri nesimetričnem kolapsu mehurčka nastanejo majhni krogelni mehurčki , ki zaradi prevladovanja površinskih sil implodirajo v krogelni obliki.

Plesset in Chapman (1971) sta prva napovedala nesimetrični kolaps. Vpeljala sta pojem mikrocurka (slika 12). Mikrocurek je tok tekočine, ki »potlači« krogelni mehurček, ga prebije in razdeli na dva simetrična dela. Torej je pojem asimetrije usmerjen predvsem na pojav nekrogelne oblike.
Mikrocurek se vedno bodisi usmeri proti bližnji trdni površini bodisi odmika od proste (elastične) površine, kar lahko vidimo na sliki primerov kolapsa. Izračun hitrosti mikrocurka dobimo s pomočjo izračuna sunka sile. Naj navedem rezultat

$$G = \int_0^{t_{col}} F\,dt = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} B\left(\frac{7}{6},\frac{3}{2}\right)\frac{R_0}{\chi^2}\sqrt{\rho_L\left(p_\infty - p_V\right)} = 3.15\frac{R_0}{\chi^2}\sqrt{\rho_L\left(p_\infty - p_V\right)} \quad (2.62)$$

Tu predstavlja B beta funkcijo, R_0 začetni radij mehurčka in χ brezdimenzijski parameter (d/R_0), kjer je d razdalja do bližnje trdne površine.
Če predpostavimo idealizirani primer, da se vsa potencialna energija mehurčka naloži v kinetično energijo mikrocurka, dobimo hitrost mikrocurka

$$v_{cur} = 8.97 \cdot \chi^2 \sqrt{\frac{p_\infty - p_V}{\rho_L}} \quad (2.63)$$



Slika 12. Primerjava med teoretičnimi napovedmi kolapsa -enotna črta- in realnimi opazovanji z eksperimentom- črtkana črta (Plesset in Prosperetti, 1977)

V primeru tlačne razlike 1 bar in $\chi = 1.5$ znese hitrost mikrocurka 202 m/s. odtu sklepamo, da se lahko s curkom povzroča erozijo trdne površine. Ta pojav nima samo negativnih posledic, kot je poškodba površine trdnih materialov, pač pa ga lahko uporabljamo tudi v pozitivne namene (rezanje materiala, razbijanje ledvičnih kamnov v medicini, čiščenje sten s pomočjo erozije).

ZAKLJUČEK

Naredili smo hiter sprehod skozi osnovne fizikalne opise zakonitosti kavitacijskih krogelnih mehurčkov. Naredili smo manjši vpogled v termodinamično ozadje pojavov, pogledali vrsto in vzrok nastalih jeder s plinsko-parno vsebino, pogledali nekaj osnovnih modelov dinamičnega obnašanja krogelnega mehurčka, Rayleigh – Plessetovo enačbo in njene posebne primere. Veliko pozornosti smo namenili vplivu temperature in izotermnim opisom dinamike mehurčka. Potipali smo nekaj kriterijev stabilnosti in si ogledali nekatere načine kolapsa krogelnih mehurčkov.