

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

SEMINAR

DVODIMENZIONALNI MODELI VZGONA LETALSKIH KRIL

POVZETEK

Seminar metodološko razčlenjuje različne dvodimenzionalne modele tvorbe vzgona na letalskih krilih. Jedro seminar sestavlja obravnavo dveh napačnih modelov ter pravilni model tvorbe vzgona. Seminar zaokrožujejo paradoksi, omejitve in vrednotenje modelov.

Cilj seminarje je sistematsko obravnavati tako pravilne kot nepravilne modele, pokazati zakaj so napačni modeli napačni, med tem procesom pa še prikazati zanimivosti iz aerodinamike in mehanike leta.

PREDAVATELJ: prof. dr. Slobodan Žumer

PREDMET: Seminar II.

LETO: 2004/05

AVTOR SEMINARSKE NALOGE IN SKIC: Sašo Knez

MENTOR SEMINARSKE NALOGE: prof. dr. Rudi Podgornik

LETNIK: 4.

SMER: pedagoška

DATUM: 14.03.2005

1. KAZALO

1. KAZALO	2
2. UVOD	3
3. ZGREŠENA MODELA	3
3.1 BERNOULLIJEVSKI MODEL	3
3.1.1 PARADOKSI BERNOULLIJEVSKEGA MODELA	5
3.1.1.1 NESTABILNOST LETA IN PRIMANJKLAJ VZGONA	5
3.1.1.2 SIMETRIČNI PROFILI	7
3.1.1.3 HRBTNI LET	7
3.1.1.4 EINSTEINOVO KRILO	8
3.1.1.5 SUPERKRITIČNO KRILO	8
3.1.1.6 NEZDRUŽITEV TOKA	9
3.2 NEWTONSKI MODEL	10
3.2.1 PARADOKSI NEWTONSKEGA MODELA	11
3.2.1.1 PARAMETRI IN PRESEŽEK VZGONA	11
3.2.1.2 ODKLANJANJE TOKA PRI VODILNEM ROBU	12
3.2.1.3 HIPERSONIČNA LIMITA	13
4. OVREDNOTENJE ZGREŠENIH MODELOV	14
5. TEOREM KUTTA-ŽUKOVSKI	14
5.1 VRTINČNOST OZIROMA CIRKULACIJA	14
5.2 HITROSTNI POTENCIAL IN TOKOVNA FUNKCIJA	15
5.3 TEORIJA KRIL	16
5.4 POGOJ ŽUKOVskega	18
5.5 DOSEG TEOREMA	18
6. ZAKLJUČEK	19
7. LITERATURA	19

2. UVOD

Seminar metodološko razčlenjuje različne dvodimenzionalne modele tvorbe vzgona na letalskih krilih. Tema je privlačna, ker je teh modelov mnogo. Vsi temeljijo na fizikalnih principih, a so le deloma, če sploh pravilni. V naslednjem razdelku bomo srečali dva najbolj razvpita modela, medtem, ko bomo v poglavju za tem pokazali, zakaj nobeden od teh ni pravilen. V zaključnem poglavju bomo na kratko obdelali še korekten model dinamične sile vzgona.

Vsi ti modeli so dvodimenzionalni. To pomeni, da je tretja dimenzija toka zanemarljivo majhna. V splošnem lahko tak tok obravnavamo, ko imamo tokove ob površinah in v primeru cilindrične simetrije problema.

V seminarju bom največkrat opisoval tok prek krila, kot da krilo stoji in se zrak giblje prek njega. Pravzaprav zaradi relativnosti ni nikakršne razlike, zato bom uporabljal opis pri katerem krilo stoji izmenjujoče z opisom pri katerem se giblje, kateri bo pač na tistem mestu bolj jasn. Vse dvome o enakovrednosti opisov zavrže dejstvo, da so podlaga za načrtovanja kril poizkusi v vetrovniku, kjer je mirujoče krilo izpostavljeno toku zraka.

Prav tako je potrebno poudariti, da je celoten seminar, razen posebej izpostavljenih delov pisan za letalska krila v okviru neviskoznega, laminarnega toka, kar je standardna teoretična predpostavka. Seminar se vseskozi opira na Andersonovo delo [1], izleti v mehaniko leta so podprti z klasičnim Tesičevim delom [2], medtem ko je peto poglavje pisano po Dinamiki tekočin dr. Škrgeta [3] ter po predlogah prof.dr. Podgornika. Posebna referenca je pa še originalni članek Alberta Einsteina iz leta 1916 [5], na kateri je osnovan razdelek 3.1.1.4.

3. ZGREŠENI MODELI

V tem razdelku bom predstavil dva najpogostejša napačna modela vzgona letalskih kril. Oba modela sta po svoje logična in sta zato globoko zakoreninjena. Poleg tega, da se še vedno redno pojavljata v srednješolskih učbenikih ju ponavljajo tudi večje naravoslovne avtoritete, kot so npr. National Geographic. Obema modeloma je sorodno, da se naslanjata na naravne - ohranitvene zakone. Lepota teh modelov pa je, da sta enostavna. V tem razdelku sem sicer včasih dodal komentar, ki sega globlje od splošno ponujenega modela, a sem hkrati poizkušal to poglavje ohraniti čimbolj konceptualno naravnano in takšno je tudi kvantitativno izrazje.

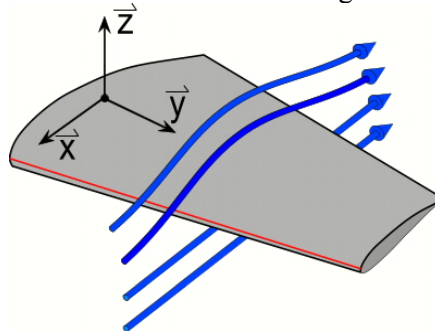
3.1 BERNUOLLIJEVSKI MODEL

Ta model temelji na zgrešeni uporabi Bernoullijeve enačbe. Zato se precej krivično imenuje Bernoullijevski model.¹

Da bomo lahko povsem sledili razlagi moramo razjasniti nekaj omenjenih pojmov.

Tvorbo vzgona tipično razlagamo dvodimenzionalno, torej s tvorbo vzgona na profilu krila. Profil krila si predstavljamo tako, da opazujemo določen prečen presek krila in njemu pripadajoč tok. Ta tok naj ne bo preblizu trupu ne preblizu konici krila, da nas ne skrbijo vplivi konice ali pa korena krila.

Če na letalu postavimo tri telesne osi $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, (skica 1) za katera velja, da $\vec{x}$ kaže v smeri vektorja hitrosti letala $\vec{v}$, medtem ko je $\vec{y}$ pravokotna na simetralo letala od vrha nosa do konca trupa, ki poteka skozi težišče. $\vec{z}$ pa je pravokotna na obe in kaže navzgor.

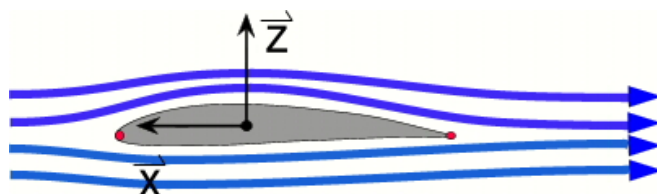


Skica 1

Skica prikazuje orientacijo telesnih osi, tokovnice okrog izbranega preseke v ravnini $\vec{x} - \vec{z}$ (okoli izbranega profila), ter vodilni rob, ki je označen z rdečo.

¹ Bernoullijeva enačba je uporabljena prav, vendar so predpostavke, ki dajejo hitrostno polje napačne. Glej poglavje 5.

Profil krila dobimo če nekje na sredini krila obravnavamo presek v ravnini $\vec{x} - \vec{z}$ (skica 2).



Skica 2

Skica je dvorazsežna upodobitev profila nakazanega na skici 1. Prva in zadnja točka na profilu sta prereza vodilnega in zadnjega robu, oba označena rdeče.

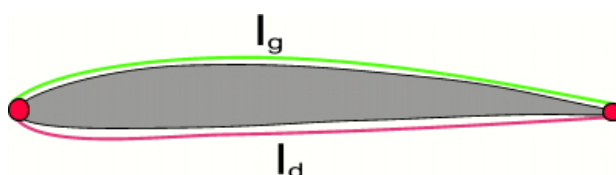
Osnovna predpostavka Bernoullijevskega modela je, da se dva delca zraka, ki ju krilu razdvoji, po prehodu krila spet združita. Eden potuje po zgornji strani krila, drugi po spodnji, medsebojno pa vedno ohranjata relativno lego. (skica 3).



Skica 3

Skica prikazuje dva delca zraka, ki potujeta po različnih straneh krila. Ko prepotujeta krilo, sta spet v istem relativnem položaju kot na začetku.

Iz te skice je tudi jasno, da se v literaturi ta teorija pojavlja tudi pod imenom teorija daljše poti oziroma teorija enakega prehodnega časa.² Dolžina poti zgornjega delca je enaka dolžini površine profila od vodilnega do zadnjega robu. Podobno velja za spodnji delec. Dolžini teh dveh poti označimo z l_g za zgornjo in l_d za spodnjo (skica 4).



Skica 4

Zgornji delec iz skice 3 pri obtekanju krila opravi pot, ki je enaka zgornjemu obsegu krila. Na tej skici je ta pot označena z zeleno barvo in je za njo vpeljana oznaka l_g . Analogno je spodnja pot (l_d) označena z magentno črto.

Bernoullijeva enačba je drugače zapisan zakon o ohranitvi energije. Za določeno tokovnico lahko zapišemo, da je celotna energija konstantna. V našem primeru potem velja:

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konst.} \quad (1)$$

Sedaj lahko zapišemo Bernoullijevo enačbo za tokovnico pod in nad krilom.

² equal path oziroma equal transit time theory

Pri tem lahko člen, ki popisuje gravitacijsko potencialno energijo mirno zanemarimo, ker je dvig oziroma spust tokovnice ob krilu le za debelino krila, torej komaj nekaj centimetrov. Prav tako se skoraj cel seminar naslanja na tvorbo vzgona pri hitrostih obtekanja do 100m/s. V tem hitrostnem območju je sprememba gostote zraka še zanemarljiva zato nam niti ni potrebno v Bernoullijevo enačbo vpeljevati stisljivosti.

$$p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = p_g + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_g^2 = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2. \quad (2)$$

$$p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = p_l + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_l^2 = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2. \quad (3)$$

Enačba 2 opisuje zgornjo tokovnico v točki pred krilom, med obtekanjem krila ter za krilom. Enačba 3 analogno opisuje spodnjo tokovnico.

Omenili smo že osnovno predpostavko Bernoullijevske teorije (skica 3), ki pravi, da delca poti l_g in l_d opravita v istem času Δt . Tako lahko definiramo tudi povprečno hitrost zgornjega $\bar{v}_g$ in spodnjega obtekanja $\bar{v}_d$.

$$\Delta t = \frac{l_g}{\bar{v}_g} = \frac{l_d}{\bar{v}_d}. \quad (4)$$

To malenkostno preoblikujemo:

$$\frac{\bar{v}_g}{\bar{v}_d} = \frac{l_g}{l_d} = R. \quad (5)$$

S tem smo definirali tudi razmerje dolžin zgornje in spodnje strani profila R. Iz enačb 2 in 3 lahko zapišemo razliko tlakov po in nad krilom:

$$\Delta p = (p_g - p_d) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\bar{v}_g^2 - \bar{v}_d^2) = \frac{F_v}{S}. \quad (6)$$

Tukaj smo vpeljali še površino krila S in vzgonsko silo F_v . Vzgonsko silo lahko izrazimo tudi za razmerjem dolžin profila R:

$$F_v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot (v_g^2 - v_d^2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v_d^2 \cdot (R^2 - 1). \quad (7)$$

Tako je po Bernoullijevskem modelu izražena sila vzgona na krilo. Potrebni so privzetki, da je zrak malo stisljiv, da je obtekanje krila laminarno ter da je zrak nevskozen.

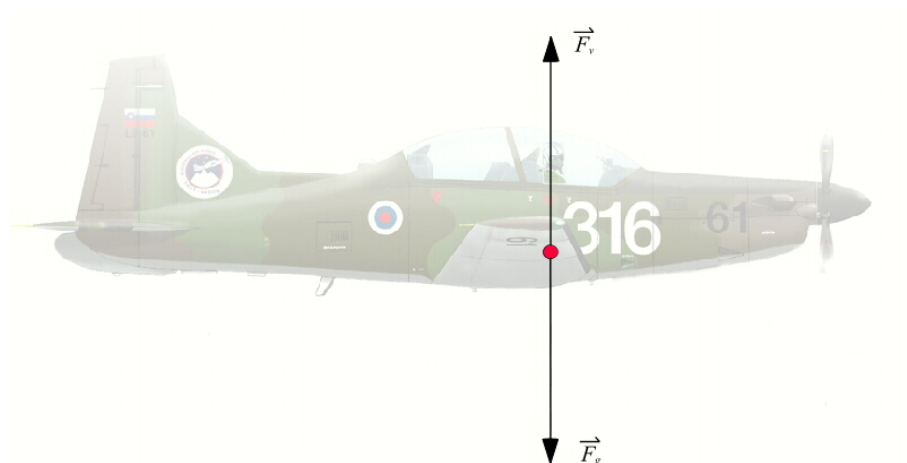
3.1.1 PARADOKSI BERNOULLIJEVSKEGA MODELA

Bernoullijevski model je kljub svoji razširjenosti najbolj hvaležen za iskanje primerov, ki nakazujejo njegovo napačnost. Hvaležen za obravnavo je tudi zaradi obilice praktičnih negacij.

3.1.1.1 NESTABILNOST LETA IN PRIMANJKLAJ VZGONA

Vsi dobro poznamo letalo Pilatus PC-9, ki večkrat v nizkem letu na poti na Brnik preleti našo fakulteto in smo tako lahko precej prepričani, da to letalo dejansko leti. Pilatus tipično tehta 2000kg in leti horizontalno, s hitrostjo $v = 210 \text{ kts} = 108 \text{ m/s}$.

Ker je let horizontalen, letalo ne pospešuje v vertikalni smeri in je vertikalna komponenta hitrosti enaka nič. Vzgonska sila torej uravnotežuje silo teže (skica 5).



Skica 5

Sila vzgona in sila teže na PC-9. Privzeto je, da imata obe sili isto prijemašči, kar ne drži in je zelo pomembno pri aerodinamiki kritičnih napadnih kotov in dinamiki zloma vzgona, a to majhno razhajanje na naš primer ne vpliva prav nič, ker obravnavamo letalo kot točkasto telo.

Po Bernoullijevskem modelu je sila vzgona podana v enačbi 7. Potrebno je le vstaviti numerične faktorje.

Pilatus PC-9 ima profil krila tipa PIL15M825. Čeprav je oznaka lastna tovarni Pilatus je ta profil le razvoj laminarnih profilov nizkih koeficientov upora, ki jih poznamo kot začetnike šest številčne NACA serije profilov.

Faktor R za ta profil je:

$$R = \frac{l_g}{l_d} = \frac{v_g}{v_d} = 1,05.$$

Pri tem izvemo še, da je površina krila na PC-9 $S=16,29\text{m}^2$.³ Privzemimo, da je hitrost letala povprečna vrednost med zgornjo in spodnjo hitrost obtekanja:

$$v = \frac{v_g - v_d}{2} = \frac{v_g \cdot (R + 1)}{2}. \quad (8)$$

Če je letalo v horizontalnem letu, sila vzgona uravnotežuje silo teže.

$$F_v = F_g = m \cdot g = S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_g^2 \cdot (R^2 - 1).$$

$$v_g = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{S \cdot \rho \cdot (R^2 - 1)}}.$$

Če sem vstavimo hitrost letala iz enačbe 8 dobimo:

$$v = \frac{R + 1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{S \cdot \rho \cdot (R^2 - 1)}}. \quad (9)$$

Točna vrednost hitrosti nas zaenkrat niti ne zanima preveč. Bistveno je, da je hitrost letala za stabilni let ena sama. Vsi parametri v enačbi 24 so namreč dimenzije letala. V enačbi nastopajo razmerje med spodnjo in zgornjo potjo obtekanja krila, mase letala in površine kril. Med letom se ti faktorji ne spreminjajo, zato bi bila hitrost letala, pri kateri bi bil horizontalen možen ena sama.

Ker pa vse te dimenzijske podatke za PC-9 že imamo pa izračunajmo še vrednost vzgona pri zgoraj omenjenih pogojih leta. Pri povprečni operativni masi Pilatusa $m=2000\text{kg}$ je ustrezna sila teže

$F_g = 19620\text{N}$. V horizontalnem letu je vsota sil v vertikalni smeri enaka:

$$\sum F_z = F_v - F_g = m \cdot \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

$$F_v = F_g = 19620\text{N}.$$

Če sedaj iz enačbe 8 izračunamo dejansko vrednost vzgonske sile, pri opisanem režimu leta, dobimo:

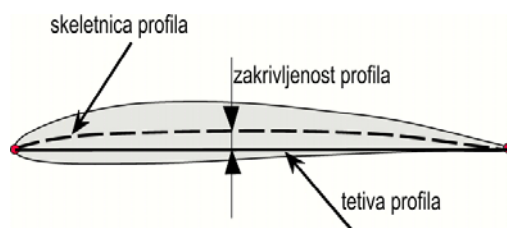
$$F_v = S \cdot \frac{1}{2} \rho (v_g^2 - v_d^2) = S \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot (R^2 - 1) = 16,29 \text{ m}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 108^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} (1,05^2 - 1) = 11045 \text{ N}$$

Torej nam idealiziran Bernoullijevski model da vzgon, ki je okrog dvakrat premajhen od dejanske vrednosti, ki je potrebna za režim leta, za katerega vemo, da je izvedljiv. Podoben izračun za najbolj razširjeno zasebno letalo C-172 med križarjenjem pa da kar dvajsetkrat premajhno silo vzgona, kot jo krilo dejansko proizvaja.

³Vsi podatki o masah, hitrostih in krilu samem so posredovani od Pilatus Aircraft Ltd.

3.1.1.2 SIMETRIČNI PROFILI

Simetrični profil je definiran, kot profil, ki ima enako oblikovano spodnjo in zgornjo površino. Da lahko bolj natančno opišemo simetrični profil potrebujemo nekaj osnovnih pojmov konstrukcije kril (skica 6).



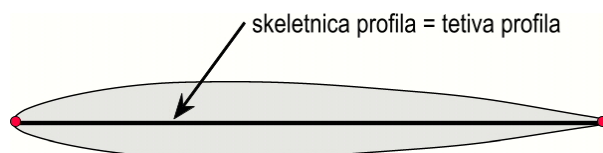
Skica 6

Na tej skici so prikazani trije osnovni parametri krila

Na profilu definiramo tetivo profila, kot daljico, ki povezuje vodilni in zadnji rob krila.

Prav tako pa definiramo še skeletnico profila, ki je sredinska črta, torej črta, ki je vedno na sredi med zgornjo in spodnjo površino krila.

Razlika med tetivo in skeletnico profila je zakrivljenost profila. Torej lahko simetrični profil definiramo, kot popolnoma nezakrivljen profil. Pri simetričnim profilom je tetiva hkrati skeletnica profila. Obenem lahko povemo, da je razmerje definirano v enačbi 5 enako $R=1$.



Skica 7

Skica 14 prikazuje simetrični profil in sovpadanje skeletnice in tetive profila.

Po Bernoullijevskem modelu, takšen profil ne bi smel proizvajati vzgona, saj je sta poti delcev zraka nad in pod krilom identični. Če sta poti identični, bi potem pričakovali, da bo takšna tudi hitrost. Razlika identičnih hitrosti je nič in tolikšen bi moral biti tudi vzgon.

Vendar se izkaže, da je v normalnih režimih leta simetrični profil praktično enako učinkovit, kot primerljiv zakrivljen profil. Pravzaprav imajo nekatera letala krila izključno simetričnih profilov.

3.1.1.3 HRBTNI LET

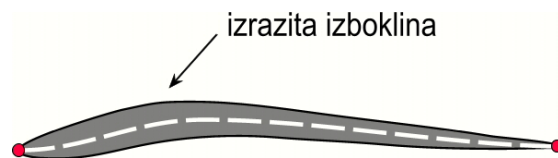
Bernoullijevski model nikakor ne zmore pojasniti hrbtnega leta. Če se letalo obrne na hrbet "napačno" orientira krilo. Krilo bo tako imelo spodaj večjo pot, s tem večjo hitrost, in bo tako sila vzgona delovala navzdol. Torej, po Bernoullijevski razlagi letala nikakor ne bi mogla leteti na hrbtu, kar pa seveda vemo, da zmorejo.

Še bolj zanimivo je, da so akrobatska letala, ki morajo imeti dobre letalne lastnosti tudi v hrbtnem letu skoraj izključno opremljena s krili s simetričnimi profili, ki že sama po sebi ne bi smela proizvajati vzgona (razdelek 3.1.1.2). Slovenijo tako skoraj dnevno preletava dvokrilni akrobatski Pitts S2B, ki ima vgrajena krila s simetričnim profilom.

3.1.1.4 EINSTEINOVO KRILO

Med prvo svetovno vojno je bil Albert Einstein kot svetovalec nekaj časa zaposlen pri priznani nemški letalski tovarni LVG (Luft-Verkehrs-Gesellschaft).

Pri LVG-ju je leta 1916 zasnoval profil krila, z izrazito sredinsko izboklino, ki naj bi povečala vzgon (skica 8). Izboklina naj bi povečala pot zraka nad krilom, s tem povečala razliko hitrosti ter tako povečala vzgon. Profil je dobil slikovito ime profil mačjega hrbta.



Skica 8

Skica 15 shematično prikazuje profil mačjega hrbta z izrazito izboklino.

Takšen profil je bil preizkušen v Gottingenskem vetrovniku in tudi s kratkim programom preizkusnega letenja, ki ga je opravil nemški letalski pionir Paul Georg Erhardt. Med preizkusi se je izkazalo, da je takšen profil, ki sicer po Bernoullijevskem modelu dobra zamisel, čisti neuspeh. Letalo se je komaj odlepilo od tal in Erhardt je neuradno izjavil da letalo leti skoraj tako dobro, kot zelo debela raca. Einstein se je Erhardt kasneje v pismu opravičil in priznal, da je zagrešil napako in to takšno, ki se lahko zgodi človeku, "ki veliko razmišlja in malo bere". S tem je komentiral svoje nepoznavanje takratne literature o dinamiki tekočin, katera bi gotovo preprečila takšno napako.

3.1.1.5 SUPERKRITIČNO KRILO

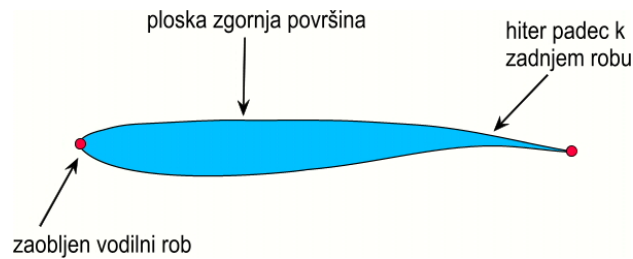
V šestdesetih letih je bila potovalna hitrost povprečnega potniškega letala okrog $0,7M - 0,8M$.⁶ Pri tej hitrosti je bilo letenje najbolj ekonomično. Nižja hitrost podaljšuje potovanje in s tem stroške, medtem ko pa že malo višja hitrost pripelje do težave lokalnega nadzvočnega toka. Kot bo razvidno v razdelku 3.1.1.6 so profili zelo učinkoviti pri pospeševanju zraka. Tako je hitrost obtekanja večja, kot je hitrost gibanja letala skozi zrak. Če se letalo giblje s hitrostjo, ki je blizu hitrosti zvoka, lahko zrak obteka krilo z nadzvočno hitrostjo. Tako poleg Machovega števila letala definiramo še lokalno Machovo število, ki nam pove hitrost obtekanja na določenem mestu konstrukcije.

V letalstvu ločimo več vrst uporov, ki se pojavljajo na letalu zaradi različnih vplivov. V režimu s hitrostmi pod $100m/s$ sta dominantna predvsem parazitski (oblikovni) ter vzgonski (inducirani). Transonični pojavi so zelo zapleteni in bi z njimi zlahka napolnil vsaj še en seminar. Tukaj pa podajam samo to, da se v tem režimu vrednost valovnega upora zelo hitro, zelo poveča. Torej, če hočemo letalo pospešiti iz območja $0,8-0,9M$ do zvočnega zidu bomo potrebovali ogromno energije.

Tradicionalne rešitve za zniževanje lokalnega Machovega števila so bile, da se poveča kot puščice krila ali pa, da se tanjša krilo. Obe rešitvi sta tehnično neprijetni, ker se s povečanjem kota puščice hitro slabšajo letalne lastnosti pri nizkih hitrostih, s tem se večja pristajalna hitrost, večajo strukturalne obremenitve pri pristajanju in tako tudi stroški vzdrževanja. Tanjšanje krila je nezaželeno predvsem, ker je potem potrebno potem rezervoarje za gorivo preseliti v trup, kar zmanjša potniško kabino, zmanjša število sedežev in s tem zmanjša dobiček na let.

V šestdesetih najbrž ni nihče boljše razumel transoničnega obtekanja zraka kot Richard T. Whitcomb. Whitcomb je takrat že zasnoval letala po Area Rule principu. Te letala se prepoznajo, da imajo izptičje perspektive trupe oblike steklenice za Coca-Colo. Whitcomb se je tako lotil še problema zviševanja kritičnega Machovega števila.

Temu namenjeno krilo je imelo bolj zaobljen vodilni rob, bolj ravno zgornjo ploskev in končni rob, ki se hitro krivi navzdol. To krilo je poimenoval superkritično krilo (skica 9).



Skica 9

Značilnosti superkričnega krila.

Superkrično krilo je omogočalo, da je letalo letelo do 10% hitreje, brez, da bi doseglo kritično Machovo število (skica 10). Letalska industrija je rešitev pograbila, a na zanimiv način. Namesto, da bi višala hitrost na 0,9M, kot bi ji superkrično krilo ekonomično omogočalo, je hitrost letal zadržala na 0,8M, a so letala s superkričnim krilom v tem režimu porabljala manj goriva kot prej. Letala s superkričnim krilom tako niso hitrejša, kot je bilo v osnovi zamišljeno, ampak so samo cenejša.



Skica 10

Primerjava klasičnega in superkričnega krila v transoničnem režimu. Superkrični profil ima pri večji hitrosti veliko manjši tlačni gradient (wave shock) in tudi manjši obseg separirane plasti, kar pozitivno vpliva tako na krmljivost kot na upor letala.

⁶ 0,8M pomeni 80% nadzvočne hitrosti. Ta hitrost je odvisna od gostote zraka.

Izlet v aerodinamiko visokih hitrosti je bil potreben, da razumemo prednosti superkričnega krila. Te prednosti pa nimajo nič s temo seminarja.

Paradoks superkričnih kril, ki nakazuje napačnost Bernoullijevskega modela je namreč očiten že pri nizkih hitrostih, kjer nas transonične težave še ne skrbijo.

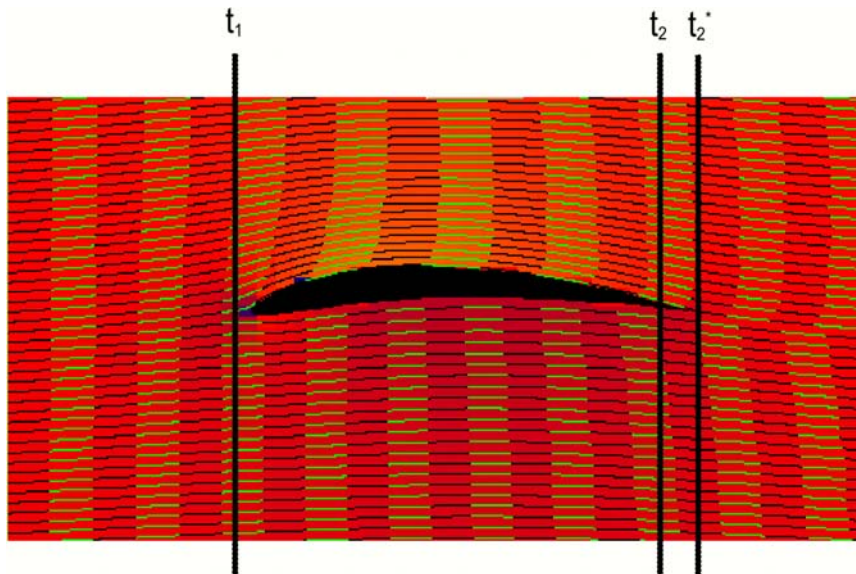
Če superkrično krilo obteka zrak z hitrostjo do 100m/s, torej nekako v območju 0.1-0.3M to krilo po Bernoullijevskem modelu ne bi smelo proizvajati vzgona. Že iz skice 16 je očitno razvidno, da je pot obtekanja pod krilom daljša od zgornje ($R < 1$). Tako bi moral "vzgon" delovati navzdol.

Vendar letala z vgrajenim superkričnim krilom letijo. Seveda letijo tudi pri nizkih hitrostih in izkaže se, da so letalne lastnosti tega krila pri nizkih hitrostih celo boljše od primerljivega konvencionalnega krila.

3.1.1.6 NEZDRUŽITEV TOKA

Če ponovimo je glavna predpostavka zakaj bi morala biti hitrost obtekanja na zgornji površini krila večja kot na spodnji da se dva delca zraka, ki se nahajata ena pod in ena nad stagnacijsko linijo po prehodu čez in pod krilom nahajata spet na istem mestu. Torej zadeneta krilo ob času t_1 in se od krila hkrati ločita ob času t_2 (Skica 3).

Vendar poskusi v vetrovniku vedno pokažejo, da je ta predpostavka neupravičena (skica 11).



Skica 11

Obtekanje krila pri $\alpha=0$. Rumeni odseki silnic so pulzne črte.

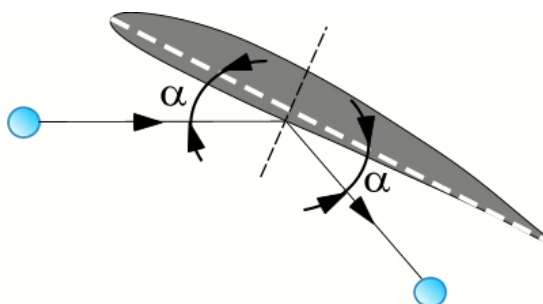
Na skici 11 je prikazano krilo v vetrovniku. V vsaki silnici je časovno razdeljena na periodične dele. V nemotenem toku je rumen del enako dolg kot črn. Na skrajnem levem delu skice vidimo tudi dolžino teh delov v nemotene toku. Zelene pulzne črte nam lahko služijo tudi, kot pokazatelj hitrostnega polja. Daljša črta - večja hitrost.

Opazimo dvojje. Iz teh podatkov je povsem očitno, da centralna predpostavka o združevanju delcev zraka za krilom ne velja. Zgornji delec zraka zapusti krilo ob času t_2 , medtem ko spodnji zapusti ob drugem času (t_2^*).

Opazimo pa še, da je osnovna zamisel Bernoullijevskega modela pravilna. Vsekakor je zgornji delec zraka hitrejši od spodnjega in je to korekten vzrok za tvorbo vzgona. A ta razlika v hitrostih nikakor ni pogojena z razliko poti obtekanja. Globlje o tem pa v poglavju 4.

3.2 NEWTONSKI MODEL

Newtonski model je poizkus obravnave makroskopskih pojavov na krilu z mikroskopsko sliko, ki je podobna kinetični teoriji plinov. Vzgon naj bi se tvoril zaradi trkov zračnih molekul ob spodnjo stran krila (skica 12). Vzgon je tako posledica spremembe gibalne količine molekul, od tod tudi ime - Newtonski model.



Skica 12

Skica 5 prikazuje trk ene molekule zraka z krilom.

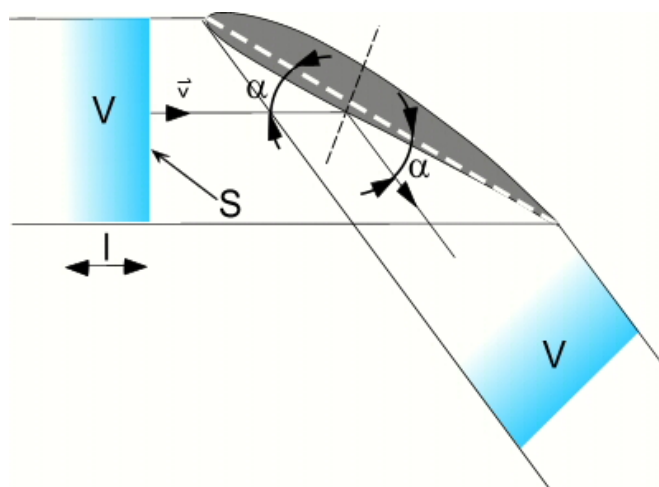
Preden preidemo na izračun vzgona pa definirajmo še zelo pomembno količino v teoriji kril – naletni kot. Naletni kot oziroma α , je kot med tetivo profila in vektorjem hitrosti nemotenega toka.

V letalski literaturi se zelo dosledno uporablja izraz "*napadni kot*", v angleščini pa ustreza izraz "*angle of attack*" oziroma včasih skrajšano AOA. V slovenski literaturi se uporablja še izraz "*natočni kot*", a le zelo splošno skozi celo mehaniko tekočin. Skozi seminar bomo tako uporabljali slovenski aerodinamiki lasten naletni kot.

Iz skice 12 je razvidno, da se gibalna količina molekule pri trku s krilom spremeni za:

$$\Delta G = 2 \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha . \quad (10)$$

Sedaj pa namesto ene same molekule obravnavamo cel paket molekul s prostornino V , ki se v povprečju giblje s hitrostjo $\bar{v}$ (skica 13).



Skica 13

Skica 6 prikazuje trk paketa zraka s krilom

Če privzamemo, da se vse molekule zraka odbijejo na enak način, torej da je spodnja stran krila skoraj ravna dobimo, da se paketu zraka z volumnom V gibalna količina spremeni za:

$$\Delta G = 2 \cdot \rho \cdot V \cdot v \cdot \sin \alpha . \quad (11)$$

Sprememba gibalne količine zraka je seveda sunek sile na krilo:

$$\Delta G = F \cdot \Delta t = p \cdot S \cdot \Delta t = p \cdot \frac{V}{v} . \quad (12)$$

Če združimo in preoblikujemo enačbi 11 in 12 dobimo:

$$F = 2 \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sin \alpha . \quad (13)$$

Vendar sila F v tem primeru ni samo vzgonska, ampak je reakcija trkov, ki ni usmerjena samo v $\vec{z}$ os ampak vključuje tudi komponento, ki krilo zavira. Vzgonsko komponento izrazimo s naltenim kotom:

$$F_v = F \cdot \cos \alpha . \quad (14)$$

Vnesemo enačbo 12 v 11 in ju preoblikujemo, da izrazimo vzgonsko silo:

$$F_v = 2 \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = S \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sin 2\alpha . \quad (15)$$

Vzgonska sila po Newtonski razlagi se bistveno razlikuje od vzgonske sile po Bernoullijevski razlagi po tem, da vsebuje še odvisnost od naletnega kota α .

3.2.1 PARADOKSI NEWTONSKEGA MODELA

Newtonski model nam postreže z manj konceptualnimi paradoksi kot Bernoullijevski, vendar so ti še vedno nepremostljivi. V razdelku 3.2.1.3 si bomo ogledali še limito, ki na prvi pogled ne spada povsem med paradokse, a zelo očitno pokaže doseg oziroma omejenost te razlage.

3.2.1.1 PARAMETRI IN PRESEŽEK VZGONA

Še enkrat zapišimo enačbo 15:

$$F_v = 2 \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = S \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sin 2\alpha .$$

Smatrajmo površino kril S za konstrukcijsko podano konstanto, ki naj se ne bi med letom spreminjala. Opazimo, da sta tako v enačbi za silo vzgona še dva parametra:

$$F_v = f(v, \alpha) . \quad (16)$$

To se nam seveda zdi boljše, kot pri Bernoullijevskem modelu, ker to pomeni, da lahko letalo leti pri več različnih hitrostih. Potrebno silo vzgona ustvarja letalo tako pri nižjih hitrostih z večjimi naletnimi koti, medtem ko se naletni koti pri večjih hitrostih manjšajo. To dejstvo lahko opazimo tudi na letališčih, če opazujemo pristajajoče letalo. Ker ima zaradi pristajanja hitrost zmanjšano, ima nos dvignjen, torej je naletni kot večji.

Da številčno ovrednotimo Newtonski model si še enkrat v spomin priključimo primer iz razdelka 4.1.1. Da izračunamo vzgonsko silo, potrebujemo še podatek o naletnem kotu pri že prej opisanem režimu leta. Ta podatek je ocenjen, ker je odvisen med drugim tudi od razporeditve mase v letalu, torej lege težišča in drugih parametrov. Naletni koti za ta režim tako za kakšno stopinjo nihajo okrog reprezentativne vrednosti $\alpha=5^{\circ}$. Silo vzgona tako ocenimo na:

$$F_v = S \cdot \rho \cdot v^2 \cdot \sin 2\alpha = 16,29m^2 \cdot 1,2 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(108 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot \sin 10^{\circ} = 39600N.$$

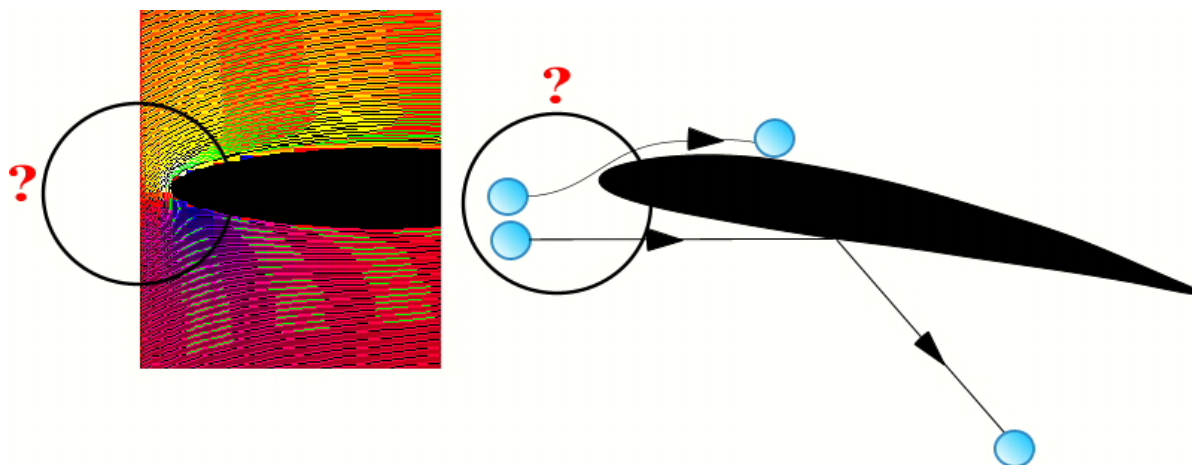
Priključimo si še v spomin, da mora vzgonska sila uravnoteževati silo teže, ki znaša:

$$F_g = 19620N.$$

Če smo po Bernoullijevski teoriji dobili silo vzgona dvakrat premajhno, po Newtonski dobimo silo dvakrat preveliko.

3.2.1.2 ODKLANJANJE TOKA PRI VODILNEM ROBU

Če se spet naslonimo na opazovanja iz vetrovnika pri podrobnem opazovanju opazimo še eno neskladnost (skica 14).



Skica 14

Levo simulacija silnic pred krilom in desno skica dogajanja.

Če na skici 19 pozorno opazujemo silnice v krogu z vprašajem, potem lahko opazimo, da se pred krilom nekatere silnice, torej delci zraka, ki so "pod" krilom, odklonijo nad vodilni rob.

Torej, če spremljamo delec zraka, se zaradi neznanega razloga odkloni nad krilo, kot je nakazano na skici 19 na desni strani. Z Newtonskim modelom je to povsem nemogoče pojasniti.

V ozadju tega se skriva dejstvo, da je vodilni rob le konstrukcijska točka, medtem, ko je aerodinamično definirana točka druga. Tej točki rečemo zastojna oziroma stagnacijska točka in je določena s tem, da je v tisti točki hitrost obtekanja zraka nična. Po tej točki vzdolž krila se torej lahko muha mirno sprehaja, čeprav letalo leti z nekaj sto kilometri na uro.

Lega zastojne točke se spreminja v odvisnosti od naletnega kota. V letalstvu tako obstaja naprava, ki se nahaja nekje na vodilnem robu. Ta naprava je premična paličica, ki se odklanja proti zastojni točki. Večinoma lahko pričakujemo zlom vzgona pri kritičnih naletnih kotih v območju od 15° - 23° .

Zastojna točka je pokazatelj naletnega kota, zato ko se zastojna točka premika, proti legi v kateri se nahaja pri kritičnih naletnih kotih je ta paličica povezana z električnim stikalom, ki sproži piskanje v pilotovih slušalkah, ki ga opozori na bližajoči se zlom vzgona. Ta naprava je izdatno izboljšala varnost letenja.

3.2.1.3 HIPERSONIČNA LIMITA

Že nekajkrat smo omenili, da v aerodinamiki ločimo več hitrostnih področjih. S tujkami so ta področja razdeljena v subsonično ali podzvočno, kjer stisljivost nima velika vpliva, transsonično, kjer imajo zelo opazno vlogo udarni valovi in stisljivost ter supersonično, kjer obravnavamo nadzvočni tok.

Naj še enkrat poudarim, da so ta področja razdeljena po fizikalnem premisleku. Razdeljena so namreč po prevladujočih pojavih v teh hitrostnih področjih. V subsoničnem lahko pozabimo na stisljivost, ki pa postane vodilna pri trans in supersoničnem področju. Zaradi nezmožnosti popolne analitične obravnave dinamike tekočin je potrebno za vsakodnevno prakso poiskati udobne približke. Med drugim so tako za različna hitrostna področja tudi različni približki.

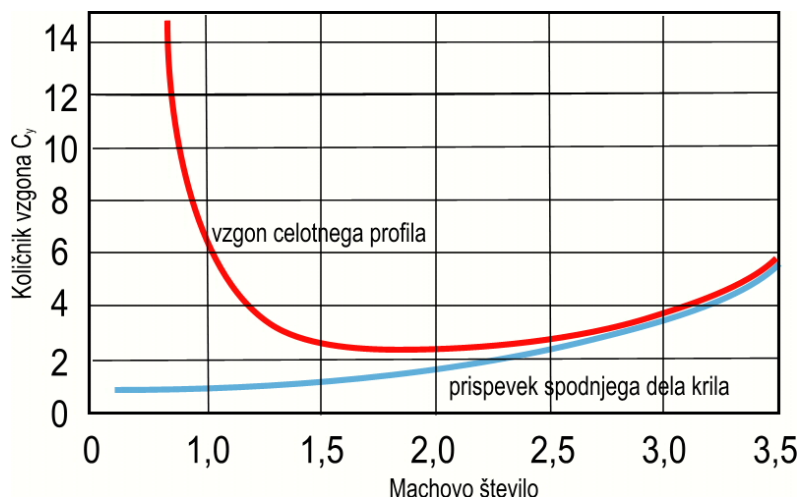
Med hitrostnimi področji nam pa ostane še hipersonično področje. Izraz je težko sloveniti, mogoče bi bilo najbolje kar hiperzvočno področje, vendar bo dovolj podatek, da je to področje, kjer se hitrosti gibljejo od 3M do 5M.

To področje se zdi zelo težko dosegljivo, vendar je predmetov, ki se gibljejo hipersonično v izobilju. Vsakdanje se predmeti v tem režimu gibljejo pri vstirjanju v ali iz zemeljske orbite, nižje v atmosferi so pa to večinoma predstavniki raznih izstrelkov za bojne namene.

Enostavna hipersonična aerodinamika se razlikuje od aerodinamike nižjih hitrosti v predpostavki, da se hipersonična telesa gibljejo višje v atmosferi, kjer se Navier Stoksove in Eulerjeve enačbe podrejo, ker zrak boljše opiše kinetična teorija, kot kontinuum. Prosta pot molekule zraka je v hipersonični limiti istega reda velikosti, kot predmet, ki se giblje v tem zraku. Vsekakor pa hipersonični režim leta podre dva robna pogoja.

Prvi spremenjen robni pogoj je, da je povsem na površini telesa lahko tangencialna hitrost neničelna. Drug robni pogoj, ki pa ne velja več je, da je temperatura zraka ob obtekani površini telesa enaka temperaturi te površine. Vsekakor je izmenjevanje toplote bistven element v hipersonični limiti, saj je potrebno upoštevati tudi, da je zrak zaradi te toplote podvržen tudi različnim kemijskim reakcijam in ni več molekularno homogen. To vso stvar še dodatno zaplete in je pri načrtovanju hipersoničnih plovil tudi potrebno upoštevati.

Za nas najbolj zanimiva lastnost pa je, da se silnice v od toka zasenčene predele skoraj ne krivijo. Seveda je to ravno centralna predpostavka Newtonskega modela. Doseg tega modela pa lepo prikazuje graf 1.



Graf 1

Graf prikazuje količnik vzgona v odvisnosti od hitrosti podane v Machovem številu. Na grafu sta izrisana celoten prispevek profila in prispevek samo spodnjega dela krila. Tako modra črta predstavlja Newtonski model medtem ko rdeča predstavlja dejanski vzgon. Količnik vzgona C_y je brezdimenzijski eksperimentalno določen faktor, ki ga vstavimo v empirično enačbo $F_v = f(v, r, S, C_y)$

Iz grafa 1 je razvidno, da je pri hitrostih večjih od treh Machov prispevek spodnje strani krila skoraj identičen vzgonu celotnega krila. Iz tega se lahko poučimo, da je zgornja stran krila zares zasenčena in tam ne pride do tvorbe vzgona.

Še pomembnejše je pa razhajanje teh dveh krivulj v področju nižjih hitrosti. Torej je Newtonski model primeren samo za hipersonični režim, eksakten pa v limiti, ko gre hitrost proti neskončnosti:

$$M \rightarrow \infty. \quad (17)$$

4. OVREDNOTENJE ZGREŠENIH MODELOV

Iz prejšnjega poglavja uvidimo, da sta podana modela zgrešena. Že en sam paradoks, bi bil dovolj, da se model označi za nepopolnega oziroma zgrešenega, vendar je teh paradoksov pri vsakem izmed teh modelov še nepregledno mnogo.

Prva skupna lastnost modelov je, da sta prepoenostavljena. Napačnih modelov je še mnogo. Čeravno so oprti na osnovne fizikalne principe, kot so ohranitev energije, izrek o gibalni količini ter ohranitev volumskega toka, se v toku izpeljav teh modelov vedno pojavi ena napačna, čeprav intuitivno pravilna predpostavka.

Pri Bernoullijevskem modelu je hitrostno polje intuitivno predpostavljeno s potmi obtekanja. Potrebno je še posebej poudariti, da je vzgonska sila v okviru nevizkoznih tekočin seveda izračunljiva z Bernoullijevo enačbo, saj na tem sloni Blasiusov teorem, ki bo s pridom in korektno uporabljen v naslednjem poglavju. Vendar je potrebno v Bernoullijevo enačbo vstaviti pravilno hitrostno polje, ki pa smo se že dodobra prepričali, da ni tako enostavno, da bi ga lahko osnovali in popisali na nekaj razvidnih in intuitivnih fizikalnih dejstvih.

Vsekakor je izmed obeh modelov Newtonski še nekako največ vreden, vendar je še vedno v območju majhnih hitrosti povsem neuporaben, ker je tu zrak veliko bolj kontinuum, kot pa idealni plin.

Omeniti je potrebno še, da je v okviru napačnega pojasnjevanja močno zastopana množica prekompleksnih pojavov, ki naj bi pojasnili vzgon na letalsko krilo. Eden izmed takih je Coandavski model, ki je za vrednotenje zelo zapleten. Pod Condavim pojavom razumemo pojave, kjer opazujemo curek, ki zadene ob ukrivljeno površino. Pri obravnavi tega zato ločimo cel spekter pojavov, ki so enake oblike, a imajo zelo različne vzroke nastanka. Takšne modele bolje razumemo kot čarobno besedo, za katero se skriva nezmožnost enostavne dvodimenzionalne razlage tvorbe vzgona na profil krila.

5. TEOREM KUTTA - ŽUKOVSKI

Obdelali smo štiri napačne modele ter štiri razdelke v katerih smo pojasnili zakaj so ti modeli napačni. V tem poglavju sledi še korekten dvodimenzionalni model, v okviru idealnih tekočin.

Preden pa se lotimo teorema pa še opomba pri slovenjenju imena Žukovski. Nikolai Žukovski je bil ruski aerodinamik. Zato originalno njegov priimek zapišemo, kot Жуковский. V tuji literaturi se pojavlja ta priimek zapisan kot Zhukovksy v angleških besedilih in Joukowski v francoskih. Ker bi uporaba teh dveh izvedenk priimka pomenila dvojni prevod priimka, bom uporabljal zapis Žukovski, ki je povrh še bližje izvornem priimku.

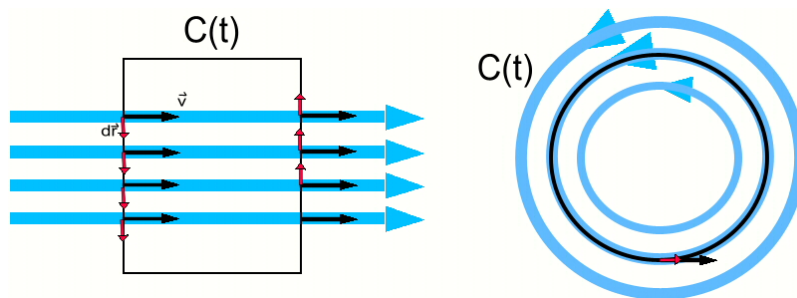
5.1 VRTINČNOST OZIROMA CIRKULACIJA

Teorem Kutta-Žukovski lahko vpeljemo na osnovi nekaj predpostavk. Teorem je spisan za dvodimenzionalni tok idealne tekočine. Ponovimo, da idealni tok pomeni, da je tekočina nestisljiva, da se temperatura ne spreminja, predvsem pa, da je nevizkozna, torej za njo velja ohranitev energije in gibalne količine.

Prvi pojem, ki ga potrebujemo je cirkulacija:

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{r}. \quad (18)$$

$C(t)$ je poljubna zanka, ki se giblje skupaj s tekočino. Cirkulacija je tako vsota majhnih skalarnih produktov dolžine zanke ter hitrosti toka čez ta odsek zanke (skica 15).



Skica 15

Skica 21 prikazuje dve različni cirkulaciji.

Leva je nična cirkulacija prostega tok. Desno je cirkulacija vrtinca, ki ima cirkulacija $\Gamma = 2\pi r \cdot v$.

Če izračunamo časovni odvod cirkulacije dobimo zanimivo dejstvo, ki nosi ime Kelvinov teorem o ohranjanju vrtinčnosti. Kot ime nakazuje, se cirkulacija ohranja. Kelvinov teorem velja za idealne tekočine, ter tako apriori ne potrebuje nestisljivosti.

Če pa upoštevamo še nestisljivost dobimo Helmholtzov izrek, ki nam pa pove, da se vrtinčnost ohrani tudi pri dvodimenzionalnem toku. Vrtinci se gibljejo skupaj s tekočin in so torej ves čas sestavljeni iz istih delov tekočine.

5.2 HITROSTNI POTENCIAL IN TOKOVNA FUNKCIJA

Uvedimo še pojem potencialnega toka. Hitrostna polja idealnih tekočin lahko zapišemo kot

$$\vec{v} = \nabla \varphi. \quad (19)$$

Že iz matematičnih identitet velja:

$$\nabla \times \vec{v} = 0 = \nabla \cdot \vec{v}. \quad (20)$$

Na levi strani prepoznamo dejstvo, da je tekočina brezvrtinčna in na desni, da je tekočina nestisljiva.

Od tod sledi, da mora potencial zadoščati enačbi:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (21)$$

Seveda pri robnih pogojih, da je normalna komponenta hitrosti na robovih tekočine enaka nič.

Toku pa priredimo še tokovno funkcijo ψ , ki je definirana:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (22)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (23)$$

Tudi ta funkcija je harmonična. Torej tokovna funkcija in hitrostni potencial zadoščajo enačbam:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (24)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (25)$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \psi = 0. \quad (26)$$

V kompletu enačb 24-26 prepoznamo Cauchy-Reimannove enakosti iz kompleksne analize. Ta enakost nam omogoča, da lahko potencialnemu dvodimenzionalnemu toku idealnih tekočin pripišemo kompleksno funkcijo:

$$\omega(z) = \varphi(z) + i\psi(z). \quad (27)$$

pri čemer je spremenljivka $z=x+iy$. Kompleksna hitrost je tako:

$$v(z) = \frac{\partial \omega(z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x - i v_y. \quad (28)$$

Kompleksni hitrostni potencial $\omega(z)$ je torej poljubna analitična funkcija. Katere funkcije pa dejansko izberemo, pa je odvisno od robnih pogojev, geometrije robov in v splošnem od fizike problema.

5.3 TEORIJA KRIL

Krilo v kompleksnem potencialnem toku je konceptualno prevelik zalogaj, da bi ga pogoltnili v enem kosu. Začnimo torej z ugotovitvijo, da vsaka analitična funkcija $\omega(z)$ predstavlja rešitev nekega potencialnega toka idealne nestisljive tekočine v dveh dimenzijah. Kot vmesna opora proti želeni teoriji kril nam bo služil v tekočini vrteči se valj. Za ta problem torej iščemo tok, za kompleksni hitrostni potencial, za katerega vemo, da je sledeče oblike:

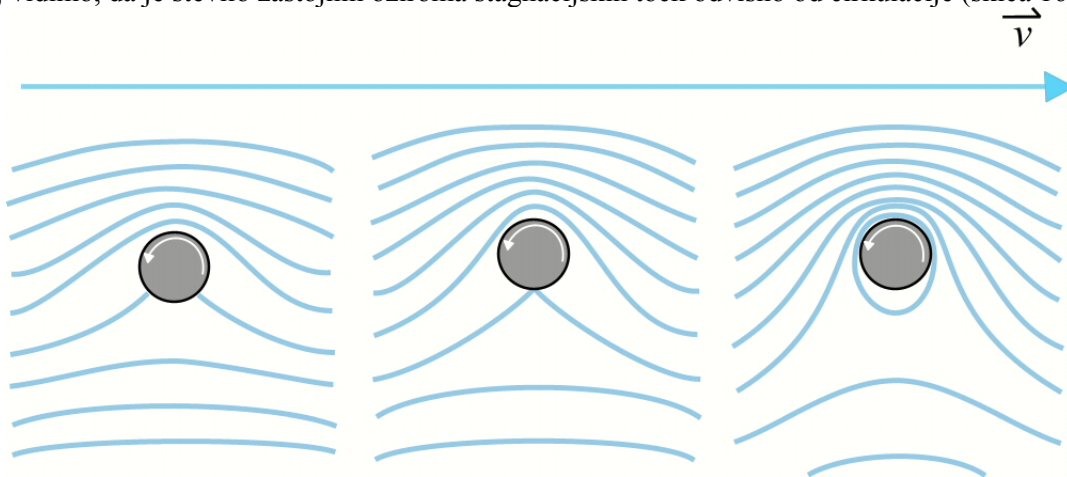
$$\omega(z) = v\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (29)$$

To predstavlja obtekanje valja z radijem a in cirkulacijo Γ . Tukaj je potrebno dodati, da je tekočina idealna. Zgornji kompleksni potencial velja za primer, ko vrtečo se površin valja nadomestimo z osnovnim potencialom vrtnica. V praksi bi za takšno realizacijo potrebovali tekočino, ki je viskozna, ker se na njo prenaša vrtenje valja, a hkrati ne bi bila viskozna, da se ne disipira energija in še lahko zapišemo Bernoullijevo enačbo.

Iz tega primera izvlečemo dve ugotovitvi. Prva je, da je so na površini valja točke, kjer ne samo, da je tam normalna komponenta hitrosti enaka nič, tam je nič tudi tangencialna komponenta. V tem prepoznamo že znane zastoje oziroma stagnacijske točke. Lego teh točk izrazimo kot:

$$\sin \sigma = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot v \cdot a} \quad (30)$$

Tukaj vidimo, da je število zastojev oziroma stagnacijskih točk odvisno od cirkulacije (skica 16).



Skica 16

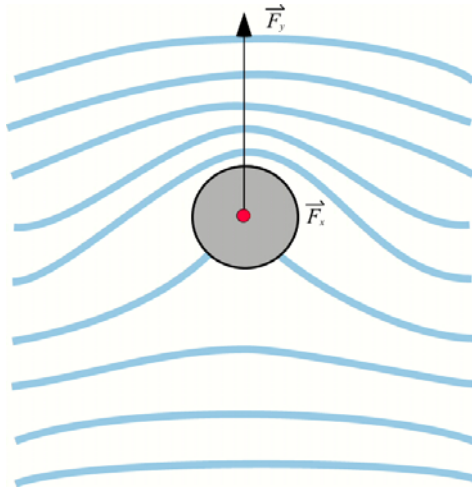
Če je cirkulacija enaka: $\Gamma = 4\pi \cdot v \cdot a$ imamo zastojno točko eno samo (sredina). Če je cirkulacija večja imamo dve (levo), če pa manjša pa zastojev ni (desno).

Druga ugotovitev pa nam govori o sili, ki deluje na valj. Če s pomočjo Bernoullijeve enačbe izračunamo razliko tlakov na površini valja dobimo:

$$F_x = 0 \quad (31)$$

$$F_y = \rho \cdot v \cdot \Gamma \quad (32)$$

Torej je sila v osi obtekanja nič, kar se nam zdi nenavadno zaradi naših izkušenj s tekočinami (skica 17).



Skica 17

Skica 23 prikazuje sile na vrteči se valj iz skice 16. Vidimo, da pri toku iz leve proti desni, v tej smeri (osi x) ni sil. Obstaja samo sila v prečni smeri (osi y).

Zavedati pa se seveda moramo, da izkušenj z neviskoznimi tekočinami nimamo. Sila v prečni smeri je tako v splošnem prenosorazmerna cirkulaciji in hitrosti.

Oboroženi s tema ugotovitvama se lotimo teorema Kutta-Žukovski oziroma centralnega teorema aerodinamike!

Teorem pravi:

$$F_y - iF_x = \rho \cdot v \cdot \Gamma. \quad (33)$$

Kaj nam pove teorem že vemo, saj smo identični rezultat dobili pri obtekanju vrtečega se valja. Novo je pa dejstvo, da teorem velja splošno, za katerokoli telo s stalnim presekom v tretjo dimenzijo. Sila v toka bo nič, medtem ko bo v prečni sili delovala neka sila. Tej sili pravi dinamični vzgon oziroma Magnusov efekt. Ta kaže navzgor v primeru, ko je cirkulacija pozitivna (v smeri urinega kazalca). Končno se lahko lotimo še obravnave letalskega krila. Osnovna zamisel rešitve je, da kompleksni hitrostni potencial valja s cirkulacijo konformno preslikamo v tok okrog krila:

$$\omega(z) \rightarrow \omega(F(Z)). \quad (34)$$

Preslikavo oziroma ustrezno konformno transformacijo, ki uspešno preslika valj v krilo je poiskal Žukovski. Transformacija:

$$Z = z + \frac{c^2}{z}. \quad (35)$$

preslika valj $z = ae^{i\sigma}$ v elipso. Konceptualno preostali zalogaj ni pretežek, vseeno pa pazimo, da si ne naložimo preveč računskega dela, zato za približek krila vzemimo kar za napadni kot α nagnjeno ploskev. Torej nekako povsem sploščeno elipso s pogojem $c=a$. Prvo torej potrebujemo kompleksni potencial valja, nagnjenega za kot α :

$$\omega(z) = v(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z}e^{i\alpha}) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z - i\frac{\Gamma}{2\pi}\alpha. \quad (36)$$

z ustreznim hitrostnim poljem:

$$v(z) = \frac{d\omega(z)}{dz} = v(e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z^2}e^{i\alpha}) - i\frac{\Gamma}{2\pi \cdot z}. \quad (37)$$

To hitrostno polje sedaj še preslikajmo s prej omenjeno preslikavo (enačba 35):

$$v(z) = \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{v(e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z^2(Z)}e^{i\alpha})}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2(Z)}\right)} - i\frac{\Gamma}{2\pi\left(z(Z) - \frac{a^2}{z(Z)}\right)}. \quad (38)$$

,kjer se z notacijo $z(Z)$ pravzaprav sklicujemo na enačbo 35.

5.4 POGOJ ŽUKOVskega

Hitrostno polje enačbe 48 ima slabost, da hitrost na vodilnem in zadnjem robu našega krila divergira. Hipoteza Žukovskega pa specifično prepoveduje neskončno hitrost na katerikoli točki okrog krila. Ta hipoteza je kritična, ker je težava pri izračunu dinamičnega vzgona, kako določiti vrednost cirkulacije. Pogoj Žukovskega namreč temelji na dejstvu, da v toku viskozne, realne tekočine singularnost zadnjega roba ni mogoča. Pogoj Žukovskega torej iz množice matematično možnih hitrostnih polj izbere edinega fizikalno smiselnega, torej brez singularnosti in s kritično cirkulacijo Γ_k , ki temu pogoju zadostuje. Večkrat je v literaturi teorem Kutta – Žukovski zapisan kot le navidezno viskozna teorija. Zato hitrost razvijemo okrog zadnjega roba. Da ugodimo hipotezi Žukovskega dobimo pogoj, da je:

$$\Gamma_k = 4\pi \cdot v \cdot a \cdot \sin \alpha . \quad (39)$$

Teorija je do te točke obravnavala krilo v neviskoznem toku, a vrednost cirkulacije neposredno določa obnašanje toka okrog zadnjega roba. Kritične cirkulacije ne moremo dobiti brez slike viskoznega toka okrog zadnjega roba krila. Iz tega dejstva sledi tudi zaključek, da brez pogoja Žukovskega ni dinamičnega vzgona in pogoj Žukovskega ni izvedljiv v neviskozni tekočini. Brez viskoznosti ni mogoče leteti.

Torej iz pogoja Žukovskega smo izvedeli koliko je cirkulacija. Preostane nam pa samo še, da vrednost za cirkulacijo vnesemo v enačbo 42 za dinamični vzgon ter tako napišemo končni rezultat:

$$F_y = \rho \cdot v \cdot \Gamma = 4\pi \cdot \rho \cdot a \cdot v^2 \cdot \sin \alpha . \quad (40)$$

To je torej vzgonska sila na ravno površino v nagnjeno v idealnem toku za kot α . Seveda je ravna površina dokaj slabo krilo. Spomnimo pa se, da smo ta primer izbrali, ker najenostavnejši za izračun. V splošnem lahko s premikanjem izhodišča transformacije pridobimo poljuben letalski profil. Vzgon na tak profil je:

$$F_y = 4\pi \cdot \rho \cdot (a + \lambda) \cdot v^2 \cdot \sin \alpha . \quad (50)$$

Kjer je λ zapletena funkcija oblike krila. V okviru idealnih tekočin ima oblika krila le majhen vpliv na vrednost vzgonske sile. Tipično se dobro krilo od naše plošče po vzgonu razlikuje za 20-30%. Da dobimo vzgonsko silo je potrebno dinamično silo na profil F_y , ki je v bistvu sila na dolžinsko enoto pomnožiti še z razponom kril. Vzgonsko silo tako zapišemo kot:

$$F_v = \pi \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot \sin \alpha . \quad (51)$$

ker daljica teče med točko -2a in +2a, je torej dolga 4a, kar smo že prej označili z dolžino tetive profila l. $S=4aD$

5.5 DOSEG TEOREMA

Seveda tudi model s teoremom Kutta - Žukovski ni vseмогоčen. Bistveno pa je, da ta model daje pravilno hitrostno in s tem tudi tlačno polje okrog krila. Zaradi teh dveh lastnosti teorem ne trpi niti enega od paradoksov omenjenih v razdelku 3.1.1 in 3.2.1 .

Seveda nam pa teorem Kutta - Žukovski ne omogoča popolno obravnavo dejanskih razmer na letalskem krilu, zaradi dejstva, da se realno krilo giblje v viskozni tekočini, da tok ni laminaren in da včasih tretja razsežnost toka ni zanemarljiva.

Model v tej luči daje dokaj pravilne rezultate za majhne naletne kote, kjer ni veliko turbulentnega toka, medtem ko je razhajanje pri velikih ter še posebej pri kritičnih naletnih kotih ogromna.

Iz celotnega izvajanja v razdelku 5 pa izvlečemo še globok vtis o kompleksnosti problema modeliranja vzgona na letalska krila, ter še posebej o omejenosti analitičnega pristopa.

S tem občutkom tako veliko lažje razumemo, da se za modeliranje dejanskih razmer na letalskih krilih uporablja Prandtlova⁴ metoda mejnih plasti, ki pa je le približek zaradi zanemarjanja nekaterih manj pomembnih prispevkov.

⁴ Ludwig Prandtl (1874-1953)

6. ZAKLJUČEK

Cilj seminarja je, da metodološko predstavi nekaj dvodimenzionalnih modelov tvorbe vzgona na letalskih krilih. Obdelal sem dve napačni razlage in tudi pokazal zakaj sta napačne. Jedro seminarja sem pa zaključil s teorijo Kutta-Žukovski, ki je fizikalno pravilna in smiselna.

Vseskozi seminar sem se oziral proti eksperimentalnim dejstvom, še posebej v razdelku o paradoksih. V tem razdelku nikakor nisem želel vleči premočne vzporednice med dvodimenzionalnimi modeli tvorbe vzgona ter dejanskimi razmerami, ampak sem največkrat v eksperimentalna dejstva posegel samo po ilustracijo hitrostnega polja.

Seminar naj služi predvsem za predstavitev kompleksnosti problema analitične obravnave tvorbe vzgona. Hkrati pa naj zaradi tega služi tudi za opozorilo na prehitro sprejemanje prepoenostavljenih modelov vzgona letalskih kril, še posebej ko nam te razlage ponujajo priznane naravoslovne avtoritete ali pa celo fizikalni učbeniki.

8. LITERATURA

- [1] John D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, (McGraw-Hill, Singapore, 2001)
- [2] Miodrag Tešić, *Mehanika leta*, (Komanda Ratnog Vazduhoplovstva in Protivzdušne odbrane, 1977)
- [3] Leopold Škrget, *Mehanika tekočin*, (Tehniška fakulteta, Univerza v Mariboru, Maribor 1994)
- [4] Rudi Podgornik, *Hidrodinamika*, (skripta za študente, 2004)
- [5] Albert Einstein, *Elementare Theorie der Wasserwellen und des Fluges*, (Die Naturwissenschaften, Berlin, 1916)