

UNIVERZA V LJUBLJANI
Fakulteta za matematiko in fiziko
1111 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 64

avtor: Samo Lasi_
mentor: prof.dr. Rudi Podgornik

Plimske sile in plimovanje

Ljubljana, maj 2000

Povzetek:

Podrobna obravnava deformacije sferi_nega, homogenega planeta iz idealne teko_ine pod vplivom plimskih sil. Opisani so dejavniki plimovanja na Zemlji in te_ave na katere naletimo pri kvalitativni razlagi. Nazadnje obravnavamo vpljiv plimovanja na dinami_ni razvoj sistema planetov in izra_unamo Rochejevo razdaljo.

Vsebina

Uvod	3
Plimski potencial	4
Hidrodinamska obravnava	8
Dejavniki plimovanja	11
Vpliv trenja	14
Rochejeva razdalja	18
Literatura	21

1. UVOD

Ljudje _e od negdaj poznajo fenomen plimovanja in vedo, da je povezan z gibanjem Lune. _e pred nastankom kakr_ne koli teorije so na podlagi opazovanja znali plimovanje dokaj dobro napovedovati. Zanimivo pa je, da veliko ljudi _e danes ne pozna njegovega pravega vzroka, niti na kvalitativni ravni. Tudi sam sem se pri razmi_ljanju o tem "samoumevnem" pojavu zna_el v te_avah in se tako odlo_il, da problem podrobno razi__em.

Pogosto si ljudje razlagajo plimo s pove_ano privla_nostjo Lune na eni strani Zemlje. To pa ni dovolj, da razumemo podobno plimo, ki isto_asno nastopi na nasprotni strani planeta. Iz te_av se pogosto re_ujejo z argumentom, da deluje na nasprotni strani ve_ja centrifugalna sila zaradi vrtenja Zemlje in Lune okoli skupnega te_i_a. _e smo pozorni na na_in vrtenja Zemlje okoli skupnega te_i_a, ugotovimo, da je ta argument nevztrezen.

Edini kvalitativno pravilen na_in, s katerim lahko preprosto razumemo vzrok *plimskih sil*, je

analogija s prosto padajo_im laboratorijem. Zamislimo si laboratorij, ki prosto pada v te_nostnem polju planeta. Nanj deluje gravitacijska sila, ki je seveda odvisnana od oddaljenosti. Pospe_ek celotnega laboratorija je dolo_en s silo, ki deluje na njegovo te_i__e. Zaradi enakosti te_ne in vztrajnostne mase je odvisen le od oddaljenosti te_i__a. V laboratoriju izvedimo naslednji miselni poskus. Postavimo telo zanemarljive mase najprej v te_i__e laboratorija. Ker_uti telo enak pospe_ek kot te_i__e, pada skupaj z laboratorijem, torej v laboratoriju miruje. Sedaj telo nekoliko izmaknimo iz te_i__a proti vrhu laboratorija. Zaradi pove_ane oddaljenosti od planeta deluje na telo manj_a sila in zato pada z manj_im pospe_kom. V laboratorijskem sistemu se telo z razliko pospe_kov oddaljuje od te_i__a proti vrhu laboratorija. _e pa telo postavimo nekoliko ni_je od te_i__a, se zaradi podobnega vzroka v laboratoriju pospe_eno giblje proti dnu. Razliko pospe_kov oziroma pospe_ek v laboratoriju priskrbi *plimska sila*. Ta predstavlja razliko med silo na te_i__e in silo na posamezen del laboratorija. *Plimska sila* torej na_ laboratorij "razteguje".

V modelu prosto padajo_ega laboratorija smo zanemarili dva faktorja, ki ju pri realnem fenomenu ne smemo izpustiti. Obravnavali smo pospe_ek le vzdol_te_i__a planeta in laboratorija, torej nismo upo_tevali celotne prostorske odvisnosti sile. Zraven tega pa smo zanemarili lastne gravitacijske u_inke, ki so pri dovolj masivnem telesu lahko pomembni. Seveda je za dejansko plimovanje pomembnih_ e vrsta dejavnikov, ki jih bomo v seminarju na grobo opisali.

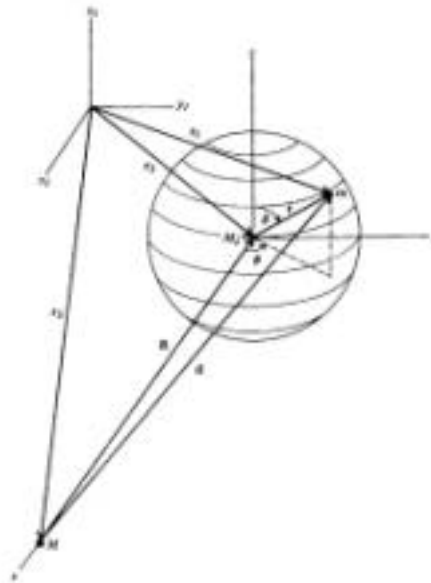
S klasi_nim pristopom analiti_ne mehanike bomo najprej izra_unali, kako bi se zaradi plimskih sil deformirala Zemlja, _e bi bila sferi_na, homogena in sestavljena iz idealne teko_ine. Nato si bomo ogledali hidrodinamski pristop za izra_un deformacije in povdarili izhodi_a, ki pogosto privedejo do napa_nih interpretacij. Na_teli bomo bistvene dejavnike, ki dolo_ajo dejansko plimovanje na Zemlji in preu_ili _e dve pomembni posledici *plimskih sil*. Raziskali bomo kako trenje med plimovanjem in Zemljo vpliva na dinami_ni razvoj sistema Zemlja-Luna in izra_unali razdaljo, do katere se lahko Luna pribli_a Zemlji, da je *plimske sile* ne raztrgajo.

2. PLIMSKI POTENCIAL

Obravnavajmo pospe_ek mase m na povr_ju oceana, ki je posledica privla_nosti Zemlje z maso M_z in oddaljenega planeta z maso M . Koordinate mas m , M_z in M opi_imo z vektorji \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 in \mathbf{r}_3 . Zaradi prikladnosti zasukajmo koordinatni sistem, ki je pripet v sredi_u Zemlje, tako, da le_i oddaljeni planet na osi x , zraven tega pa definirajmo _e vektorje \mathbf{r} , \mathbf{R} in \mathbf{d} . Glej sliko 1.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{d} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = \mathbf{R} + \mathbf{r}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Slika 1:
To_ka na povr_ju Zemlje in oddaljeni planet v inercialnem sistemu ter v sistemu, ki je pripet v te_i_u Zemlje. [1]



Ena_bi gibanja elementa m in Zemlje lahko v inercialnem sistemu zapi_emo kot:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GmM_Z}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{GmM}{d^2} \hat{\mathbf{d}} \quad (2.2)$$

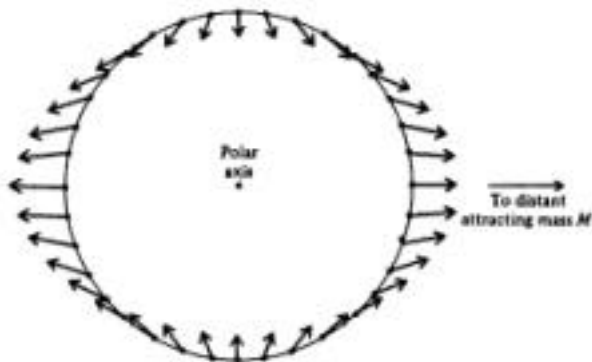
$$M_Z \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{GM_Z M}{R^2} \hat{\mathbf{R}} \quad (2.3)$$

Ko prvo ena_bo delimo z m , drugo z M_Z in ju od_tejemo, dobimo ena_bo gibanja realtivne koordinate \mathbf{r} .

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_Z}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - GM \frac{\hat{\mathbf{d}}}{d^2} - \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (2.4)$$

Prvi _len na desni je centralni pospe_ek zaradi privla_nosti Zemlje, drugi _len pa je *plimski pospe_ek* zaradi oddaljenega planeta. Centalna privla_nost je ob privzetku, da je Zemlja okrogla, po celotni povr_ini enako velika in ni_ ne pripeva k _asovno odvisni sili za katero se zanimamo. *Plimski pospe_ek* na desni pa je razlika med pospe_ekom te_i_a Zemlje in delov, ki so na njenem povr_ju. Zaradi dnevnega vrtenja Zemlje okoli svoje osi, deluje na masni element_e sistemski centrifugalni pospe_ek. Ker pa je tudi ta od _asa neodvisen, ga v tej obravnavi ne vpo_tevamo. Deformacijo zaradi tega prispevka bomo vklju_ili v ni_elno lego povr_ja, oziroma jo zanemarili.

Na sliki 2 je prikazana smer in velikost *plimskega pospe_ka*, ki na nasprotnih straneh planeta povzro_i dve izboklini.



Slika 2: Plimski pospe_ek na povr_ini Zemlje okoli ekvatorja. [1]

S pomo_jo (2.1) lahko drugi _len v (2.4) zapi_emo kot:

$$\frac{\mathbf{d}}{d^2} - \frac{\mathbf{R}}{R^2} = \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{d^3} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{R} \frac{1}{d^3} - \frac{1}{R^3} + \frac{\mathbf{r}}{d^3}. \quad (2.5)$$

Ker je $\mathbf{d} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ in $R \gg r$ lahko zapi_emo:

$$d = R \left(1 + \frac{2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} \approx R \left(1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} \right) \quad \text{in} \quad d^{-3} \approx \frac{1}{R^3} - \frac{3\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^4}. \quad (2.6)$$

_len (2.5) lahko torej do prvega reda poenostavimo v:

$$\frac{\mathbf{d}}{d^2} - \frac{\mathbf{R}}{R^2} \approx \frac{1}{R^3} \left(-3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})\mathbf{R} + \mathbf{r} \right) - 3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{R} \approx \frac{1}{R^3} \left(-3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})\mathbf{R} + \mathbf{r} \right). \quad (2.7)$$

Ker smo izbrali koordinatni sistem tako, da velja $\mathbf{R} = -x\mathbf{e}_x$, lahko ena_bo gibanja (2.4) kon_no zapi_emo kot:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{GM_Z}{r^2} \mathbf{e}_x + \frac{GM}{R^3} (3x\mathbf{e}_x - \mathbf{r}) \quad (2.8)$$

Ker je gravitacijska sila konzervativna, jo lahko zapi_emo kot gradient potenciala.

$$\mathbf{g} = -\text{grad}\phi \quad (2.9)$$

Potencial na enoto mase ϕ , ki vztreza definiciji pa je:

$$\phi = -\frac{GM_Z}{r} - \frac{GM}{R^3} \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}r^2 \right) \quad (2.10)$$

Iz slike 1 je razvidno, da velja $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$. Potencial lahko torej zapi_emo tudi kot:

$$\phi = -\frac{GM_Z}{r} - \frac{GM}{r} \frac{r^3}{R^3} \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \quad (2.11)$$

Tukaj velja opomniti na naslednjo trigonometri_ no zvezo:

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \cos \psi, \quad (2.12)$$

kjer je ψ kot med smerjo to_ ke na Zemljinem povr_ ju in oddaljenega planeta glede na Zemljino te_ i_ e.

Prvi _ len potenciala prispeva privla_ nost Zemlje, drugi pa je kvadrupolni _ len multipolnega razvoja potenciala zaradi oddaljenega planeta. Tega lahko razvijemo po potencah r/R , koeficienti razvoja pa so sorazmerni z Legendrovimi polinomi prve vrste :

$$-\frac{GM}{d} = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rx}} = -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{x}{R} \right)^{-1/2} = -\frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\frac{x}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^n \quad (2.13)$$

Prvi _ len razvoja (2.13), monopolni _ len, ni_ ne prispeva k *plimski sili*, saj je za vse to_ ke na povr_ ini enak. Drugi, dipolni _ len predstavlja energijo zaradi navora okoli te_ i_ a Zemlje. Ta _ len je prav tako nepomemben, ker je kompenziran z navorom sistemske centrifugalne sile. Druga_ e re_ eno, te_ i_ e Zemlje _ uti prav tak_ en navor za vrtenje okoli na_ e masne to_ ke. Ta je skrit v ena_ bi (2.3). Tretji, kvadrupolni _ len je prvi, ki prispeva k *plimskim silam*. Naslednji _ len je v primeru Lune 0.02 krat tolik_ en kot kvadrupolni, tako, da s kvadrupolnim _ lenom opi_ emo pribli_ no 98% Luninega prispevka k plimovanju. Ostali prispevki, ki jih lahko izrazimo z Legendrovimi polinomi so seveda pomembni pri natan_ nej_ ih napovedovanjih plimovanja. Za ra_ unanje vplivov Sonca pa se lahko zanesemo na kvadrupolni _ len, s katerim opi_ emo _ e 99.996% celotnega prispevka.

V na_ i obravnavi nismo upo_ tevali, da Zemlja in oddaljeni planet tvorita sistem, ki se vrti okoli skupnega te_ i_ a, torej se vrti tudi Zemlja. To je seveda nujen popravek pri izra_ unu kotne hitrosti vrtenja, na plimske sile pa nima nikakr_ nega vpliva. Ker v _ asu Luninega obrata vsaka to_ ka na Zemlji opi_ e kro_ nico z enakim radijem, je sistemski potencial

$$\frac{1}{2} \omega^2 b^2 \text{ za vse enak. Tu je } \omega^2 = \frac{G(M + M_Z)}{R^3} \text{ kotna hitrost in } b = \frac{M}{M + M_Z} R \text{ oddaljenost}$$

Zemljinega te_ i_ a od skupnega te_ i_ a. Na_ in vrtenja je prikazan na sliki 3 v naslednjem poglavju.

S pomo_ jo zapisanega potenciala (2.11) lahko sedaj izra_ unamo vi_ ino plime. V stacionarnem stanju, ko se voda v oceanih prerazporedi, mora tangencialna komponenta sile izginiti. To pomeni, da se gladina oceanov prilagodi ekvipotencialni ploskvi. V primeru, ko ni plimskih sil, drugi _ len v potencialu (2.11) odpade in ekvipotencialna ploskev je krogla z radijem R_Z . S tako definiranim R_Z lahko zapi_ emo pogoj:

$$\phi = -\frac{GM_Z}{r} - \frac{GM}{r} \frac{r^3}{R^3} \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} = -\frac{GM_Z}{R_Z} \quad (2.14)$$

Definirajmo _ e relativno vi_ ino gladine oceana:

$$h(\vartheta, \varphi) = r - R_Z \quad (2.15)$$

Pogoj (2.14) lahko sedaj prepričamo v

$$h(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{M_Z} \frac{R_Z}{R^3} r^3 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \left[\frac{M}{M_Z} \frac{R_Z^4}{R^3} - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.16)$$

Edina spremenljivka od katere je odvisna višina, je kot med izbrano točko na Zemlji in planetom (2.12). Pri izbranem kotu ϑ bo plima nastopila pri kotu $\varphi = 0$ in $\varphi = \pi$, oseka pa pri $\varphi = \pi/2$ in $\varphi = 3\pi/2$. Razlika med plimo in oseko, ki je poznana tudi kot *razpon plime*, pa je

$$h = \frac{3}{2} \frac{M}{M_Z} \frac{R_Z^4}{R^3} \sin^2 \vartheta. \quad (2.17)$$

Plimska deformacija ima obliko elipsoida z dolgo osjo v smeri veznice med Zemljo in oddaljenim planetom. Na ekvatorju, kjer je $\vartheta = \pi/2$, je *razpon plime* največji. Na izražun daje za Luno oceno $h_{\max} = 0.56m$, kar se na grobo ujema z razponom izmerjenim na sredini oceana.

Plimski potencial smo v tej obravnavi zapisali za en planet, seveda pa mu lahko pri tejemo potencialne katerega drugega planeta. Razmerje amplitud plimovanja za vpliv Lune in Sonca lahko ocenimo iz (2.16):

$$\frac{h_L}{h_S} = \frac{M_L}{M_S} \left(\frac{R_{ZS}}{R_{ZL}} \right)^3 \approx 2.2 \quad (2.18)$$

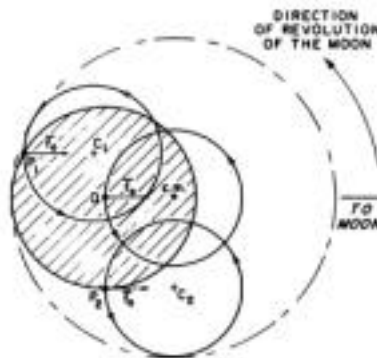
Tako idealizirano deformacijo vodne površine je izražunal Newton leta 1687.

3. HIDRODINAMSKA OBRAVNAVA

Do oblike plimske deformacije lahko pridemo tudi, če računamo z enačbami za gibanje tekočin. Ta pristop je prikladnejši za računanje posledic trenja, ki jih bomo ocenili v nadaljevanju, in omogoča izražun deformacije, ki je nekaterim študentom bolj intuitiven od klasičnega s *plimskim potencialom*. Velikokrat pa v poljudnih tekstih zasledimo napačno razlago plime, ki izvira iz napačne interpretacije osnovnega izhoda za hidrodinamski izražun. Po tej razlagi deluje zaradi Zemljinega vrtenja okoli skupnega težišča, ki leži za približno 72% Zemljinega radija proti Luni, na nasprotni strani Lune večja centrifugalna sila, ki tam povzroči plimo. Na strani bliže Luni, pa naj bi bila plima posledica večje Lunine privlačnosti.

Zemljino težišče se zares vrti okoli skupnega težišča, ostale točke pa ne! Vrtenje Zemlje si na ilustrativen način lahko predstavljamo kot vrtenje ponve z ročajem, ki je v prostoru vedno enako vsmerjen. Pri tem se vsak del Zemlje vrti okoli svoje osi, težišče pa okoli skupnega težišča. Glej sliko 3.

Slika 3:
Trajektorije različnih točk na površju Zemlje pri kroženju okoli skupnega težišča (c.m.). [2]



Plimski pospešek je posledica Lunine privlačnosti relativno glede na gibanje Zemljinega težišča. Kot smo ugotovili v prejšnjem poglavju, uti vsaka točka na Zemlji enak navor za vrtenje okoli težišča, kot težišče za vrtenje okoli vsake točke. Luna torej ne deluje na Zemljo z nobenim navorom (razen posredno zaradi vplivov trenja), pa pa deluje z navorom na "plimski val", ki zaradi tega zares kroži okoli skupnega težišča. V našem modelu bomo predpostavili, da se voda v oceanih giblje skupaj s "plimskim valom" in upoštevali, da zanje veljajo hidrodinamske enačbe. Velja si torej zapomniti, da plima na obeh nasprotnih straneh Zemlje ni posledica vrtenja tekočine okoli skupnega Zemljinega in Luninega težišča, saj je takšno vrtenje posledica navora na plimsko deformacijo. Za vrtenje se vodo pa veljajo naslednje hidrodinamske enačbe:

Kontinuitetna enačba:

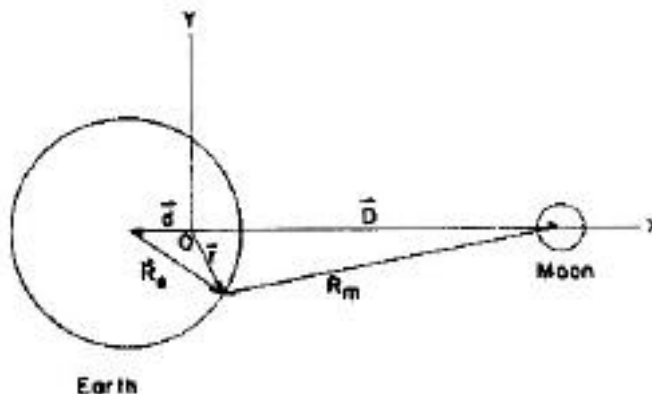
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{in} \quad (3.1)$$

Eulerjeva enačba:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{f} \quad (3.2)$$

V Eulerjevi enačbi nastopa na desni strani sila na enoto mase.

Izberimo si inercialni koordinatni sistem z izhodiščem v skupnem težišču. Vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ naj kaže od skupnega težišča proti točki na Zemljinem površju, vektor \mathbf{R}_Z od Zemljinega težišča proti točki na površju, \mathbf{R}_L od Luninega težišča proti površju, vektorja \mathbf{d} in \mathbf{D} pa od skupnega težišča proti težišču Lune in težišču Zemlje. Razdalja med težiščem Zemlje in težiščem Lune naj bo R . Glej sliko 4.



Slika 4: Sistem Zemlja-Luna z izhodiščem v skupnem težišču. [3]

Za hitrost vode velja:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j} \quad (3.3)$$

Če privzamemo, da je voda nestisljiva, je z zapisano hitrostjo kontinuitetna enačba zadovoljena, saj velja $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Z upoštevanjem privlačnosti Zemlje in Lune lahko iz Eulerjeve enačbe izlučimo tlak, ki pa mora biti v stacionarnem stanju povsod enak. Ta pogoj je enakvreden pogoju, da se tekočina prilagodi ekvipotencialni ploskvi. Zapišimo torej silo, ki deluje na enoto mase.

$$\mathbf{f} = -\frac{GM_Z \mathbf{R}_Z}{R_Z^3} - \frac{GM_L \mathbf{R}_L}{R_L^3} \quad (3.4)$$

Ker smo privzeli, da je lokalni časovni odvod hitrosti $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ in ker je

$(\nabla \cdot) \mathbf{v} = -\omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j})$, sledi iz Eulerjeve enačbe

$$\frac{p}{\rho} = \omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) - GM_Z \frac{(x+d) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} - GM_L \frac{(x-D) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{\left[(x-D)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \quad (3.5)$$

in rešitev za tlak

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{GM_Z}{\left[(x+d)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}} + \frac{GM_L}{\left[(x-D)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}} + konst. \quad (3.6)$$

Ker nas zanima oblika plime v koordinatnem sistemu z izhodiščem v težišču Zemlje, bomo uporabili standardne transformacije:

$$\begin{aligned} x_Z &= x + d = r_Z \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y_Z &= y = r_Z \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z_Z &= z = r_Z \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

S pogojem, da je tlak konstanten, dobimo iz (3.6) enačbo za obliko plime:

$$-\frac{1}{2} \omega^2 (r_Z^2 \sin^2 \vartheta - 2dr_Z \sin \vartheta \cos \varphi + d^2) - \frac{GM_Z}{r_Z} - \frac{GM_L}{\left[r_Z^2 - 2Rr_Z \sin \vartheta \cos \varphi + L^2 \right]^{1/2}} = konst. \quad (3.8)$$

Z upoštevanjem kotne hitrosti, razdalje med skupnim in Zemljinim težiščem ter razvoja potenciala (tretji člen v 3.8), podobno kot smo to naredili v prejšnjem poglavju, se enačba za obliko plime do drugega reda v r_Z zapiše kot:

$$-\frac{GM_Z}{r_Z} - \frac{GM_L}{r_Z} \frac{r_Z^3}{R} \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} - \frac{G(M_Z + M_L)}{r_Z} \frac{r_Z^3}{R} \frac{\sin^2 \vartheta}{2} = konst. \quad (3.9)$$

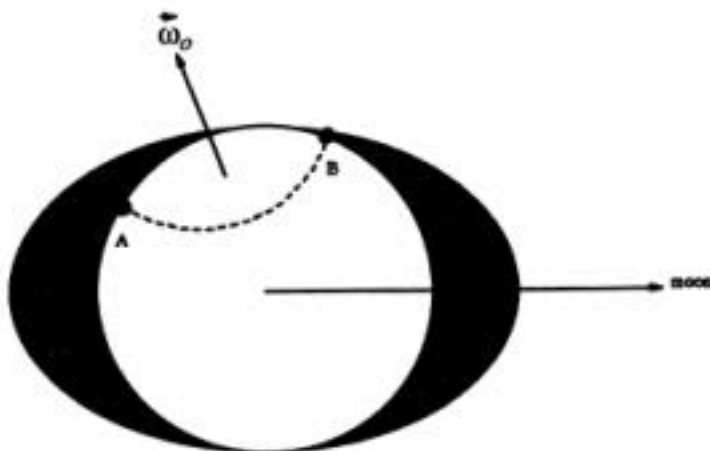
Podobno ena_ bo smo _e zapisali v (2.14), le da imamo tu dodaten _len (tretji _len), ki je odvisen od kota . Ta _len, ki ga lahko zapi_emo tudi kot $-\frac{1}{2}\omega^2 r_Z^2 \sin^2 \vartheta$ predstavlja energijo zaradi mese_ nega vrtenja plime okoli Zemljine simetrijske osi. Pri vrtenju okoli skupnega te_i_ a, se namre_ plima vrti tudi okoli Zemljine osi. Ker pa je ta _len neodvisen od polo_aja Lune, dolo_ a skupaj z dnevnim vrtenjem ni_ elno vi_ ino deformacije. Razmerje med tema dvema vplivoma je enako kvadratu razmerja pripadajo_ ih kotnih hitrosti. Popravek k ni_ elni vi_ ini zaradi dnevnega vrtenja je torej okoli 0.13%.

4. DEJAVNIKI PLIMOVANJA

V prej_nih poglavjih smo izra_unali obliko plime, ki bi se v stacionarnem stanju vzpostavila zaradi enega samega planeta. Pri tem smo si z nekaterimi privzetki bitveno olaj_ ali delo in tako pri_li do ocene, ki za prakti_ ne namene _e zdale_ ni zadovoljiva. Vsekakor pa smo v obravnavo zajeli bistveni vzrok plimovanja. V nadaljevanju bomo opredelili _e nekatere druge dejavnike, ki so nujni za uspe_ no napovedovanje plimovanja na Zemlji.

A) Vrtenje Zemlje okoli svoje osi

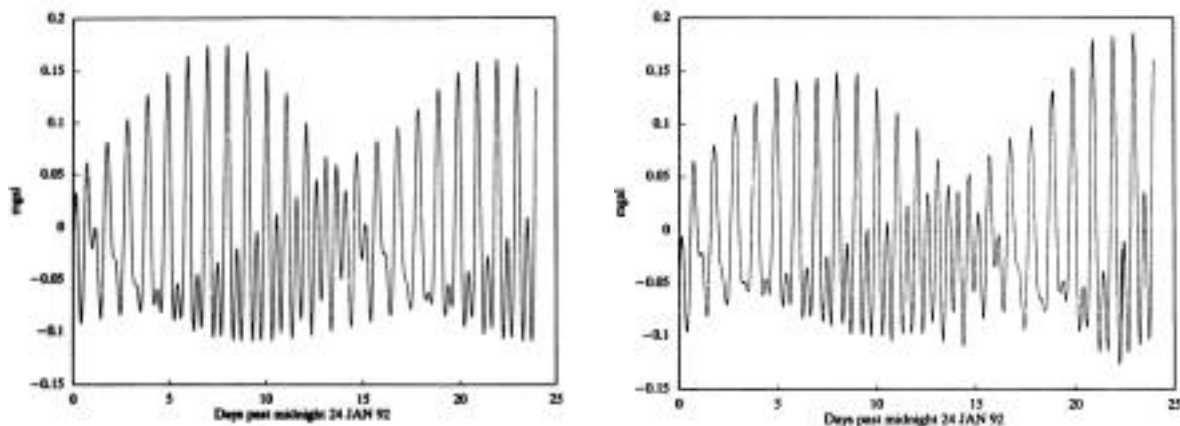
Za opazovalca na Luni je plimska deformacija Zemlje, _e za hip pozabimo na vplive Sonca, nehomogenosti, resonan_ ne pojave in vplive trenja, vedno v obliki elipsojida z dolgo osjo vsmerjeno proti Luninemu te_i_u. _e se Zemlja ne bi vrtela okoli svoje osi, bi opazovalec na njej v enem Luninem ciklu plimo zaznal dvakrat. Zaradi dnevnega vrtenja Zemlje okoli svoje osi pa potuje plima preko to_ ke na povr_ ju pribli_ no dvakrat na dan. Ker se Luna s periodo 27.33 dni vrti okoli Zemlje v isti smeri kot se Zemlja vrti okoli svoje osi, potuje plimska deformacija mimo dane to_ ke vsakih $(24+24/27.33)$ h. Plima torej nastopi pribli_ no vsakih 12 h in 26.5 min, kar pomeni vsak dan pribli_ no 53 min kasneje. Dve dnevni plimi pa nista enako veliki, ker je Zemljina os za pribli_ no 23^0 nagnjena glede na normalo Lunine orbite. Tako lahko lo_ imo med dnevno in no_ no plimo. U_ inek nagnjenosti Zemljine osi je shemati_ no prikazan na sliki 5.



Slika 5: Zaradi nagnjenosti Zemljine osi je plima v to_ ki A vi_ ja od plime v to_ ki B. [4]

B) Plimovanje zaradi Sonca

Ugotovili smo_e, da je Lunin vpliv na plimsko deformacijo pribli_ no 2.2-krat tolik_en kot Son_ev. Slednji pride najbolj do izraza ob novi in polni Luni, ko so te_i_a Zemlje, Lune in Sonca pribli_ no poravnana na skupni premici, ter ob prvem in zadnjem kraju, ko sta Sonce in Luna pod pravim kotom glede na Zemljo. Ob novi in polni Luni se oba pripevka se_tejeta, kar se ka_e v posebej veliki plimi, ob prvem in zadnjem kraju pa si nasprotujeta, zato je plimovanje takrat manj izrazito. Na sliki 6 sta izra_unani in izmerjeni radialni del plimskega pospe_ka na 40^0 zemljepisne_irine za obdobje 24 dni v Januarju/Februarju 1992. Lepo sta vidni dve razli_ni dnevni plimi kot tudi amplitudna modulacija zaradi vpliva Sonca.

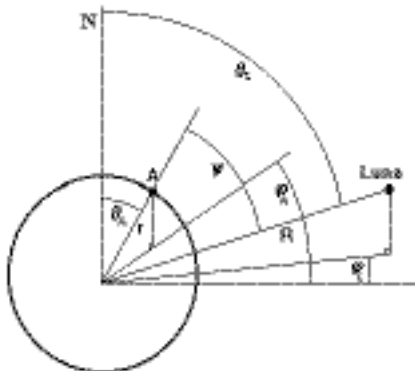


Slika 6: Izra_unani (levo) in izmerjeni (desno) radialni del plimskega pospe_ka za Januar/Februar 1992 na 40^0 zemljepisne_irine. [4]

C) Plimski spekter

Osnovni frekven_ni spekter plimovanja, ki ga generira eno samo telo, denimo Luna, lahko razberemo iz_lena $(3\cos^2\psi - 1)/2$, kjer je ψ kot med smerjo to_ke na Zemljinem povr_ju in Lune glede na Zemljino te_i_e.

Ker Luna ne kro_i okoli Zemljinega ekvatorja, moramo vpo_tevati tudi njeno spremenljivo zemljepisno_irino. Ozna_imo sferi_ne koordinate opazovane to_ke A z r, ϑ_A in φ_A ter koordinate Lune z R, ϑ_L in φ_L . Glej sliko 7.



Slika 7: Sistem Zemlja-Luna.

Če zapišemo skalarni produkt $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = R r \cos\psi$, ugotovimo, da velja:

$$\cos\psi = \sin\vartheta_L \sin\vartheta_A \cos(\varphi_A - \varphi_L) + \cos\vartheta_L \cos\vartheta_A. \quad (4.1)$$

Drugi Legendrov polinom lahko sedaj zapišemo tudi kot:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (3\cos^2\psi - 1) &= \frac{3}{4} \sin^2\vartheta_A \sin^2\vartheta_L \cos[2(\varphi_A - \varphi_L)] \\ &+ \frac{3}{4} \sin(2\vartheta_A) \sin(2\vartheta_L) \cos(\varphi_A - \varphi_L) \\ &+ \frac{1}{8} (3\cos^2\vartheta_A - 1) (3\cos(2\vartheta_L) + 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Trije členi razkrivajo tri osnovne komponente v spektru. Prvi člen se zaradi Zemljinega vrtenja okoli svoje osi spreminja s frekvenco 2/dan, drugi člen 1/dan in tretji zaradi gibanja Lune 2/mesec. Vidimo lahko, da sta prvi in drugi člen, ki predstavljata dvodnevno in dnevno plimovanje, enaka niša za severni in južni pol. Ti dve točki obutita le dvomesečno komponento plimovanja.

Kot smo že ugotovili, se zaradi orbitalnega gibanja Zemlje in Lune os plimske deformacije vrte v prostoru. Če merimo čas glede na zvezde - siderijski čas, nam torej to prinese fazno modulacijo k enodnevni in dvodnevni komponenti, zraven tega pa lahko v (4.2) vidimo tudi amplitudno modulacijo s frekvenco 2/mesec. Podobno velja tudi za plimovanje pod vplivom Sonca. Dodatne amplitudne modulacije nam prinese eliptičnost tirov. Zraven tega pa nagnjenost Lunine orbite za 5° glede na ekliptiko vpliva na razmerje med dnevno in nočno plimo, ki je odvisno od položaja na Zemlji.

Osnovni spekter torej vsebuje frekvence 1/dan, 2/dan, 2/mesec in 2/leto. Zemljino in Lunino orbitalno gibanje prinaša tudi učinke z daljšo periodo, kot je na primer precesija enakonočja. Komponente višjih frekvenc pa so skrite v višjih členih multipolnega razvoja. Izraženi spekter je zelo bogat, saj vsebuje okoli 400 komponent. Čeprav so nakateri niše frekvence prikriti z višjimi, pa so zelo pomembne tam, kjer je amplituda višjih majhna, na primer v okolici polov.

D) Odziv trdnih tal

Plimske napetosti delujejo tako na trdno povr_je kot na oceane, vendar njun odziv_je zdale_ ni enak. Za sferi_no, homogeno Zemljo iz idealne teko_ine bi bila najvi_ja deformacija okoli 53.5 cm, povpre_na deformacija na trdih tleh pa je okoli 20cm. Ta je nelinearna in odra_a elasti_ne lastnosti Zemlje. V linearnem pribli_ju je njen odziv manj_i od idealnega za konstanten dele_, ki je odvisen od geografskih koordinat. Ta dele_ je poznan kot *Love_* *tevilu* *h*. Njegova vrednost je v povpre_ju 0.62.

E) Resonan_ni pojavi

Plimski spekter nam skoraj ni_je ne pove o dejanskem plimovanju. Seveda je treba upo_tevati_je strukturo Zemljinega povr_ja. Za plimovanje na vodi, kjer je dinamika izrazita, so resonan_ni pojavi odlo_ilen dejavnik. Vztrezna konfiguracija obal in morskega dna lahko povzro_i velika oja_anja plime. V dolgem ozkem kanalu, na primer, globina dolo_a hitrost prostega vala. Dol_ina kanala in hitrost pa dolo_ata frekvence naravnih oscilacij vode. _je lastne frekvence sovpadajo s frekvencami plimovanja, lahko pride do ogromnih resonan_nih amplitud. Razpon plimovanja se zaradi tega po svetu razlikuje celo za 20 m.

5. VPLIV TRENJA

Zaradi trenja oceanov z morskim dnom in obalo ter turbulenc in neelasti_nosti trdnega dela Zemlje, prihaja do disipacije energije. Dolg, ki ga za to pla_uje Zemlja, se ka_e v zmanj_evanju kotne hitrosti okoli svoje osi. V sto letih se tako dan podalj_a za okoli 28s. Zato, ker se mora vrtilna koli_ina sistema Zemlja-Luna ohranjati, se Luna vsak mesec oddalji za okoli pol centimetra. Na zadnje se bo Luna oddaljila za okoli 40% dana_nje razdalje in na_dan bo okoli 50-krat toliko dolg.

Da bi la_je razumeli kako se sistem razvija, bomo uvedli nekatere poenostavitve. Privzeli bomo, da je Lunina orbita okoli Zemlje kro_na in le_i v eklipti_ni ravnini. Ker vemo, da Zemljina os precedira okoli eklipti_ne normale s periodo 26000 let in Lunina orbita okoli Zemlje s perjodo okoli 19 let, lahko privzamemo, da sta kotni hitrosti Zemlje okoli svoje osi in Lune okoli Zemlje vzporedni. Zraven tega bomo privzeli, da je vrtilna koli_ina Lune pri vrtenju okoli svoje osi zanemarljiva, saj je njena masa veliko manj_a od Zemljine.

Zapi_imo energijo sistema Zemlja-Luna:

$$E = \frac{1}{2} M_L v^2 - \frac{GM_L M_Z}{r} + \frac{1}{2} I \omega^2 . \quad (5.1)$$

Tu je v hitrost Luninega kro_enja, r njena oddaljenost od Zemlje, I in ω pa vztrajnostni moment in kotna hitrost Zemlje okoli svoje osi. Ker mora Zemljina privla_nost uravnovesiti centrifugalno sila velja:

$$M_L \frac{v^2}{r} = \frac{GM_L M_Z}{r^2} . \quad (5.2)$$

Z ozna_bami za vrtilno koli_ino Zemlje $S = I\omega$, Lune $L = M_L v r = M_L r^2 \dot{\theta}$ in vrtilno koli_ino sistema $J = L + S$, lahko energijo zapi_emo tudi kot

$$E = - \frac{(GM_L M_Z)^2 M_L}{2L^2} + \frac{S^2}{2I} . \quad (5.3)$$

Zaradi ohranjanja vrtilne količine sistema lahko energijo izrazimo z vrtilno količino Lune:

$$E = -\frac{(GM_L M_Z)^2 M_L}{2L^2} + \frac{(J - L)^2}{2I}. \quad (5.4)$$

Zaradi trenja se energija sistema in vrtilni količini L in S spreminjata. Končno stanje sistema pa bo tisto z najnižjo energijo. S pogojem za končno stanje (minimum)

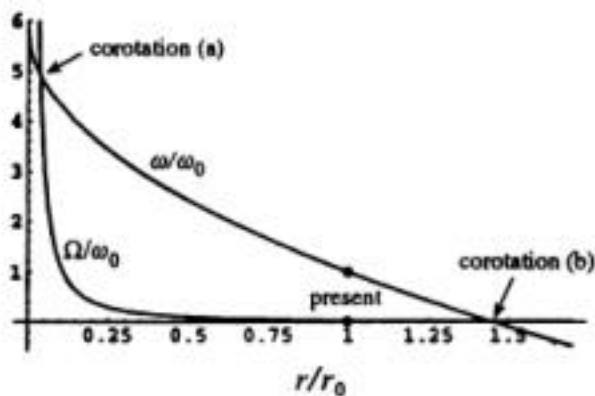
$$\frac{dE}{dL} = \frac{(GM_L M_Z)^2 M_L}{L^3} - \frac{J - L}{I} = 0 \quad (5.5)$$

in vpoštevanjem zveze (5.2) ter $S = J - L$ dobimo

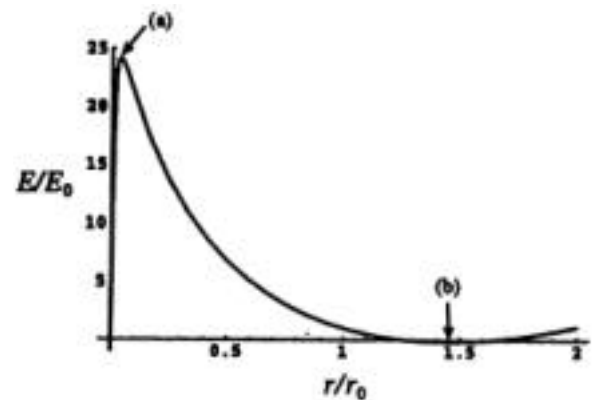
$$\frac{L}{M_L r^2} = \frac{S}{I}. \quad (5.6)$$

Količina na levi strani enačbe je kotna hitrost Lune pri vrtenju okoli Zemlje, količina na desni pa Zemljina kotna hitrost okoli svoje osi, torej povzroča trenje, da se Lunino in Zemljino vrtenje v končnem stanju popolnoma sklopi. Tedaj velja $\omega = \Omega$.

Na sliki 8 je prikazana odvisnost kotnih hitrosti od oddaljenosti Lune in Zemlje. Vidimo lahko dve rešitvi, pri katerih sta kotni hitrosti enaki. Na sorodni sliki 9 pa razberemo, da prva rešitev vztreza najvišji energiji sistema, druga pa najnižji.



Slika 8: Kotna hitrost Zemlje okoli svoje osi ω in orbitalna kotna hitrost Ω v odvisnosti od oddaljenosti Lune in Zemlje r . Indeks 0 označuje trenutno vrednost. [1]



Slika 9: Energija sistema v odvisnosti od oddaljenosti r . [1]

Zemljin dan se daljša za 4.4×10^{-8} s/dan, kar vztreza kotnemu pospešku

$$\dot{\omega} = -0.85 \times 10^{-21} \text{ rad} / \text{s}^2. \quad (5.7)$$

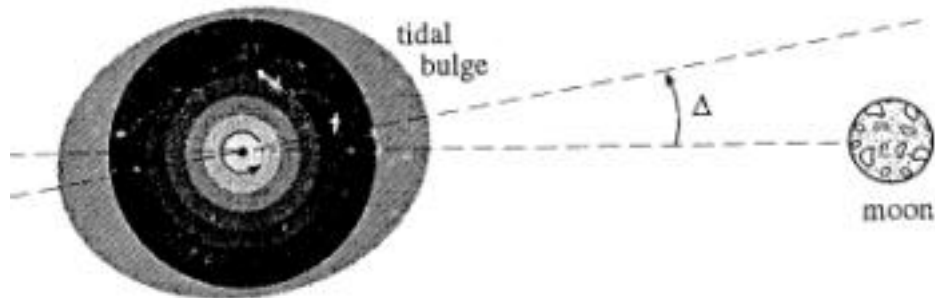
Po osnovnem odvajanju zveze $L^2 = GM_Z M_L^2 r$, ki sledi iz (5.2), zveze $J = L + S$ in

$S = I\omega$ lahko zapi_emo:

$$\frac{\dot{\omega}}{r} = -\frac{2S\dot{\omega}}{L} = -\frac{2\omega\dot{S}}{\omega L} \quad (5.8)$$

S trenutnimi vrednostmi dobimo $\dot{\omega} = 0.4 \text{ cm/me sec}$. Ve_anje razdalje se nadaljuje dokler sistem ne dose_e minimalne energije pri $r = 1.44r_0$, _e je r_0 trenutna razdalja.

Pretakanje vrtilne koli_ine Zemljine rotacije okoli svoje osi v vtilno koli_ino Luninega orbitalnega kro_enja lahko razumemo tudi druga_e. Plimska deformacija z navorom trenja zavira Zemljino rotacijo, torej deluje tudi Zemlja z navorom na plimsko deformacijo. _e naj deluje na deformacijo nasprotno enak navor, ga mora priskrbeti Luna s *plimskimi silami*. Navor *plimskih sil* pa je tem ve_ji, tem ve_ji je fazni zamik med osjo deformacije in osjo Zemlja-Luna. Tako plimska deformacija prehiteva Luno za okoli 2.9° , kar pomeni, da plima nastopi v to_kah, ki so bile to_no pod Luno $(2.9/360) \times 24.88h \approx 12 \text{ min}$ pred tem.



Slika 10: Trenje vle_e plimsko deformacijo pred Luno. [1]

Fazni zamik δ lahko izra_unamo, _e poznamo navor:

$$M = I\dot{\omega} \quad (5.9)$$

Navor, ki deluje na volumski element vode, lahko ocenimo z:

$$dM = \rho_{H_2O} \left(R_Z^2 \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi \right) h(\vartheta, \varphi) - \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \quad (5.10)$$

Navor na enoto mase sledi iz (2.11):

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -3 \frac{GM_L}{R_Z} \frac{R_Z^3}{R} \sin^2\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \quad (5.11)$$

V izra_unani vi_ini (2.16) pa moramo vpo_tevati fazni zamik δ :

$$h(\vartheta, \varphi) = \frac{M}{M_Z} \frac{R_Z^4}{R^3} \frac{3}{2} \sin^2\vartheta \cos^2(\varphi - \delta) - \frac{1}{2} \quad (5.12)$$

Integrirajmo prispevke navora po povr_ini Zemlje. Pri tem moramo izra_unati integral

$$d\vartheta d\varphi \left[3 \sin^6 \vartheta \cos^2(\varphi - \delta) \cos \varphi - \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \right]. \quad (5.13)$$

Drugi člen bo z integracijo po φ odpadel, prvi pa bo zaradi faznega kota dal $\frac{4}{5} \pi \sin 2\delta$.

Celoten navor je tako:

$$M = -\frac{6}{5} \rho_{H_2O} \pi G \frac{M_L}{M_Z} M_Z \frac{R_Z}{R} R_Z^2 \sin 2\delta. \quad (5.14)$$

Z izenačenjem (5.9) in (5.14) lahko iz izmerjene zakasnitve izračunamo kotni pospešek.

6. ROCHEJEVA RAZDALJA

Plimske sile so vzrok ene od enemu dobro znanemu astronomskemu pojavu. Če se manjši planet preveč približa večjemu, ga plimske sile raztrgajo. Najmanjšo razdaljo, do katere se mu lahko približa, da zaradi lastne teže ne zdrži skupaj, je prvi poskusil oceniti Edouard Roche l. 1850.

Kaj se dogaja, ko se manjši planet približuje večjemu? Zaradi plimskih sil se bo planet deformiral (v približku bo to kar elipsoid), deformacija pa bo spremenila lasten gravitacijski potencial. Po eni strani se torej planet deformira zaradi plimskih sil, po drugi strani pa se deformacija še dodatno poveča zato, ker so telesa, ki so od tega planeta bolj oddaljene, manj vezane z lastno gravitacijo, tiste bližje telesa pa še dodatno silijo v njegovo bližino.

Ocenimo, do katere razdalje bi se morala Zemlji približati Luna, da bi se zaradi omenjenih dveh učinkov raztrgala oziroma neskončno deformirala. V ta namen privzemimo, da je planet (Luna) vezan le z lastno težo, torej zanemarimo notranje napetosti. Zraven tega bomo zanemarili deformacijo Zemlje in s tem popravke k plimskim silam. Še prav Luna pri izjemnih deformacijah ne ostane elipsoidna, lahko tudi to zanemarimo, saj ne bistveno vpliva na izračun njenega lastnega teženega potenciala.

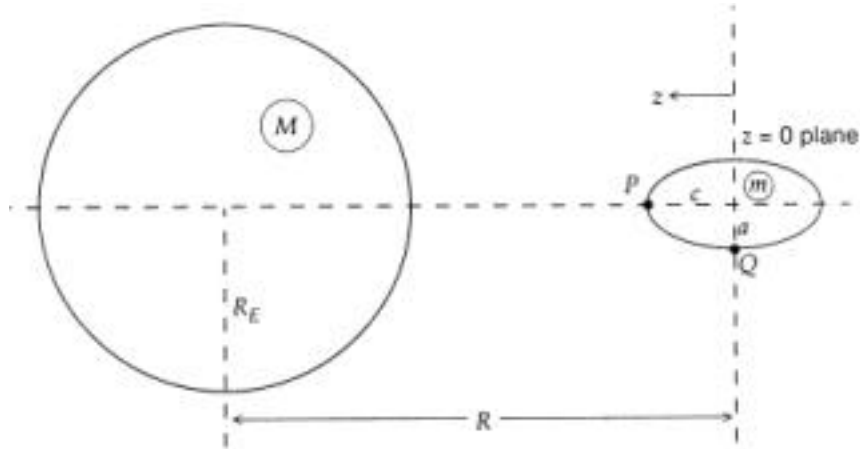
Za homogen cigarast elipsoid s krajšima polosema dolžine a in daljšo polosjo dolžine c je gravitacijski potencial na površju dan z:

$$V = G\rho \frac{d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -G\pi\rho a^2 c \left[1 + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2(c^2 - a^2)} \frac{2}{\sqrt{c^2 - a^2}} \operatorname{arcsch} \frac{c^2 - a^2}{a^2} \right]^{1/2} \\ + G\pi\rho a^2 \frac{c^2}{c^2 - a^2} \frac{x^2 + y^2}{a^2} - G\pi\rho a^2 \frac{c}{c^2 - a^2} \frac{2z^2}{x} \quad (6.1)$$

Zanima nas potencial v dveh skrajnih točkah, $P(x = y = 0, z = c)$ in $Q(x^2 + y^2 = a^2, z = 0)$. Glej sliko 11.

$$V_P = 2G\rho\pi a^2 c \frac{a^2}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \operatorname{arcsch} \frac{c^2 - a^2}{a^2} - \frac{c}{c^2 - a^2} \quad (6.2)$$

$$V_Q = G\rho\pi a^2 c - \frac{2c^2 - a^2}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \operatorname{arcsch} \frac{c^2 - a^2}{a^2}^{1/2} + \frac{c}{c^2 - a^2} \quad (6.3)$$



Slika 11: Geometrija za izra_un Rocejeve razdalje. [5]

Da bi izra_unali elipti_nost Lune moramo upo_tevati celoten potencial v to_kah P in Q. K lastni te_nosti moramo torej dodati_e potencial zaradi Zemlje. To je gravitacijski potencial in potencial zaradi rotacije okoli skupnega te_i_a, ki ga dolo_imo s privzetkom, da zaradi navora *plimskih sil* Luna vedno ka_e Zemlji isti obraz. Ker se deformacija prilagodi ekvipotencialni ploskvi, velja:

$$V_P - \frac{GM_Z}{R-c} - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{M_Z}{M_Z + M_L} R - c^2 = V_Q - \frac{GM_Z}{R} - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{M_Z}{M_Z + M_L} R^2 \quad (6.4)$$

Z ozna_bo M^* $M_Z \frac{1 + \frac{M_L}{3M_Z} - \frac{c}{3R}}{1 - \frac{c}{R}}$ in upo_tevanjem kotne hitrosti ω , lahko

pogoj (6.4) lep_e zapi_emo kot :

$$V_P - V_Q = \frac{3}{2} GM^* \frac{c^2}{R^3}. \quad (6.5)$$

Po drugi strani pa sledi iz (6.2) in (6.3):

$$V_P - V_Q = G\rho\pi a^2 c \frac{2c^2 + a^2}{(c^2 - a^2)^{3/2}} \operatorname{arcsch} \frac{c^2 - a^2}{a^2}^{1/2} - \frac{3c}{c^2 - a^2}. \quad (6.6)$$

Pri kriti_ni oddaljenosti, ki jo i_emo, poljubno majhna sprememba oddaljenosti povzro_i poljubno veliko deformacijo. Veljati mora torej pogoj $de/dR = 0$ oziroma $dR/de = 0$,

kjer je elipti_nost dana z $e = \sqrt{(c^2 - a^2) / a^2}$. Zaradi ugodnosti definirajmo e radij krogle, ki ima enak volumen kot na_ elipsoid: $r_0 = (a^2 c)^{1/3}$. Tako lahko zapi_emo $c = r_0 (1 + e^2)^{1/6}$.

Elipti_nost najdemo, e izena_imo (6.5) in (6.6):

$$\frac{3}{2\pi\rho} \frac{M^*}{R^3} = 2 \frac{r_0^3}{M_L} \frac{M^*}{R^3} = \frac{1}{e^3} \frac{3 + 2e^2}{(1 + e^2)^{1/2}} \operatorname{arcsh}(e) - 3e \quad (6.7)$$

Ko ena_bo (6.7) odvajamo po elipti_nosti in upo_tevamo pogoj $dR/de = 0$, dobimo ena_bo, ki dolo_a kriti_no elipti_nost, to je elipti_nost pri Rochejevi razdalji:

$$(4e^4 + 14e^2 + 9) \operatorname{arcsh}(e) = (9e + 8e^3)(1 + e^2)^{1/2} \quad (6.8)$$

Njena numeri_na vrednost je $e = 1.676$.

Iz (6.7) nato sledi Rochejeva razdalja:

$$R = 2.42 \frac{M^*}{M_L}^{1/3} r_0 = 2.42 \frac{M^*}{M_Z}^{1/3} \frac{\rho_Z}{\rho} R_Z, \quad (6.9)$$

kjer sta ρ_Z in R_Z gostota in radij Zemlje.

Ker je M^* odvisen od razdalje, bomo v prvi iteraciji faktor $(M^*/M_Z)^{1/3}$ izpustili. Z vrednostmi $\rho_Z = 5515 \text{ kg/m}^3$ in $\rho = 3340 \text{ kg/m}^3$ dobimo $R = 2.86 R_Z$, ki omogo_a izra_un popravka $(M^*/M_Z)^{1/3} = 1.037$.

Kon_ni rezultat je tako:

$$R = 2.97 R_Z \quad (6.10)$$

V astronomski literaturi je Rochejeva razdalja obi_ajno definirana za planeta z enakima gostotama. V tem primeru dobimo splo_no zvezo:

$$R = 2.44 R_{\text{planet}} \quad (6.11)$$

7. LITERATURA

[1] Vernon D. Barger, Martin G. Olsson, *Classical Mechanics* (McGraw-Hill, New York,

- 1973), 265-274.
- [2] A. B. Arons, *Basic physics of the semidiurnal lunar tide*, **American Journal of Physics** 47, Nov. 1979, 934-937.
 - [3] P. Seligmann, M. Steinberg, *Simple hydrodynamic treatment of ocean tide*, **American Journal of Physics** 43, dec. 1975, 1106-1108.
 - [4] Mitchell M. Withers, *Why do tides exist?*, **The Physics Teacher** 31, oct. 1993, 394-398.
 - [5] Frank D. Stacey, *Physics of the Earth* (Wiley, New York, 1977), 86-133
 - [6] Judah Levine, *The earth tides*, **The Physics Teacher**, dec. 1982, 588-595.
 - [7] Emanuel Tsantes, *Note on the tides*, **American Journal of Physics** 42, april 1974, 330-333.
 - [8] Edgar Horsfield, *Cause of the earth tides*, **American Journal of Physics** 44, august 1976, 793-794.
 - [9] Neil M. Shea, *Estimating the power in the tides*, **The Physics Teacher**, oct. 1987, p. 426.
 - [10] Laurent Hodges, *Tides, eclipses, and the densities of the Sun and the Moon*, **The Physics Teacher**, oct. 1987, p. 427.
 - [11] Gary White, Tony Mondragon, David Slaughter, Dorothy Coates, *Modelling tidal effects*, **American Journal of Physics** 61, april 1993, 367-371.