Navidezna masa pospešene krogle v tekočini

Emil Polajnar
mentor: Rudi Podgornik

8. december 1999

Kazalo

1 Uvod

Obravnavali bomo *idealne tekočine*, zato si poglejmo najprej definicijo. Idealna tekočina je neviskozna ($\eta = 0$). Zraven bomo dodali še zahtevo po nestisljivosti ($\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$) [1], kar nam omogoča lažjo obravnavo. Žal takih tekočin v naravi ni, vendar bomo iz tega izvirajoče težave obravnavali na mestih, ko se te pojavijo.

voda °C	$\eta\ \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$
0	$1,79 \cdot 10^{-3}$
20	$1,01 \cdot 10^{-3}$

snov	$\eta\ \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$
olje 20°C	$13,1 \cdot 10^{-3}$
Hg 20°C	$1,56 \cdot 10^{-3}$

Na tem mestu velja opozoriti na **superfluide**. Take tekočine imajo res $\eta = 0$. Gibljejo se brez upora in se zato ne ustavljajo (zaenkrat na časovni skali nekaj let). Vendar za nas nimajo posebnega pomena, ker so omejene na samo določene tekočine (^3He) in nizke temperature ($T \approx 2K$).

Kelvinov teorem nam nekaj pove o *cirkulaciji*, ki je definirana s formulo

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l},$$

praktično pa si jo predstavljamo kot vrtinčenje tekočine. S pomočjo časovnega odvoda (vzeti moramo substancialni[2] odvod, kajti vseskozi obravnavamo isti del tekočine, ki se giblje skupaj s tokom) zlahka dokažemo, da je $\frac{D\Gamma}{dt} = 0$ in cirkulacija se ohranja. Zaradi $\eta = 0$ dobimo integral gradienta po zaključeni poti, ki je po definiciji enak 0. Če imamo v nekem trenutku brezvrtinčno tekočino, bo taka ostala v vseh nadaljnjih časih. Mirujoče tekočine so očitno brezvrtinčne in če jo poženemo v gibanje, mora torej po prejšnjem ostati brezvrtinčna.

Bernoullijeva enačba nam bo prišla še prav, zato jo zapišimo v splošni obliki

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\frac{\partial\phi}{\partial t} = \text{konst.}$$

[1] Za nestisljivo tekočino velja $\varrho = $ konst. in iz kontinuitetne enacbe $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho\vec{v}) = 0$ sledi $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.

[2] $\frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) f$

2 D'Alambertov paradoks

Imejmo idealno tekočino in telo. Radi bi opisali obtekanje telesa, naš končni cilj pa je poiskati silo, s katero deluje tekočina na enakomerno premikajoče se telo. Na tem mestu naj spomnimo, da sta problema obtekanje mirujočega telesa in premikanje telesa v mirujoči tekočini ekvivalentna. Pripeljeta nas do enakih rezultatov, a sta poti različno zahtevni.

Zaradi enostavnosti se omejimo na enakomerno premikanje telesa v mirujoči tekočini. Silo bomo določili s premislekom, brez računanja. Če deluje na telo sila $-\mathbf{F} \neq 0$, potem deluje telo na tekočino po *II. Newtonovem zakonu* z enako, a nasprotno usmerjeno silo. Za enakomerno premikanje telesa moramo stalno dovajati delo, ki se nalaga v tekočino. Zakon o ohranitvi energije nam zagotavlja, da bi se morala energija s pomočjo disipacije pretvoriti v toploto. Vendar disipacije v idealni tekočini ni. Zaradi tega mora biti $\mathbf{F} = 0$.

Posvetimo še nekaj besed veljavnosti naših ugotovitev. Vse tekočine imajo $\eta \neq 0$. Tik ob površini imamo samo pogoj za radialno hitrost tekočine, ta mora biti enaka radialni hitrosti površine telesa, ker je le tako telo vseskozi v stiku s tekočino. Tangencialna hitrost pa ni omejena. Torej imamo na meji s telesom nezvezni skok hitrosti. Pri idealni tekočini to ni problem, ob viskoznosti pa skoka ni temveč nastane *mejna plast*, kjer imamo gradient hitrosti. Različne plasti se med sabo trejo in odvajajo kinetično energijo v toploto. Za enakomerno hitrost bi morali torej stalno dovajati delo od zunaj. Pomislili bi, da se z naraščanjem hitrosti mejna plast tanjša in postane zanemarljiva. Vendar ni tako, kajti pri višjih hitrostih pride do turbulence in disipacija se le še poveča. Dokler imamo opraviti z enakomerno premikajočim se telesom, sile na telo ne smemo zanemariti.

3 Pospešeno gibanje krogle

Obravnavali bomo preprost primer pospešenega gibanja krogle v idealni tekočini. Razstavimo gibanje na enakomerno in pospešeno ter vse pospešeno gibanje pripišimo krogli, enakomerno gibanje pa odpravimo. To lahko naredimo brez izgube splošnosti, saj smo v prejšnjem razdelku videli, da enakomerna hitrost ne povzroča sile.

Vprašajmo se o silah na kroglo med njenim pospeševanjem. Imamo dve možnosti:

- glede na prejšnji razdelek sklepamo, da tekočina ne povzroča upora na krogli,
- pojavi se dodatna sila "upora".

Oba primera strnemo po *II. Newtonovem zakonu* v formuli $\mathbf{F} = m_{eff}\,\mathbf{a}$. Naša naloga je izračunati m_{eff}.

Ob začetku gibanja po naših predpostavkah tekočina miruje in je zato brezvrtinčna in taka ostane tudi v nadaljevanju poskusa.[3] V matematičnem jeziku zapišemo to kot $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$. Ker za vsako funkcijo f velja $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f = 0$, lahko zapišemo $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi$. Tak tok je *potencialni tok*. Poleg tega je tekočina še nestisljiva, zato imamo $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ in

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{1}$$

Dobimo znano *Laplaceovo* enačbo, za katero poznamo splošno rešitev v sferičnih koordinatah, ki jo v obliki vsote zapišemo

$$\phi(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\varphi) + B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\varphi).$$

Ker tekočina v laboratorijskem sistemu miruje, morajo biti $A_n = 0, \forall n$.[4] Na površini krogle nam robni pogoj pravi, da se mora tekočina v smeri normale gibati tako hitro kot sama površina. Torej zapišemo

$$v_r = \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R} = U\cos\varphi \tag{2}$$

Ob upoštevanju te relacije ostane v vsoti samo en člen

$$\phi(r,\varphi) = -\frac{1}{2}R^3 U \frac{\cos\varphi}{r^2}. \tag{3}$$

Za hitrostno polje dobimo

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \mathrm{grad}\,\phi \\ &= U\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\cos\varphi, \frac{\sin\varphi}{2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

[3]Sledi iz Kelvinovega teorema, stran 1

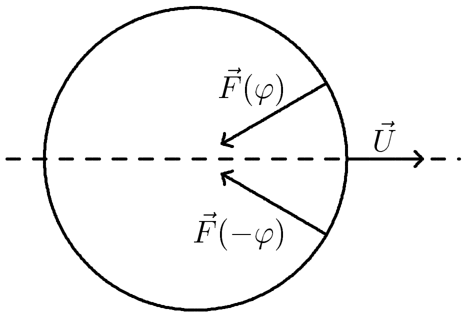
[4]Veljati mora $\mathbf{v}(\infty) = 0$.

S pomočjo Bernoullijeve enačbe[5] izračunamo pritisk, kjer upoštevamo $v^2(\infty) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(\infty) = 0$ in $p(\infty) = 0$ ter si za konstanto izberemo konst. $= 0$. Ob začetnem pogoju

$$U(t=0) = 0 \quad \text{in} \quad U = U(t)$$

sledi izraz za pritisk

$$\begin{aligned} p(r,\varphi) &= -\frac{1}{2}\varrho v^2 - \varrho\frac{\partial\phi}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{8}\varrho U^2\left(1 + 3\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{2}\varrho R\cos\varphi\frac{dU}{dt}. \end{aligned} \tag{5}$$



$$\left\|\vec{F}(\varphi)\right\| = \left\|\vec{F}(-\varphi)\right\| = F$$

$$\vec{F}(\varphi) + \vec{F}(-\varphi) = -2F\cos\varphi$$

Slika 1: Pojasnilo k izpeljavi sile na kroglo.

Silo na kroglo izračunamo s pomočjo površinskega integrala in napetostnega tenzorja, ki ima v tekočinah, kjer ni strižnih sil, enostavno obliko $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$. Gostoto sile izrazimo

$$\begin{aligned} f_i &= \sigma_{ik} dS_k = -(p\delta_{ik} n_k) dS \\ &= -p\delta_{ir} dS \quad , \quad \vec{n} = (n_r, n_\varphi, n_\theta) = (1,0,0) \end{aligned}$$

Ko razrešimo δ_{ir}, se pokaže, da sila deluje le v smeri enotskega vektorja $\vec{e_r}$ in jo dobimo s pomočjo integrala po površini krogle $r = R$. Podobno bi lahko prišli do rezultata z razmislekom (glej sliko 1), kajti pritisk ni odvisen od

[5]Zapisali smo jo na strani 1.

polarnega kota, glede na φ pa je soda funkcija.[6]

$$\begin{aligned} F' &= \int p\, dS \\ &= 2\pi R^2 \int p \cos\varphi \, d(\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{2} m \frac{dU}{dt} \end{aligned} \tag{6}$$

V zgornjem izrazu smo z $m = \frac{4\pi R^3}{3}\varrho$ označili maso izpodrinjene tekočine. Newtonov zakon bi za kroglo v celoti z *efektivno* maso zapisali kot

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m_k \mathbf{a} + \frac{1}{2} m \mathbf{a} \quad , \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \\ &= \left(m_k + \frac{m}{2} \right) \frac{d\mathbf{U}}{dt} \\ &= \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3} \left(\frac{\varrho}{2} + \varrho_k \right)}_{m_{eff}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \end{aligned}$$

kjer je ϱ gostota tekočine in ϱ_k gostota krogle.

Na začetku smo privzeli, da tekočina v laboratorijskem sistemu miruje. Torej je delo, ki ga opravi krogla na tekočini, ko pospeši od 0 do končne hitrost U, spravljeno v dipolnem obtekanju, ki ga opisujejo tokovnice. Izračunamo ga enostavno

$$W_k = \int \mathbf{F}' d\mathbf{s} = \int F' U dt = \frac{m}{2} \int_0^U \frac{dU}{dt} U dt^{7} = \frac{1}{4} m U^2 .$$

Opazimo ulomek $\frac{1}{4}$, saj smo pri kinetični energiji navajeni $\frac{1}{2}$. Pri analogiji z magnetnim poljem nam bo prišlo prav, če to zapišemo kot $W_k = \frac{1}{2}\alpha\, m U^2$, kjer je $\alpha = \frac{1}{2}$. Enak rezultat bi dobili tudi z integralom gostote kinetične energije[8] po prostornini izven krogle.

Celotna gibalna količina, ki jo preda krogla v tem času tekočini, je

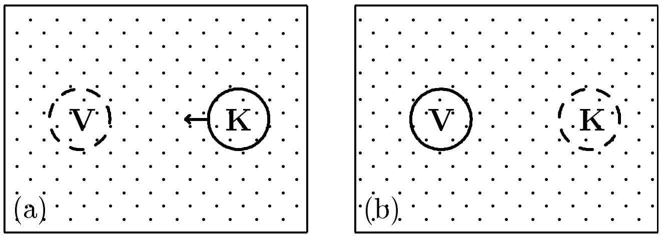
$$\triangle G = \int F' dt = \frac{m}{2} \int_0^U \frac{dU}{dt} dt = \frac{1}{2} m U .$$

[6]Cos je soda funkcija in velja $\cos(-x) = \cos x$.

[7]"Fizikalno" pokrajšamo dt in integriramo, matematično pa sledi iz $\frac{dU}{dt} U dt = \frac{1}{2} \frac{d(U^2)}{dt} dt$. Sedaj imamo odvod, ki ga lahko integriramo.

[8]$w_k = \frac{1}{2} \varrho v^2$ in $W_k = \int w_k dV$

Po drugi poti bi lahko spremembo gibalne količine izračunali s pomočjo integrala gostote gibalne količine po prostornini izven krogle. Tu zaidemo v težave, ker nam integral divergira, česar pri kinetični energiji nismo imeli. Neskončnost je jasno znamenje, da nekaj ni v redu. Za kinetično energijo nam robnih pogojev ni bilo treba poznati, saj hitrost tekočine tako hitro pada z oddaljenostjo (r) od krogle, da je na robu enaka 0. Za izračun gibalne količine pa potrebujemo natančne robne pogoje, kar nam pokaže naslednji primer.



Slika 2: Krogla K na sliki (a) se ob času $t = 0$ začne pospešeno gibati v levo in je ob $t = T$ na mestu V, slika (b). Enaka prostornina tekočine se premakne od V na K

Tekočina je zaprta v škatli z negibnimi stenami. Vsak premik krogle v eni smeri, mora biti uravnovešen (zaradi sten) s premikom enake količine tekočine v nasprotni smeri. To pomeni, da je gibalna količina tekočine enaka mU in ne $-\frac{1}{2}mU$. Torej je morala tekočina poleg gibalne količine od krogle zaradi pospeševanja prejeti še dodatno gibalno količino $\frac{3}{2}mU$, seveda od sten. Ta se je naložila v celotno tekočino kot majhen tok v nasprotni smeri premikanja. Ker pa je masa celotne tekočine tako velika, se to ne pozna na kinetični energiji, saj je $W_k = \frac{p^2}{2M}$.

4 Analogija z magnetnim poljem

Da lahko prenesemo problem iz hidrodinamike v magnetostatiko (ali elektrostatiko), sledi iz primerjave enačb. Poglejmo si primerjavo količin, ki jih lahko zamenjamo med seboj. Paziti moramo le toliko, da pri magnetostatiki nimamo nobenih tokov ali električnih polj, v elektrostatiki pa ne magnetnih polj in nabojev.[9]

[9]Uporabimo Maxwellove enačbe: $\operatorname{div}\mathbf{D} = \varrho_e$, $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{dt}$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \frac{\partial\mathbf{D}}{dt}$.

hidrodinamika	magnetostatika	elektrostatika
$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$	$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$	$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$
$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$

V zunanje polje $\mathbf{B}_z$[10] damo kroglo in snov se odzove z enakomerno magnetizacijo $\mathbf{M}$. Polje v snovi zapišemo

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_z + \mu_0 \mathbf{M}.$$

Magnetno poljsko jakost v snovi povežemo z zunanjo s pomočjo *depolarizacijskega* polja in depolarizacijskega faktorja f.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_z - f\mathbf{M}$$[11]

Naj ima krogla magnetizacijo $\mathbf{M}$, zunanjega polja ($\mathbf{H}_z = 0$) pa naj ne bo. Torej imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_z - f\mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{H}_z = 0 \\ &= -f\mathbf{M}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{M}(1-f). \end{aligned}$$

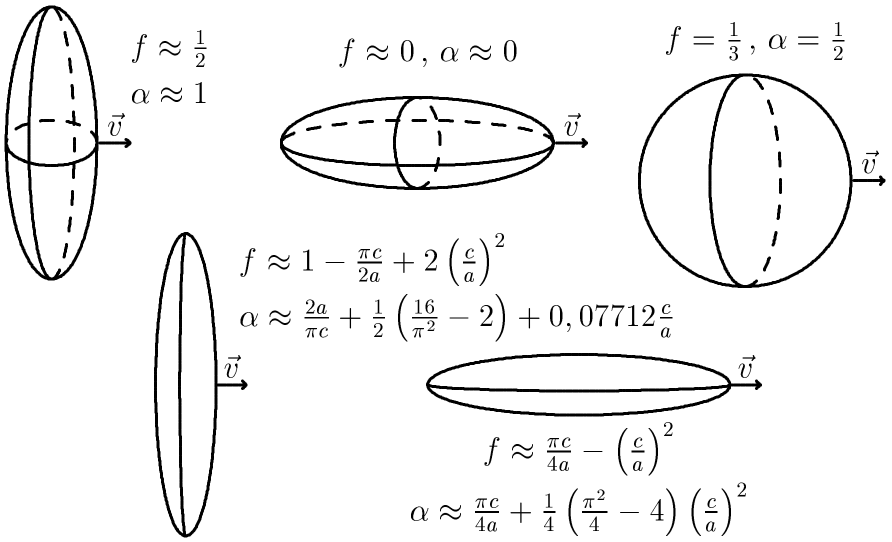
Tako nam bo notranje polje $\mathbf{B}$ nadomestilo hitrost krogle $\mathbf{U}$ v hidrodinamiki. Če nas zanima zunanje polje, uporabimo take robne pogoje kot pri tekočini, normalna komponenta magnetne gostote na površini krogle mora biti enaka 0. Gostota magnetne energije je $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Če nam bo uspelo izračunati to, bomo hkrati z zamenjavo $B \to U$ dobili gostoto kinetične energije.

Najprej se vprašajmo, kolikšno energijo ima celoten prostor. Ta je nasprotno enaka delu, ki ga opravimo, da nanesemo magnetne dipole na površino in s tem ustvarimo tako polje, kot ga ima enakomerno magnetizirana krogla. Zapišimo to s formulo in izračunajmo.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= V\mathbf{M} \Rightarrow dP = VdM \\ W_c &= -A = -\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \text{ in } \mathbf{H} \| \mathbf{M} \\ &= -\mu_0 V \int HdM = -\mu_0 V \int (-fM) dM \end{aligned}$$

[10]Oznake brez indeksov se nanašajo na dogajanje v snovi, zunaj snovi pa imajo oznake indeks z.

[11]Enačbo enake oblike smo zapisali pri EMP za električno poljsko jakost E.



Slika 3: Primerjava različnih elipsoidov in njihovih koeficientov. V ravnini xy sta polosi enaki a, v smeri z osi pa je polos dolga c. Koeficienti so dobljeni z razvojem v vrsto in mora veljati za "cigaro" $a \ll c$, za "disk" pa $c \ll a$. Za primerjavo je dodana še krogla

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}Vf\mu_0 M^2 \quad , \quad M = \frac{B}{\mu_0(1-f)} \\ &= \frac{B^2}{2\mu_0}V\frac{f}{(1-f)^2} \end{aligned}$$

Izračunati moramo še energijo, ki bi jo lahko imel prostor znotraj krogle, če bi kroglo umaknili, polje pa bi ostalo, in jo odšteti od zgornjega rezultata pa bomo dobili energijo zunaj krogle z radijem R. Upoštevamo polje v praznem prostoru ($\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$).

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{1}{2}V\mu_0 H^2 = \frac{V}{2}\mu_0 f^2 M^2 \\ &= \frac{B^2}{2\mu_0}V\frac{f^2}{(1-f)^2}. \end{aligned}$$

Že prej obljubljeno odštevanje nam da

$$E = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{f}{1-f}\frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Preoblikujmo ta rezultat v skladu z našo nalogo. Gostota energije magnetnega polja je $\frac{B^2}{2\mu_0}$, mi pa imamo tekočino in gostota kinetične energije je $\frac{\varrho U^2}{2}$. Prava enačba je torej

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{4\pi R^3}{3}\frac{f}{1-f}\frac{\varrho U^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\alpha m U^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Navidezna masa, ki se doda naši krogli je α-ti del mase m.[12]

Kakša je navidezna masa krogle po tej formuli? Krogla je simetrična okoli vseh teh koordinatnih osi, zato je $f = \frac{1}{3}$, kajti iz analogije z magnetnim poljem vemo, da se vsi trije f-i sestavijo v enoto.[13] S tem podatkom imamo

$$\alpha = \frac{f}{1-f} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

kar smo dobili že na strani 5 na drugačen način.

Vendar to ni bila vaja, ki bi bila le sama sebi namen. Za koristno pridobitev se izkaže, če hočemo izračunati koliko energije oddamo tekočini pri premikanju različnih vrst elipsoidov (glej sliko 3). Tokovnice niso več lahko izračunljive, indeks f za elipsoid v smeri gibanja (ki je v smeri ene od glavnih osi), pa nam takoj da rezultat.

5 Zaključek

Omenili smo že, da enakomernega gibanja v tekočinah ne moremo obravnavati z idealno tekočino. V takem primeru uporabimo *Stokesovo enačno* za viskozne tekočine ($F_u = 6\pi R\eta U$). Glede pospešenega gibanja moramo ločiti dve možnosti. Pri neomejenem ali dolgotrajnem pospeševanju, ko končna hitrost U preveč naraste, smo spet v slepi ulici, kajti mejna plast se začne odlepljati, pride do disipacije energije in sila ni taka, kot smo jo napovedali. Če pa imamo opraviti z omejenim pospeševanjem, kjer so končne hitrosti majhne (nihanje), potem postane potencialni opis uporaben.

[12] $m = \frac{4\pi R^3}{3}\varrho$, je masa izpodrinjene tekočine.

[13] Ta faktor smo izračunali tudi pri EMP v poglavju iz elektrostatike, Clausius-Mossoti-Lorenz-Lorentzov izračun **F**.

Poglejmo si kroglico z radijem $R = 2cm$, ki niha v vodi. Debelina mejne plasti za majhne hitrosti je reda $\sqrt{\frac{\eta}{\omega\rho}}$ ([1]). Potencialno teorijo lahko uporabimo takrat, ko velja $\sqrt{\frac{\eta}{\omega\rho}} \ll R$. Za našo kroglico dobimo s tem frekvenco

$$\nu \gg \frac{\eta}{2\pi\rho R^2} \approx 1mHz.$$

Literatura

[1] T.E.Faber *Fluid Dynamics for Physicists*, Cabridge University Press, 1995

[2] L.D.Landau, E.M.Lifšic *Mehanika neprekidnih sredina*, Beograd, 1965