

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Oddelek za fiziko

SEMINAR  $1_a$ -1. LETNIK, II. STOPNJA

# Meritve Casimirjevega efekta z nanomembranami

avtor: ŽIGA KOS

mentor: PROF. DR. RUDOLF PODGORNIK

Ljubljana, 29. januar 2013

## Povzetek

V tem seminarju bo razložen Casimirjev efekt. Nato bo točno izpeljana Casimirjeva sila med dvema prevodnima ploščama pri  $T = 0$  K. Prikazana bo uporaba teorema bližnje sile ter razložena Lifshitzova teorija, ki omogoča izračun termične Casimirjeve sile. Ponazorjeni bodo različni modeli za dielektrično funkcijo, ki jih lahko vključimo v Lifshitzovo teorijo ter razlike med njimi. Končno bo podrobneje opisan eksperiment, ki je izmeril Casimirjev efekt s pomočjo ugotavljanja resonančne frekvence nanomembrane, ki je dovolj natančen, da je potrdil Drudejev model napram modelu plazme na razdalji od 0,1 do  $2 \mu\text{m}$ .

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Casimirjev efekt</b>	<b>3</b>
2.1	Izpeljava Casimirjeve sile pri $T = 0$ K . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Casimirjeva sila med realnimi prevodniki</b>	<b>6</b>
3.1	Teorem bližnje sile . . . . .	6
3.2	Lifshitzova teorija . . . . .	6
3.3	Upoštevanje dielektrične funkcije . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Eksperimentalna opazovanja</b>	<b>8</b>
4.1	Pregled uspešnih meritev Casimirjevega efekta . . . . .	8
4.2	Meritev z nanomembranami . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Zaključek</b>	<b>11</b>

## 1 Uvod

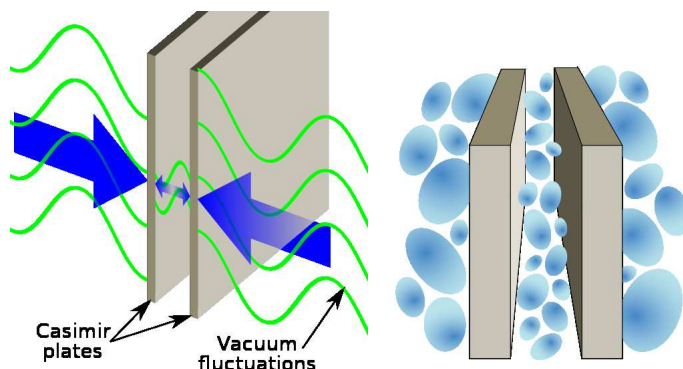
Na nanometrski skali prevladujejo drugačne interakcije, kot na primer znotraj atomov in molekul, ter drugačne, kot na povsem makrometrskem nivoju. Te interakcije, dovolj dolgega dosega, bi lahko razdelili na Van der Waalsove, elektrostatične ter polarne ([1]). Del Van der Waalsovih interakcij je tudi Casimirjeva sila. Dobro poznavanje le te je pomembno pri obravnavi interakcij med nanocevkami, plastmi grafena ter v drugih fizikalnih sistemih.

To silo, ki deluje med dvema prevodnima elektronevtralnima ploščama pri absolutni ničli ter brez kakršnega koli zunanega polja, je izračunal že Nizozemski fizik Hendrik B. G. Casimir leta 1948. Je posledica oscilacij elektromagnetnega polja v vakuumu, ki jih predvideva kvantna elektrodinamika. Casimirjevo teorijo je nekaj let kasneje razširil Lifshitz, ki je podal enačbe, ki omogočajo izračun sile pri poljubni temperaturi. Kljub vsemu pa je Casimirjeva sila zelo majhna, zato je trajalo dolgo časa, da so jo natančno izmerili. Bilo je sicer že nekaj eksperimentov, ki so opazili silo, ki bi lahko bila Casimirjeva. Prvi pa jo je natančno izmeril S. K. Lamoreaux leta 1997.

Kljub temu, da je Lifshitzova teorija stara že več kot 50 let, je diskusija o nekaterih vidikih še vedno dejavna. Problematična je bila tudi izbira pravilnega modela za dielektrično funkcijo pri nizkih frekvencah. Eksperimentalna potrditev enega ali drugega modela pa zahteva veliko natančnost. V splošnem pa teorija bistveno presega ta seminar. Lifshitz je na primer predvidel tudi že odbojne sile. Teorija pa se razvija dalje, vse do Casimirjevega upora vakuuma ter Casimirjevega efekta v drugih fizikalnih sistemih.

## 2 Casimirjev efekt

Casimirjevo silo razložimo s pomočjo oscilacij elektromagnetnega polja v vakuumu. Čeprav je pričakovana vrednost električnega polja v vakuumu 0, pa to ne moremo reči za pričakovano vrednost kvadrata električnega in magnetnega polja. To nam zapoveduje že Heisenbergova nedoločenosť. Ker je dielektrična funkcija vakuuma 1, imajo Maxwellove enačbe za rešitev le ravne valove, oblike  $\vec{E}(\vec{r}, t) \sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t}$ . Vendar plošči omejujeta ta nihanja, saj mora veljati  $\vec{E}\Big|_{\text{plošča}} = 0$ . Plošči bistveno zmanjšata število nihajnih načinov, kar zmanjša energijo vakuuma. To je prikazano na sliki 1. Posledica tega je privlačna sila med ploščama, ki je



Slika 1: Plošči omejujeta oscilacije elektromagnetnega polja vakuuma. [2]

velikosti

$$F_c = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240 d^4} \quad (1)$$

kar je pokazal že Casimir, enačbo 1 pa bomo izpeljali tudi v nadaljevanju.

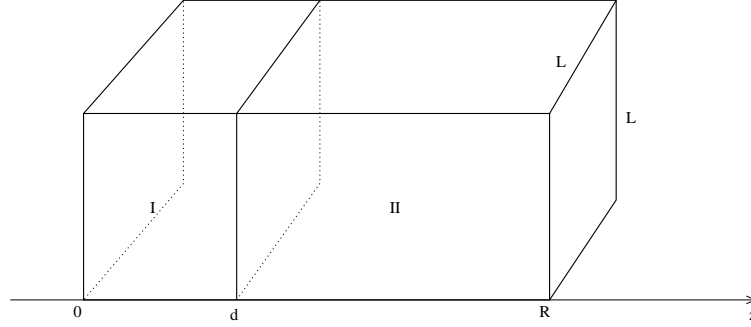
Obstaja kar nekaj klasičnih analogij Casimirjevega efekta. Primer tega sta dve plošči v zraku, ki se privlačita, saj omejujeta akustične vibracije. Najdalje v zgodovino pa sega opažanje, da se ladje na morski gladini prav tako privlačijo. Fizikalna ozadja teh pojavov so klasična, v nasprotju s Casimirjevim efektom v vakuumu, ki je kvantne narave. Nam pa takšne analogije pomagajo razumeti razloge za Casimirjev efekt.

### 2.1 Izpeljava Casimirjeve sile pri $T = 0$ K

Izračunajmo Casimirjevo silo med dvema ploščama pri absolutni ničli. V nadaljevanju seminarja se ne bomo več posvečali izpeljavam, koristno pa si je pogledati vsaj to, saj vključuje kar nekaj prijemov, kako se izogniti diverencam integralov z upoštevanjem fizikalnih principov. V kvantni elektrodinamiki se energija vakuuma zapiše kot

$$U_0 = \sum_n \frac{1}{2} \hbar \omega_n \quad (2)$$

Temu bomo dodali še senčeneje visokih frekvenc oblike  $e^{-\frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega_n}{c}}$ . Ne glede na to, da smo privzeli, da v ploščah ne more biti električnega polja, bo valovanje dovolj visokih frekvenc vedno šlo skozi plošči in ne bo prispevalo k sili. Kasneje bomo  $\alpha$  poslali proti 0. Glejmo sedaj oscilacije elektromagnetnega polja v škatli, predstavljeni na sliki 2. Naj bosta stranici



Slika 2: Shema k izpeljavi Casimirjeve sile pri  $T = 0$  K

$L$  bistveno daljši od stranice  $d$ , na koncu pa bomo tudi  $R$  poslali proti neskončnosti, da dobimo le dve plošči, med katerima deluje Casimirjeva sila. Naj veljajo periodični robni pogoji, ki narekujejo

$$k_z = \frac{n\pi}{d} \quad (3)$$

Velikost valovnega vektorja lahko potemtakem zapišemo kot

$$k_{lmn} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \quad (4)$$

kjer velja  $l, m, n \in \mathbb{N}$ . Ker je  $L \gg d$ , lahko namesto vsote po  $l$  in  $m$  zapišemo kar integral

$$\sum_m \rightarrow \frac{L}{\pi} \int_0^\infty dk_y \quad (5)$$

Energijo vakuuma med ploščama na razdalji  $d$  lahko nato zapišemo

$$U_0(d) = \hbar c \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 + k_x^2 + k_y^2} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 + k_x^2 + k_y^2}} \quad (6)$$

Tu transformiramo spremenljivke analogno uvedbi polarnih koordinat. Uvedemo  $k_r^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Velja  $dk_x dk_y = k_r dk_r d\phi$ .

$$U_0(d) = \hbar c \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty dk_r k_r \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 + k_r^2} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 + k_r^2}} \quad (7)$$

Če uvedemo še  $u = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{i\pi}\right)^2 k_r^2}$  ter  $\gamma = \frac{\alpha}{a}$ , lahko  $U_0$  zapišemo v obliki

$$U_0(d) = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{2d^3} \sum_{l=1}^{\infty} \int_1^{\infty} du u^2 l^3 e^{-\gamma l u} = -\frac{\hbar c L^2 \pi^2}{2d^3} \frac{d^3}{d\gamma^3} \sum_{l=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} e^{-\gamma l u} \quad (8)$$

$$= \dots = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{2d^3} \frac{d^2}{d\gamma^2} \int_1^{\infty} du \frac{e^{\gamma u}}{(e^{\gamma u} - 1)^2} \quad (9)$$

Vsoto po  $l$  smo izračunali kot geometrično vrsto  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ . Uvedemo pa še novo spremenljivko  $x = e^{\gamma u} - 1$  in  $dx = \gamma e^{\gamma u} du$ . Zapišemo

$$U_0(d) = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{2d^3} \frac{d^2}{d\gamma^2} \int_{e^{\gamma}-1}^{\infty} \frac{dx}{\gamma x^2} = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{2d^3} \frac{d^2}{d\gamma^2} \left( -\frac{1}{\gamma x} \Big|_{e^{\gamma}-1}^{\infty} \right) = \frac{\hbar c L^2 \pi^2}{2d^3} \frac{d^2}{d\gamma^2} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{1}{e^{\gamma}-1} \right) \quad (10)$$

Nato razvijemo  $\frac{1}{\gamma(e^{\gamma}-1)}$  v Taylorjevo vrsto okoli 0 in dobimo

$$U_0(d) = \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{2d^3} \frac{d^2}{d\gamma^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2}{\gamma} + \frac{1}{12} - \frac{\gamma^2}{720} + \mathcal{O}(\gamma^3) \right) \quad (11)$$

$$= \hbar c \pi^2 L^2 \left( \frac{3d}{\alpha^4} - \frac{1}{2\alpha^3} - \frac{1}{720d^3} + \mathcal{O}(\alpha) \right) \quad (12)$$

$$U_0(R-d) = \hbar c \pi^2 L^2 \left( \frac{3(R-d)}{\alpha^4} - \frac{1}{2\alpha^3} - \frac{1}{720(R-d)^3} + \mathcal{O}(\alpha) \right) \quad (13)$$

Naj bo  $U_0 = U_0(d) + U_0(R-d)$ . Da pa se izognemo divergencam v nadaljevanju, uvedimo še  $\overline{U}_0 = U_0(aR) + U_0((a-1)R)$ . Naj bo energija plošče pri  $d$  enaka razliki med  $U_0$  in  $\overline{U}_0$ , torej razliki izračunanima energijama vakuuma pri plošči na mestu  $d$  in na mestu  $aR$ . S tem se izognemo sicer divergenčnim prispevkom, ki pa ne vsebujejo odvisnosti od  $d$ . Zapišemo

$$U(d, L) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (U_0 - \overline{U}_0) \quad (14)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{\hbar c \pi^2 L^2}{720} \left( -\frac{1}{d^3} - \frac{1}{(R-d)^3} + \frac{1}{R^3 a^3} + \frac{1}{R^3 (1-a)^3} + \mathcal{O}(\alpha) \right) \right) \quad (15)$$

$$U(d, L) = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c L^2}{d^3} \quad (16)$$

$$F_c = \frac{dU(d, L)}{dd} = \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240d^4} \quad (17)$$

Čeprav smo za izpeljavo sile pri 0 K potrebovali energijo vakuuma, ki jo poda kvantna elektrodinamika, ima Casimirjeva sila velik makroskopski učinek. Med dvema prevodnima ploščama s površino  $1 \text{ m}^2$  in na razdalji  $1 \text{ mm}$ , deluje sila  $1,3 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ . Med prevodniki prevlada na mikronski skali Casimirjeva sila. Če bi problem obravnavali povsem klasično, sile pri absolutni ničli ne bi smelo biti.

### 3 Casimirjeva sila med realnimi prevodniki

Doslej smo izpeljali Casimirjevo silo za idealen primer dveh vzporednih prevodnih plošč pri temperaturi nič. Vendar to ni optimalna zasnova za eksperiment, zato potrebujemo teorijo, ki opiše Casimirjev efekt za drugačno geometrijo postavitve, neničelno temperaturo ter za končne dielektričnosti  $\epsilon(\omega)$ .

#### 3.1 Teorem bližnje sile

Oglejmo si najprej, kako razrešimo problem z geometrijo postavitve. Silo med dvema vzporednima ploščama pri  $T = 0$  smo že zapisali. Vendar se v eksperimentu težko zagotovi, da sta plošči zares vzporedni. Namesto dveh plošč se zato najpogosteje uporablja kroglo in ploščo ([5], [6]). Ta problem ima samo en pomemben parameter - razdaljo med kroglo in ploščo.

Nova postavitev pa zahteva tudi nov izračun sile. Vendar, če sta sfera in plošča dovolj blizu, lahko uporabimo teorem bližnje sile (ang. Proximity Force Theorem), ki so ga vpeljali J. Blocki *et al* leta 1977 ([3]). Teorem bližnje sile so zapisali: "Sila med dvema rahlo ukrivljenima površinama, kot funkcija medsebojne oddaljenosti, je sorazmerna integracijski energiji na površinsko enoto med dvema ravnima površinama. Sorazmernostni faktor je enak  $2\pi$  krat recipročna vrednost korena Gaussove ukrivljenosti na najbližji točki". Z enačbo lahko to zapišemo kot

$$F(s) = 2\pi \sqrt{R_x R_y} \epsilon(s) \quad (18)$$

Izpeljava enačbe 18 temelji na razvoju enačbe površine v Taylorjevo vrsto. Količini  $R_x$  in  $R_y$  sta glavni ukrivljenosti. Enačbo 18 zlahka uporabimo pri računu Casimirjeve sile med sfero in ploščo, kjer bo sorazmernostni faktor kar  $2\pi R$ . Da pa bo teorem bližnje sile veljal, mora biti medsebojna razdalja bistveno manjša od radija krogle, kar pa je v večini eksperimentov izpolnjeno. Račun sile med poljubnimi telesi pa je seveda bistveno bolj zapleten.

Poglejmo si uporabo teorema na primeru sile pri 0 K. Iz enačb 16 in 18 sledi:

$$F_c(d) = 2\pi R \frac{U}{L^2} = \frac{2\pi^3 \hbar c}{720} \frac{R}{d^3} \quad (19)$$

Izračunali smo Casimirjevo silo med kroglo in ploščo na oddaljenosti  $d$ .

#### 3.2 Lifshitzova teorija

V tem seminarju smo že izračunali Casimirjevo silo pri absolutni ničli. Koristno pa je vedeti, kakšna bo sila pri neki končni temperaturi. Temperatura ima na silo dvojni vpliv. Prvič spodbuja oscilacije elektro-magnetnega polja, drugič pa vpliva na dielektrično funkcijo prevodnih plošč. Pri računi pri absolutni ničli smo postavili dielektrično funkcijo na neskončnost. Ob končni temperaturi pa končna dielektrična funkcija povzroči, da lahko elektromagnetni valovi prodrejo tudi nekoliko v ploščo, kar nam spremeni robne pogoje. Vdorna globina je

seveda funkcija frekvence valov. Te probleme je obravnaval že Lifshitz ter leta 1956 v članku [4] objavil enačbo za izračun Casimirjeve sile pri poljubni temperaturi. Enačba se glasi:

$$F(d, T) = \frac{k_B T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^3 \int_1^{\infty} p^2 \left( \left[ \frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{-\frac{2p\omega_n d}{c}} - 1 \right]^{-1} \right. \quad (20)$$

$$\left. + \left[ \frac{(s_1 + p\epsilon_1)(s_2 + p\epsilon_2)}{(s_1 - p\epsilon_1)(s_2 - p\epsilon_2)} e^{-\frac{2p\omega_n d}{c}} - 1 \right]^{-1} \right) dp \quad (21)$$

kjer velja

$$s_i = \sqrt{\epsilon_i(i\omega_n) - 1 + p^2} \quad \omega_n = \frac{2\pi n k_B T}{\hbar} \quad (22)$$

Enačba 21 omogoča izračun Casimirjeve sile, vse kar je potrebno je poznati dielektrično funkcijo plošč. V limiti nizkih temperatur, kjer postavimo  $\epsilon$  na neskončno, enačba 21 da seveda že poznan rezultat za Casimirjevo silo pri absolutni ničli.

### 3.3 Upoštevanje dielektrične funkcije

Kot smo pokazali, zavisi izračun Casimirjeve sile le od dielektrične funkcije plošč. Ta je v splošnem kompleksna funkcija frekvence. Zadošča pa nam poznati le realno ali imaginarno komponento, saj med njima veljajo Kramers-Kronigove relacije.

V članku [6], kjer so natančno izmerili Casimirjevo silo med 0.7 in 7  $\mu\text{m}$ , so za teoretična predvidevanja Casimirjeve sile izmerili dielektrično funkcijo za valovne dolžine med 191 in 1700 nm s pomočjo elipsometrije. Pri taki meritvi se opazuje, kako se pri odboju na plošči spremeni polarizacija in faza valovanja. Meritve so izvedli na enakih ploščah, kot so bile uporabljene v eksperimentu. Pri večjih valovnih dolžinah so uporabili tabelirane vrednosti dielektrične funkcije. Za manjše valovne dolžine pa je potrebno podatke ekstrapolirati, to pa zavisi od tega, kateri teoretični model se uporabi.

Za ekstrapolacijo dielektrične funkcije se v glavnem uporabljata dva modela, Drudejev [5] in model plazme [6]. Drudejev model lahko izpeljemo iz gibalne enačbe za gibanje prostih elektronov v zunanem polju. Gibanje je dušeno zaradi trkov s pozitivnimi ioni [7].

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -m\gamma\mathbf{v}(t) + e\mathbf{E}(t) \quad (23)$$

Enačbo za dielektrično funkcijo lahko v tem primeru zapišemo kot

$$\epsilon_{Drude}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad (24)$$

Enačba 24 se poenostavi, če zanemarimo dušenje ter dobimo enačbo za dielektrično funkcijo v modelu plazme.

$$\epsilon_{plazma}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (25)$$

V primerjavi rezultatov, ki jih data različna modela, si bomo pogledali rezultate, kjer so za parametre uporabili  $\omega_p = 7,54 \text{ eV}$  in  $\gamma = 0,051 \text{ eV}$  ([6]).

Ni bilo vedno povsem jasno, kateri model je pravilnejši. Glavni očitak Drudejevem modelu je bil, da naj bi kršil tretji zakon termodinamike ([8]). Ker ima Drudejev model en parameter več, se bo zagotovo bolje prilegal izmerjenim podatkom za dielektrično funkcijo. Vendar nekateri predvidevajo, da se Casimirjeva sila obnaša, kot da se  $\epsilon$  obnaša v skladu z modelom plazme ([8]). Tudi zato je potrebno izvesti eksperiment, ki bo pokazal uporaba katerega modela je primernejša za izračun Casimirjeve sile. Problem pa je, da je razlika pri izračunu Casimirjeve sile med obema modeloma zelo majhna, zato mora biti eksperiment zelo natančen.

Omeniti velja tudi, da smo frekvenčno odvisnost dielektrične funkcije izpeljali klasično. Izkazuje pa se, da se tudi nekatere bolj zapletene teorije dajo enak rezultat kot preprosta uporaba izbrane dielektrične funkcije ([8]).

## 4 Eksperimentalna opazovanja

### 4.1 Pregled uspešnih meritev Casimirjevega efekta

Čeprav je bila osnovna teorija že dolgo poznana, je Casimirjevo silo prvi natančno zmeril Steve K. Lamoreaux leta 1996. Meritev je vključevala torzijsko ravnotežje, izmeril pa je silo med krogelnim odsekom s krivinskim radijem  $11,3 \text{ cm}$  ter ravno površino. S 95 % gotovostjo je izmeril teoretično predvideno silo, kot je opisano v [9].

Od takrat je bilo izvedenih že več eksperimentov, ki merijo Casimirjevo silo na različnih oddaljenostih. V grobem jih lahko ločimo na dva dela. Prvi merijo silo med centimetrskimi objekti, kar je podobno eksperimentu, ki ga je izvedel že Lamoreaux. Vendar naj bi bile pri razdaljah pod  $0,6 \mu\text{m}$  take meritve slabe, saj so površine onesnažene z delci velikosti mikrometrov, torzijsko ravnovesje pa motijo vibracije okolja ([10]). Za meritve pri manjših razdaljah se uporabljajo mikroelektromehanični sistemi, katerih glavni problem pa je majhna interakcijska površina ter posledično majhna sila. Le redki od teh eksperimentov so bili dovolj natančni, da bi lahko razločili razliko med Drudejevim modelom ter modelom plazme.

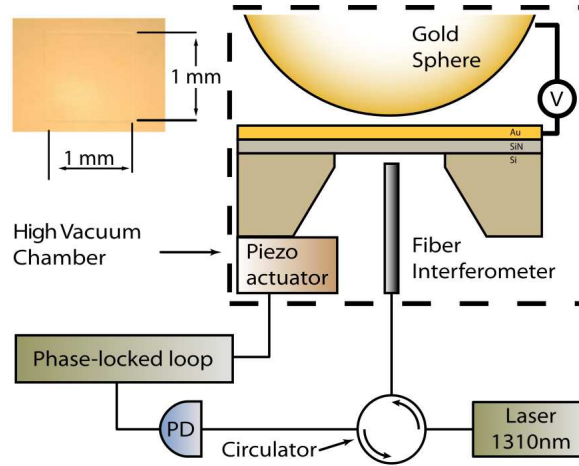
To pa je uspelo eksperimentu, ki so ga izvedli D. G.-Sanchez *et al* iz univerze Yale v letu 2012. Eksperiment temelji na spremembi resonančne frekvence pod vplivom zunanje sile in je opisan v [10]. Eksperiment je dal natančne rezultate v območju med  $100 \text{ nm}$  in  $2 \mu\text{m}$ .

### 4.2 Meritev z nanomembranami

Eksperiment je zasnovan na sili med kroglo, radija  $4 \text{ mm} \pm 2,5 \mu\text{m}$  ter membrano, veliko  $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ . Obe sta prevlečeni s plastjo zlata, debelo  $200 \text{ nm}$ . Zaradi velikih interakcijskih površin, je možna meritev Casimirjevega efekta na širokem področju. Nanomembrana je narejena iz silicijevega nitrida in je dovolj napeta, da zagotavlja čim manjšo hrapavost. Ta naj ne bi preseгла treh nanometrov. Taka membrana ima tudi visoko kvaliteto, po nanosu zlate plasti se ta sicer bistveno zmanjša, a je še vedno v območju  $10000 - 20000$ , kar omogoča



dobro določitev resonančne frekvence. Shema eksperimenta je prikazana na sliki 3. Nihanje membrane spodbuja piezomotor. Še cel set pikomotorjev je potreben, da sistem kalibrira. Še en piezomotor spreminja razdaljo med sfero in membrano. Teh motorjev na sliki ni. Nihanje membrane spremlja interferometer. Vse skupaj je zaprto v vakuumsko komoro, kjer je tlak pod  $1,3 \cdot 10^{-4}$  Pa. Soba, kjer je potekal eksperiment je zaščiten pred zunanjo svetlobo, saj se ohranja konstantna temperatura  $20 \pm 0,1$  °C. Da se minimalizirajo vibracije okolja, je cela osnova eksperimenta pritrjena na 1,5 tonsko granitno ploščo.



Slika 3: Shema eksperimenta. Na sliki sta vidni sfera in membrana, ki je priključena na piezomotor. Nihanje membrane spremlja interferometer, priključen na merilno vezje. [10]

Enačbo gibanja nanomembrane lahko zapišemo kot

$$\ddot{z} + 2\tilde{\gamma}\dot{z} + \omega_m^2(z - z_0) = \frac{F_d(z_0)}{m_{eff}}e^{i\omega_d t} + \frac{1}{m_{eff}}F'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{m_{eff}}\frac{F''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{1}{m_{eff}}\frac{F'''(z_0)}{6}(z - z_0)^3 \quad (26)$$

V enačbi sta  $F_d$  in  $\omega_d$  sila ter frekvenca vzbujačočega nihanja,  $\tilde{\gamma}$  koeficient dušenja membrane,  $\omega_m$  lastna frekvenca membrane,  $F(z)$  pa zunanja sila, del katere je tudi Casimirjeva sila. Enačba ni nič drugega kot Taylorjev razvoj zunanje sile okoli  $z_0$ . Na resonančno frekvenco vplivajo samo nekateri členi, tako da velja [10]

$$\Delta f = -\frac{f_m}{2k_{eff}} \left( F'(z_0) + \frac{A_{rms}^2}{6} F'''(z_0) \right) = -\frac{f_m}{2k_{eff}} F'_a(z_0) \quad (27)$$

$A_{rms}$  je amplituda nihanja, ki vpliva skupaj s tretjim odvodom zunanje sile kot popravek na izmerjen prvi odvod  $F'_a(z_0)$ . V eksperimentu se naredi več meritev na vsaki razdalji med kroglo in membrano. Pri vsaki meritvi se izmeri sprememba resonančne frekvence. Ta ustreza enačbi

$$f^2 = f_0(z)^2 - K_p(z)(V - V_m(z))^2 \quad (28)$$

Sfera in membrana sta namreč pritrjeni z nosilci ter priključeni na inštrumente. Posledica tega je, da nimata enakega potenciala. Silo, ki deluje med njima upoštevamo s tem, da

izmerimo spremembo resonančne frekvence pri treh različnih napetostih  $V$  pri vsaki medsebojni razdalji. S tem je mogoče ugotoviti parametre  $f_0(z)$ ,  $K_p(z)$  ter  $V_m$ .  $K_p(z)$  je poznana funkcija razdalje med sfero in membrano. Odvisna pa je tudi od parametrov, kot so na primer prožnostni koeficient membrane. Te parametre se določi ob kalibraciji inštrumenta, tako da nam ugotovljena vrednost  $K_p$  direktno poda medsebojno razdaljo.

Vendar se s tem še ne znebimo elektrostatskega prispevka. Za idealni prevodnik sicer velja, da je njegova površina ekvipotencialne, vendar za realne prevodnike temu ni vedno tako. Različen potencial na površini membrane in krogle je posledica adsorbiranih snovi. Neenakomeren potencial na površinah povzroči še dodatno silo med sfero in membrano. Zato ima tudi člen  $f_0^2$  elektrostatski del. Zapišemo ga namreč kot

$$\Delta f_0 = -\frac{f_m}{2k_{eff}} \left( \frac{dF_c(z)}{dz} + \frac{dF_{el}^{res}(z)}{dz} \right) \quad (29)$$

$F_{el}^{res}(z)$  se lahko modelira preko meritve kontaktnih potencialov med obema površinama. Metoda opazovanja neenakomernega površinskega potenciala je analogna mikroskopu s Kelvinovo sondo, ki je podoben mikroskopu na atomsko silo. Kroglo se premika vzdolž ter stran od membrane ter meri kontaktni potencial  $V_m$  iz enačbe 28. Na sliki 4 je primer kontaktnega potenciala vzdolž membrane za dve različni membrani. Vidimo, da so lahko razlike med membranami zelo velike. Pri drugi membrani so spremembe potenciala namreč zelo majhne. Sprememb potenciala po površini krogle niso opazovali.

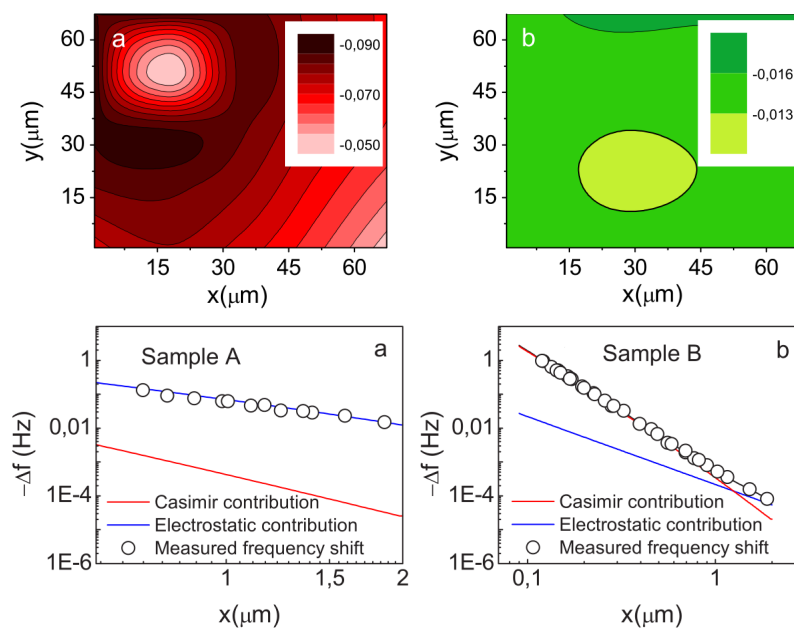
S predpostavko, da so površinski potenciali naključni lahko za model preostale elektrostatske sile uporabimo enačbo:

$$F_{res}^{el}(z) = \pi R \epsilon_0 [(V_m(z) + V_1)^2 + V_{rms}] / z \quad (30)$$

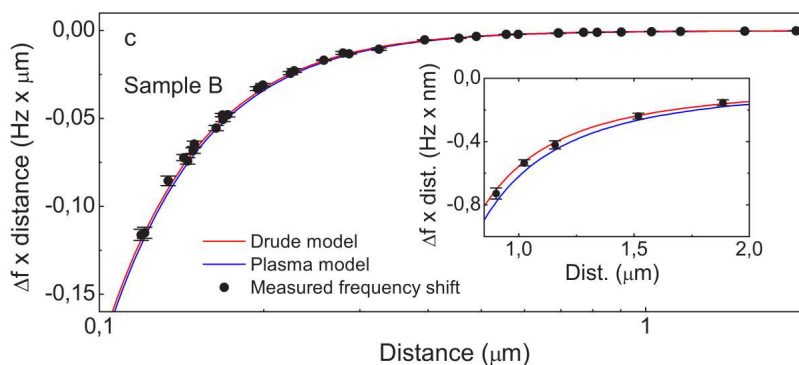
Izmerjene spremembe resonančne frekvence se nato primerja z modelom, kjer se prilagaja parametre  $V_1$ ,  $V_{rms}$  iz enačbe 30 ter parametre modela dielektrične funkcije pri Casimirjevi sili. Meritev kontaktnih potencialov je pomembna za izbiro boljše membrane, samih rezultatov meritev na principu Kelvinove sonde pa v izračun niso vključili.

Primer, kako lahko neenakomeren potencial na površini povzroči prevlado elektrostatske sile nad Casimirjevo, je viden na sliki 4. Očitno je, da je izbira primerne vzorca nadvse pomembna, prav tako kot meritev kontaktnih potencialov. Ideja, da se meri tudi kontaktne potenciale sicer ni nova. O tem so premišljevali že avtorji že omenjenega eksperimenta, ki so že leta 2011 uspešno izmerili razliko med Drudejevim modelom in modelom plazme na razdaljah od 0,7 do 7  $\mu\text{m}$ . Vendar jim tehnologija ni dovoljevala dovolj natančnih meritev kontaktnih potencialov s Kelvinovo sondo.

Če dobro poznamo odvisnost spremembe resonančne frekvence v odvisnosti od Casimirjeve in elektrostatske sile, je možno primerjati izmerjeno spremembo frekvence s spremembo, ki jo izračunamo iz različnih modelov za Casimirjevo silo. Rezultat tega je viden na sliki 5. Očitno je, da je razlika med Drudejevim modelom in modelom plazme majhna, vendar je eksperiment dovolj natančen, da je izmerjena razlika med modeloma. Iz grafa je očitno, da je na območju 0,1 – 2  $\mu\text{m}$  točnejši Drudejev model. Statistični test  $\chi^2$  nam poda verjetnost, da  $\chi^2$  preseže vrednost Durejevega modela 45 %, za model plazme pa le 1 %. To pomeni, da lahko model plazme zavrujemo z 99 % verjetnostjo.



Slika 4: Površinski potencial za dva vzorca. Prvi vzorec (levi dve sliki) ima zelo neenakomeren površinski potencial. Posledica tega je, da elektrostatska sila povsem zasenči Casimirjevo. Površinski potencial drugega vzorca je bolj enakomeren, Casimirjeva sila prevlada. Vendar predvsem pri večji oddaljenosti tudi elektrostatska ni zanemarljiva. [10]



Slika 5: Izmerjena sprememba frekvence v odvisnosti od razdalje med sfero in kroglo. Polne črte so spremembe, ki jih predvidevata različna modela za Casimirjevo silo ( $\omega_p = 7,54 \text{ eV}$ ,  $\gamma = 0,051 \text{ eV}$ ). Podatki seveda upoštevajo tudi elektrostatski prispevek. [10]

## 5 Zaključek

V tem seminarju sem želel razjasniti najnovejše meritve Casimirjeve sile ter teoretična ozadja teh meritev. Za eksperimentom stoji veliko teorije, ki sicer ni pomembna za samo izvedbo eksperimenta, nam pa pojasni, zakaj je tak eksperiment potreben.

Kot sem pokazal v seminarju, se lahko Casimirjevo silo pri 0 K izpelje že z nekaj matem-

atike ter upoštevanjem osnovnih fizikalnih lastnosti. Upoštevali smo valovanje EM polja v vakuumu ter dejstvo, da je vsaka snov prozorna za valovanje visokih frekvenc.

Casimirjeva sila ni zanemarljiv pojav. Izkaže se, da je vodilna interakcija med nenabitimi telesi na nanoskali. Posledično je njeno razumevanje ključno v nanotehnologiji ter povsod kjer so razdalje med telesi dovolj majhne.

Meritev Casimirjevega efekta z nanomembranami je nekaj novega. Dosedanja merjenja so večinoma vključevala torzijsko ravnovesje. Kar daje temu eksperimentu še posebno natančnost, je možnost meritve kontaktnih potencialov med sfero in ploščo, česar do sedaj še ni bilo moč uporabiti. Rezultati sicer niso pretresljivi, saj so se takšni rezultati na podobnih razdaljah že napovedovali. Precizne meritve, ki so sposobne ločiti med različnimi modeli za dielektrično funkcijo, pa potrjujejo ustreznost takšnega načina merjenja Casimirjevega efekta.

## Literatura

- [1] R. H. French *et al*, Reviews of Modern Physics, Vol. 82 (2010), Long range interactions in nanoscale science.
- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Casimir\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect), citirano dne 2.2.2013.
- [3] J. Blocki *et al*, Ann. Phys. (N.Y.) 105 (1977), Proximity Forces.
- [4] E. M. Lifshitz, Sov. Phys, JETP 2, 73 (1956), The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids.
- [5] M. Boström in E. Sernelius, Phys. Rev. Lett. 84, 4757 (2000), Thermal Effects on the Casimir Force in the 0,1 – 5  $\mu\text{m}$  Range.
- [6] A. O. Sushkov *et al*, Nature Phys. 7, 230 (2011), Observation of the thermal Casimir force.
- [7] R. Podgornik in A. Vilfan, DMFA (2012), Elektromagnetno polje
- [8] V. B. Bezerra *et al*, Phys. Rev. A 69, 022119 (2004), Violation of the Nernst heat theorem in the theory of the thermal Casimir force between Drude metals.
- [9] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. 78 (1997), Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  Range.
- [10] D. G.-Sanchez *et al*, Phys. Rev. Lett. 109 (2012), Casimir Force and *In Situ* Surface Potential Measurements on Nanomembranes.