

# Tensegriteta

Seminar

Jan Srpčič

Mentor: prof. dr. Rudolf Podgornik

2. april, 2013

Univerza *v Ljubljani*  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



# Kazalo

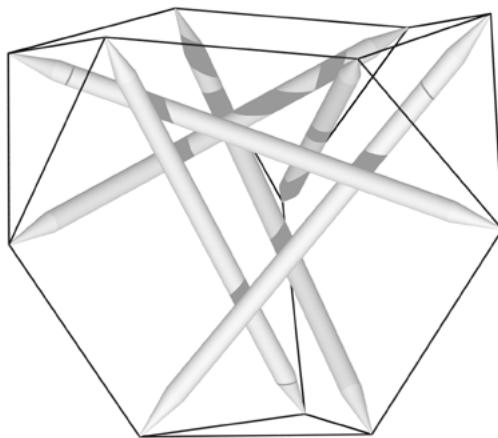
<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mehanizmi</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Iskanje stabilnih tensegritet (form finding)</b>	<b>6</b>
3.1	Kinematična metoda . . . . .	6
3.2	Metoda gostote sil . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Pomen napetosti elementov</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Zaključek</b>	<b>16</b>
<b>6</b>	<b>Viri</b>	<b>16</b>
<b>7</b>	<b>Dodatek: Razne tensegritete</b>	<b>17</b>

## Povzetek

Tensegriteta je zloženka besed *tension* in *integrity* (napetost in integriteta). Gre za ogrodja iz dveh vrst elementov (kablov in opornikov, ki so povezani z vozlišči), ki ne zadoščajo Maxwelllovedemu pogoju za trdnost, a imajo kljub temu trdno strukturo. Predstavili bomo dve metodi iskanja tensegritet in njuni prednosti in slabosti.

## 1 Uvod

Maxwell je pokazal, da je ogrodje z  $j$  vozlišči trdno, če ima vsaj  $3j - 6$  opornikov [1]. To pomeni, da ne moremo spreminjati razdalje med nobenima dvema vozliščema, ne da bi s tem spremenili dolžino vsaj enega opornika. To razmerje med številom vozlišč in opornikov pa ni potreben pogoj za trdnost, ker obstajajo ogrodja z manjšim številom opornikov, ki so vseeno trdna. Maxwell je za te izjemne primere dejal, da morajo dolžine njihovih elementov dosegati ekstremne vrednosti. To pomeni, da ima nekaj opornikov v ogrodju največjo možno dolžino za dano razporeditev elementov in vozlišč (analogno imajo ostali elementi najmanjšo dolžino). Primer tega so tensegritete, ogrodja iz kablov in opornikov, kjer kabli dosegajo minimalno, oporniki pa maksimalno dolžino.



Slika (1): Ogrodje iz  $b = 24$  opornikov in  $j = 12$  vozlišč, ki je trdno kljub temu, da ne izpolnjuje Maxwelllovega pogoja. [12]

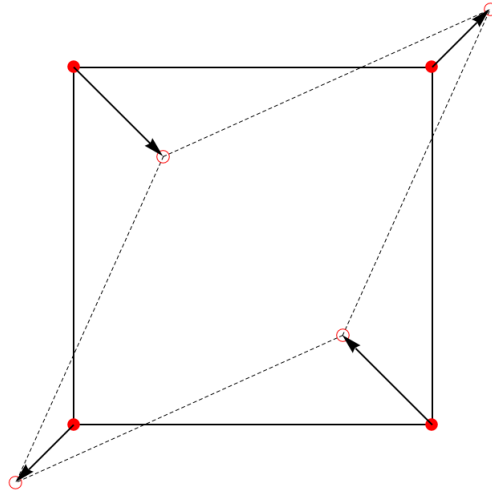
Termin tensgriteta je zloženka besed tension in integrity (napetost in trdnost), ki jo je skoval R. Buckminster Fuller. R. Motro tensegriteto definira takole [2]:

**Definicija 1** *Tensegriteta je sistem v samostojnem ravnovesnem stanju, sestavljen iz množice ločenih, tlačno obremenjenih komponent znotraj množice povezanih napetih komponent.*

Samostojno ravnovesno stanje pomeni, da je ogrodje trdno, preden nanj delujejo zunanje sile. Pomembno je, da je množica stisnjenih, torej tlačno obremenjenih komponent nezvezna, kar pomeni, da se oporniki med seboj ne dotikajo. Beseda znotraj pa pove, da so napete komponente kabli na zunanji strani sistema. Smiselna analogija je napihnjen balon, ki skupaj drži molekule plina. Balon predstavlja napete, molekule plina pa stisnjene komponente.

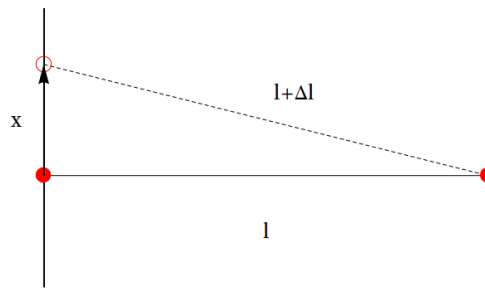
## 2 Mehanizmi

Poglejmo si malce bolj natančno, kaj pomeni, da je ogrodje trdno. Trdnost nam pove, kako se ogrodje odziva, če nanj delujemo z zunanjimi silami, na primer s silami na vozlišča. Če spreminjamo relativno lego vozlišč, lahko opazujemo, kaj se dogaja z dolžinami elementov. Na podlagi opazk ločimo dve vrsti odzivov, ki jim pravimo mehanizmi. Prvi so končni mehanizmi, pri katerih dolžine opornikov niso odvisne od premikov vozlišč. Končni (v nasprotju z infinitezimalni) se imenujejo zato, ker nam povedo, kakšen je lahko relativen premik vozlišč, preden pride do spremembe dolžine vsaj enega elementa. Ogrodje s končnim mehanizmom ni trdno. Primer je kvadratno ogrodje na Sliki (2). Vidimo, da s spreminjanjem medsebojne lege oglišč ne spremenimo dolžine nobene stranice kvadrata (oziroma romba).



Slika (2): Končni mehanizem.

Drugo vrsto odzivov imenujemo infinitezimalni mehanizmi. Pri teh dolžina opornikov ni neodvisna od relativne lege vozlišč. Ob vsakršnem spreminjanju medsebojne lege vozlišč pride do spremembe dolžine enega ali več elementov. Najenostavneje lahko to pokažemo na primeru s Slike (3).



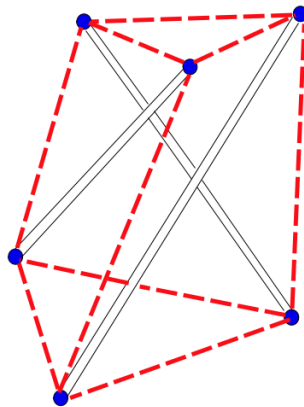
Slika (3): Infinitezimalni mehanizem. Ilustracija na samem kablu.

Horizontalen kabel imamo vpet med dve steni, na desni strani togo in na levi gibljivo. Če levo vpetje premaknemo za poljubno majhen  $x$ , pride do spremembe dolžine  $\Delta l$ . Ogrodje z infinitezimalnim mehanizmom je trdno, saj ob premikanju vozlišč pride do raztezkov ali skrčkov elementov, kar pomeni, da se v ogrodju pojavijo sile (kot diktira Hookov zakon), ki delujejo v nasprotni smeri premikov vozlišč. Raztegnjen kabel s Slike (3) deluje na premaknjeno vozlišče s silo, katere projekcija na smer premika  $x$  deluje v nasprotni smeri premika.

Poudarimo, da v vsakem ogrodju lahko opazimo infinitezimalni mehanizem. Če si na primer izberemo dve vozlišči, ki sta povezani z elementom, in ju razmaknemo v smeri nosilke elementa, bo brez dvoma prišlo do spremembe dolžine elementa. To pomeni, da ogrodja v resnici delimo na tista z infinitezimalnim mehanizmom in na tista z obema, s končnim in infinitezimalnim mehanizmom. A za ogrodja z obema vrstama mehanizmov pravimo, da imajo le končni mehanizem, ker je to tista lastnost, ki jih loči od trdnih ogrodij.

### 3 Iskanje stabilnih tensegritet (form finding)

Pogledali si bomo dve metodi iskanja stabilnih tensegritet. Obe bomo predstavili splošno, nato pa jih ilustrirali na konkretnih primerih.

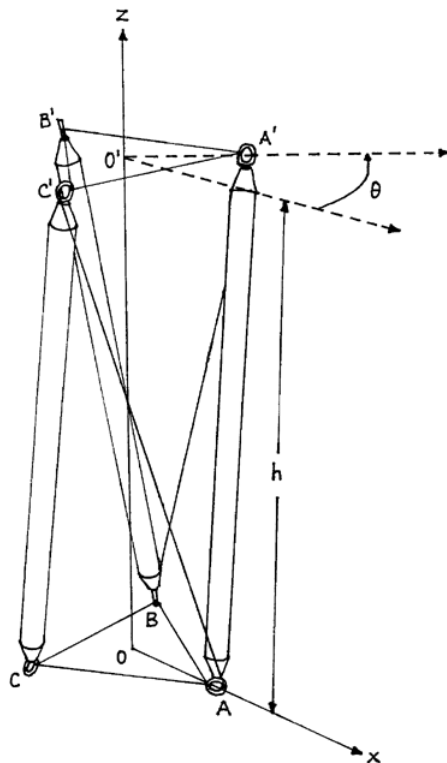


Slika (4): Tensegriteta iz 3 belih opornikov, 9 rdečih kablov in 6 modrih vozlišč, na kateri bomo pokazali primer uporabe kinematične metode[8].

#### 3.1 Kinematična metoda

Kinematična metoda je proces, s katerim se lahko znebimo končnih mehanizmov nekaterih ogrodij. Ukvarja se s premikanjem obstoječih elementov ogrodja in dodajanjem novih na ravno prava mesta, da ogrodje postane trdno. Z metodo iščemo lokalne minime ali maksimume razdalj med pari nepovezanih vozlišč, ko premikamo elemente ogrodja. Če najdemo ekstrem razdalje med dvema vozliščema, jih povežemo z ustreznim elementom (s kablom, če je ekstrem minimum in z opornikom, če je maksi-

mum), ki zagotovi, da vozlišči ostaneta na tej razdalji. Vozlišč takrat ne moremo več razmakniti (oziroma približati), ne da bi spremenili dolžino povezovalnega elementa. Tako spremenimo končni mehanizem v infinitezimalnega in dosežemo trdnost ogrodja. Mnogokrat pa za dosego trdnosti ni dovolj, če dodamo zgolj en element k obstoječemu ogrodju. To pomeni, da je potrebno slediti razdaljam med več pari vozlišč, kar pa je za večja ogrodja lahko zapleteno. Na naslednjem primeru bomo pokazali, da nam tu prav pride simetrija ogrodja. Skico problema kaže Slika (5).



Slika (5): Z vrtenjem trikotnika  $A'B'C'$  okoli osi  $z$  iščemo minimalno dolžino kablov  $AC'$ ,  $BA'$  in  $CB'$  [9].

Kot vidimo, imamo dva trikotnika iz kablov,  $ABC$  in  $A'B'C'$ , ki sta povezana preko opornikov  $AA'$ ,  $BB'$  in  $CC'$ . Zgornji trikotnik je glede na spodnjega zavrten za kot  $\theta$  okoli osi  $z$ . Dolžino opornikov imenujmo  $b$ , stranico trikotnikov pa  $a$ . Šest vozlišč je povezanih z devetimi elementi v devet parov. Ti tvorijo tristrano prizmo, ki je naše začetno ogrodje s končnim mehanizmom. Poleg devetih parov, ki so povezani z robovi prizme, nam ostane še šest prostih, ki bi jih povezovale diagonale ploskev na plašču prizme. To pomeni, da išemo ekstreme za šest razdalj med vozlišči. Na tem mestu

nam prav pride simetrija ogrodja. Prizma ima trištevno simetrijsko os, ki je na skici os  $z$ . To namiguje, da lahko namesto šestih iščemo le dve ekstremni razdalji med vozlišči (na skici  $AC'$  in  $CA'$ ) in da je premikanje elementov, s katerim jih iščemo, vrtenje trikotnika  $A'B'C'$  okoli osi  $z$ . Zaradi simetrije sta namreč trikotnika  $ABC$  in  $A'B'C'$  v vzporednih ravninah. Vemo še, da mora biti dodani element kabel in ne opornik, ker lahko le tako še zadostimo definiciji tensegritete. To pomeni, da je iskani ekstrem razdalje minimum. Vidimo tudi, da sta obe iskani diagonalni enakovredni in se enako spreminjata s kotom zasuka, če enkrat vrtimo v pozitivni in enkrat v negativni smeri. Torej iščemo minimum dolžine zgolj ene izmed diagonal začetne tristrane prizme.

Ker ležita trikotnika  $ABC$  in  $A'B'C'$  v vzporednih ravninah, lahko govorimo o razdalji med njima, recimo ji  $h$ . Omejitev, ki smo jo privzeli, je znana dolžina opornikov  $b$ . Zapišimo torej vektor  $\mathbf{b}$  kot razliko vektorjev  $\mathbf{OA}' = (\frac{a}{\sqrt{3}} \cos \theta, \frac{a}{\sqrt{3}} \sin \theta, h)$  in  $\mathbf{OA} = (\frac{a}{\sqrt{3}}, 0, 0)$ .

$$\mathbf{b} = \mathbf{OA}' - \mathbf{OA} = (\frac{a}{\sqrt{3}}(\cos \theta - 1), \frac{a}{\sqrt{3}} \sin \theta, h) \quad (1)$$

Iz njegove dolžine  $b = |\mathbf{b}|$  lahko izrazimo višino prizme  $h$

$$h = \sqrt{b^2 + \frac{2}{3}a^2(\cos \theta - 1)} \quad (2)$$

Če je  $b$  dovolj velik,  $b \geq \frac{2}{\sqrt{3}}a$ , obstaja realna rešitev  $h$  za poljuben kot  $\theta$ .

Sedaj lahko zapišemo vektor  $\mathbf{l}$ , ki povezuje vozlišči  $A$  in  $C'$  kot razliko vektorjev  $\mathbf{OC}' = (-\frac{a}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\pi}{6} - \theta), -\frac{a}{\sqrt{3}} \cos(\frac{\pi}{6} - \theta), h)$  in  $\mathbf{OA} = (\frac{a}{\sqrt{3}}, 0, 0)$ , oziroma kvadrat njegove velikosti

$$l^2 = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \frac{a^2}{3}(\sin(\frac{\pi}{6} - \theta) + 1)^2 + \frac{a^2}{3} \cos^2(\frac{\pi}{6} - \theta) + h^2 \quad (3)$$

Če torej v izraz (3) vstavimo enačbo (2) in z odvajanjem po  $\theta$  poiščemo njegov minimum, dobimo pogoj za  $\theta$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$



Pri tem kotu ( $\theta = -\frac{\pi}{6}, n = 0$ ) bodo za poljubne vrednosti  $a$  in  $b \geq \frac{2}{\sqrt{3}}a$  dolžine kablov  $l$  dosegle svoj minimum in sistem bo stabilen.

Na primeru tristrane prizme smo videli uporabnost kinematične metode ob upoštevanju simetrije. A že pri tem dokaj enostavnem primeru s šestimi vozlišči smo videli, da bi v splošnem morali iskati ekstreme šestih razdalj, ki so vse odvisne druga od druge, kar je lahko dokaj zapleteno. Poleg tega pa število možnih parov vozlišč narašča kvadratično s številom vozlišč: iz  $j$  vozlišč lahko tvorimo  $j(j-1)/2$  parov. To pomeni, da za velika nesimetrična ogrodja potrebujemo drugačno metodo.

### 3.2 Metoda gostote sil

Za razliko od kinematične metode, s katero smo iskali dolžine elementov v ogrodju, iščemo z metodo gostote sil koordinate vozlišč in napetosti elementov, ki tvorijo stabilno tensegriteto. Izpeljava metode sloni na zapisu vsote vseh sil na vozlišče. Te sile izvajajo elementi, ki so v izbranem vozlišču povezani. Z zapisom enačb za vsako izmed  $j$  vozlišč dobimo sistem  $j$  nelinearnih enačb. Enačbe želimo linearizirati, da lahko za reševanje uporabimo metode iz linearne algebre. Za uporabo metode gostote sil moramo poznati povezanost elementov v vozlišča. Zunanje sile in disipativne sile zanemarimo [5].

Vzemimo, da je nekaj elementov povezanih v vozlišču  $i$ . V mirovanju je vsota vseh sil, ki jih izvajajo elementi na vozlišče, po velikosti enaka nič. Zapišimo komponento  $x$  vsote sil, ki delujejo na vozlišče  $i$  (v nadaljevanju je za komponenti  $y$  in  $z$  analogno).

$$\sum_k \frac{x_i - x_k}{l_k} T_k = 0 \quad (5)$$

Tu sta  $x_i$  in  $x_k$  koordinati  $x$  vozlišč  $i$  in  $k$ ,  $l_k$  dolžina elementa, ki povezuje  $k$ -to vozlišče z vozliščem  $i$ ,  $T_k$  pa sila, s katero je element napet. Indeks  $k$  teče po vseh sosedih vozlišča  $i$ . To je v splošnem nelinearna enačba, saj so dolžine  $l_k$  odvisne od koordinat. Zato uvedemo skalarno količino  $q_k$ ,

$$q_k = \frac{T_k}{l_k}, \quad (6)$$

ki ji pravimo koeficient gostote sile. S tem lineariziramo enačbo (5), ki ima tedaj obliko

$$\sum_k (x_i - x_k) q_k = 0. \quad (7)$$

To je enačba za vozlišče  $i$ . Za celo ogrodje dobimo sistem linearnih enačb, ki jih lahko zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

$\mathbf{Q}$  je diagonalna matrika s koeficienti gostote sile za vsak element po diagonalni,  $\mathbf{x}$  stolpec koordinat  $x$  vseh vozlišč,  $\mathbf{C}_s$  pa t. i. povezovalna matrika. Ta ima  $b$  vrstic in  $j$  stolpcev ( $b$  je število elementov,  $j$  pa število vozlišč v ogrodju). Če element  $k$  povezuje vozlišči  $i$  in  $j$ , ( $i < j$ ), potem za element  $C_{kp}$  matrike  $\mathbf{C}_s$  velja

$$C_{kp} = \begin{cases} 1, & \text{če } p = i \\ -1, & \text{če } p = j \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (9)$$

Enačba (8) je problem iskanja jedra matrike  $\mathbf{D} = \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s$ . To pomeni, da so rezultati metode do konstante nedoločeni, rešitev bo le zveza med koeficienti gostote sile oziroma med koordinatami. Zato si lahko v nekaterih primerih poenostavimo reševanje problema z uvedbo fiksnih vozlišč. S tem se znebimo toliko neznank, kot fiksiramo vozlišč. Če prosta vozlišča predstavljajo stolpce  $\mathbf{C}_s^0$  do  $\mathbf{C}_s^n$  in fiksirana vozlišča stolpce  $\mathbf{C}_s^{n+1}$  do  $\mathbf{C}_s^{n+n_f}$ , lahko matriko  $\mathbf{C}_s$  razdelimo na dve podmatriki  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}_f$

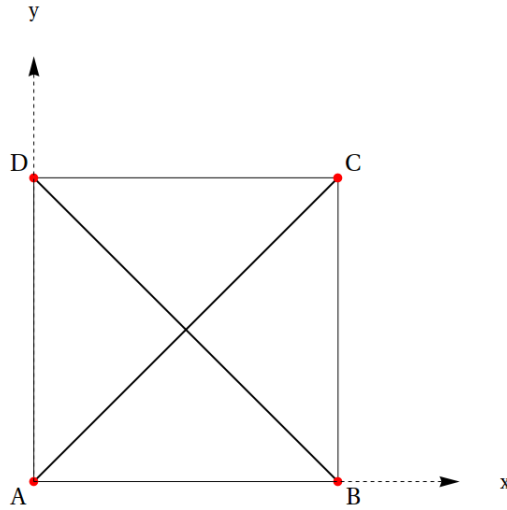
$$\mathbf{C} = \left( \mathbf{C}_s^0 \dots \mathbf{C}_s^n \right), \mathbf{C}_f = \left( \mathbf{C}_s^{n+1} \dots \mathbf{C}_s^{n+n_f} \right) \quad (10)$$

Tako lahko enačbo (8) prepisemo kot

$$\mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f = \mathbf{0} \quad (11)$$

Vektorja  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{x}_f$  sta stolpca koordinat  $x$  prostih in fiksnih vozlišč. Koordinate v drugem členu enačbe poznamo, zato ima enačba (11) manj neznank kot enačba

(8) in je tako poenostavljena. Ilustrirajmo to na enostavnem primeru. Vzemimo dvodimenzionalno ogrodje s Slike (6).



Slika (6): Iskanje dvodimenzionalne tensegritete s pomočjo metode gostote sil.

Stranice štirikotnika tvorijo kabli, obe diagonali pa opornika. Kablom pripišemo koeficient gostote sile  $q_1$ , opornikom pa  $q_2$ . Fiksirajmo vozlišči  $C$  in  $D$  v točkah  $(a, a)$  in  $(0, a)$  v koordinatnem sistemu, ki je definiran na skici. Najprej zapišimo povezovalno matriko  $\mathbf{C}_s$  našega ogrodja in jo razdelimo na podmatriki  $\mathbf{C}$  prostih vozlišč in  $\mathbf{C}_f$  fiksiranih vozlišč.

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Komponenti vektorja  $\mathbf{x}$  sta neznaní koordinati  $x$  vozlišč  $A$  in  $B$ , komponenti vektorja  $\mathbf{x}_f$  pa ustrezni komponenti vozlišč  $C$  in  $D$ , torej  $a$  in  $0$ . Sedaj lahko iz vrednotimo oba člena v enačbi  $\mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f = \mathbf{0}$  in dobimo vektorsko enačbo

$$\begin{bmatrix} (2q_1 + q_2)x_A - q_1x_B \\ -q_1x_A + (2q_1 + q_2)x_B \\ -q_2x_A - q_1x_B \\ -q_1x_A - q_2x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2a \\ q_1a \\ -(2q_1 + q_2)a \\ q_1a \end{bmatrix}, \quad (13)$$

ki jo rešimo in dobimo več rešitev za koeficiente gostote sile in koordinate vozlišč. Izberemo tisto, kjer koeficienti gostote sile niso enaki nič.

$$q_2 = -q_1, \quad x_B - x_A = a \quad (14)$$

Vidimo, da imata  $q_1$  in  $q_2$  nasproten predznak. To je smiselno, ker kabel in opornik delujeta na vozlišče v nasprotnih smereh (kabel vleče, opornik pa potiska). Če v enačbo za koordinate vstavimo  $x_A = 0$ , dobimo kvadratno ogrodje, ki ga vidimo na Sliki (6). A to ni edina pravilna rešitev, saj lahko za  $x_A$  vstavimo poljubno realno število. Rešitev so vsi paralelogrami, ki imajo par stranic ( $AB$  in  $CD$ ) z dolžino  $a$ . Ko si izberemo koordinate vozlišč in določimo naše ogrodje, lahko s pomočjo enačbe (6) določimo razmerje sil, s katerimi morajo biti elementi napeti.

Poglejmo, kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da obstaja rešitev metode gostote sil. Spomnimo se matrike  $\mathbf{D} = \mathbf{C}_s^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_s$  iz enačbe (8). Vemo, da rešitve koordinat ležijo v njenem jedru. Jedro matrike je vektorski prostor, ki vsebuje vse linearne kombinacije vektorjev, ki jih matrika preslika v nič. Dimenzija jedra nam pove, koliko vsebuje linearno neodvisnih baznih vektorjev, oziroma v našem primeru, koliko je neodvisnih rešitev enačbe (8). Ta je zapisana za koordinato  $x$ , a velja tudi za koordinati  $y$  in  $z$ . To pomeni, da so stolpci koordinat  $x$ ,  $y$  in  $z$  vsi v jedru matrike  $\mathbf{D}$ . Za vse tri želimo, da so med seboj linearno neodvisni. Torej želimo, da je dimenzija jedra matrike večja ali enaka 3 (oziroma kolikor je dimenzija tensegritete). A če si bolj natančno pogledamo elemente  $D_{ij}$  matrike  $\mathbf{D}$ ,

$$D_{ij} = \begin{cases} -q_k, & \text{če element } k \text{ povezuje vozlišči } i \text{ in } j. \\ \sum_{k \in M} q_k, & \text{če } i=j, M \text{ je množica elementov, ki so povezani z vozliščem } i. \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (15)$$

vidimo, da je vsota elementov v vsaki vrstici (ali vsakem stolpcu) enaka nič. To pomeni, da je v jedru matrike vedno še dodatni vektor, ki ima vse komponente enake, ker ga matrika  $\mathbf{D}$  preslika v nič. Ta rešitev nas ne zanima, ker pomeni degenerirano tensegriteto, ki ni več tridimenzionalna. Končni pogoj za dimenzijo jedra matrike  $n_D$  je torej

$$n_D \geq d + 1. \quad (16)$$

Z  $d$  smo označili dimenzijo tensegritete.

Do sedaj smo govorili o vektorjih koordinat in pogojih zanje. Poglejmo si sedaj še pogoj za vektor koeficientov gostote sil  $\mathbf{q}$ . Če definiramo matriko  $\mathbf{C}_x$ , ki je diagonalna matrika z elementi vektorja  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}$  po diagonali (in podobno za koordinati  $y$  in  $z$ ), lahko enačbo (8) zapišemo v obliki

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (17)$$

kjer je  $\mathbf{A}$  t. i. ravnovesna matrika, sestavljena iz treh podmatrik

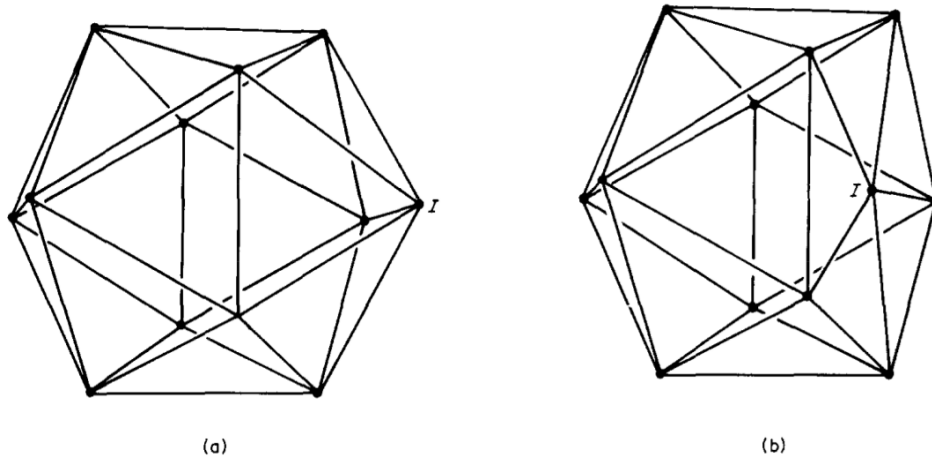
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}_x \\ \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}_y \\ \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}_z \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Za obstoj vsaj ene rešitve mora biti dimenzija jedra  $\mathbf{A}$  neničelna.

## 4 Pomen napetosti elementov

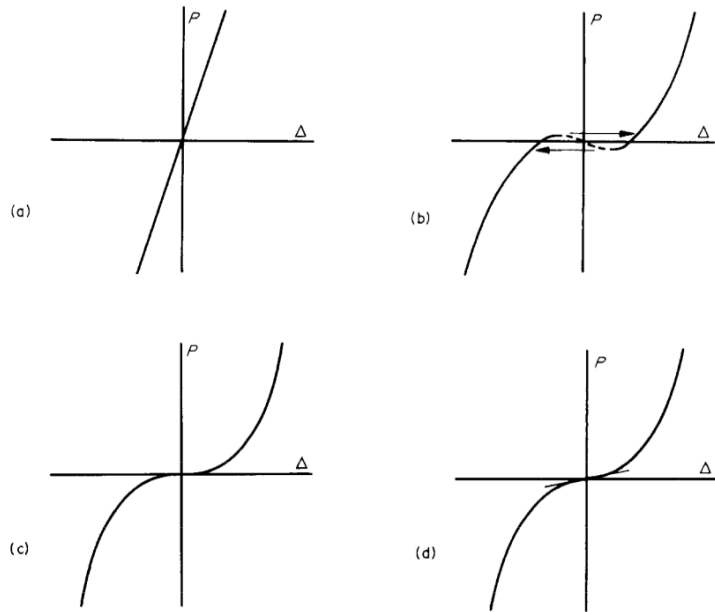
Rešitve problemov iskanja jedra so do konstante nedoločene. Če rešitev enačbe (18) pomnožimo s poljubnim realnim številom (razen z nič), bo še vedno smiselna.

Zato lahko z metodo gostote sil določimo le razmerje koeficientov gostote sil, ne pa njihovih velikosti. To je težava, saj zunanje sile, ki smo jih zanemarili pri izpeljavi metode, v resnici obstajajo in jih je potrebno upoštevati pri izdelavi tensegritete (to bi storili tako, da bi na desni strani enačbe (5) zapisali ustrezno komponento vektorja zunanjih sil na vozlišče v smeri osi  $x$ ). Zaradi zunanjih sil je torej pomembno, kakšne so napetosti elementov. Oglejmo si to na primeru ogrodja, ki sicer ni tensegriteta, a se da na njem ustrezno opisati lastnosti, ki so značilne tudi za tensegritete. Ogrodje je ikozaeder in je prikazano na Sliki (6)[6].



Slika (6): Opornike vozlišča  $I$  krajšamo dokler niso komplanarni.

Vzemimo elemente ogrodja, ki so povezani v vozlišču  $I$ . Krajšajmo jih, dokler niso vsi v isti ravnini. Takrat je njihova dolžina dosegla minimum. Če bi s krajšanjem nadaljevali, bi prišlo do raztezkov elementov in posledično do napetosti. Pri različnih takšnih napetostih elementov lahko odmikamo vozlišče  $I$  iz ravnine in opazujemo s kakšnimi silami elementi delujejo na izmaknjeno vozlišče. Odvisnost sile, ki jo izvajajo elementi, od odmika vozlišča je prikazan na Sliki (7).



Slika (7): Odziv sile  $P$  na odmik  $\Delta$  pri različnih konfiguracijah.

Primer (a) prikazuje Hookov zakon, torej linearno zvezo med odmikom in silo. Na primeru (b) je vozlišče  $I$  še nekoliko iz ravnine, torej so oporniki nekoliko daljši, kot na Sliki (6) (b). Puščice kažejo skok, ki se zgodi, če vozlišče  $I$  pomikamo proti ravnini (kot dežnik, ki ga veter obrne v invertirano konfiguracijo). Primera (c) in (d) kažeta odvisnost sile od odmika, ko je vozlišče v ravnini in sicer prvi, ko oporniki niso napeti in drugi, ko so. Naša želja je, da ogrodje ostane čimbolj nespremenjeno pod vplivom zunanjih sil. To pomeni, da želimo, da se sila elementov na vozlišče kar najhitreje večja, ko večamo odmik. Z drugimi besedami, želimo, da je odvod sile po odmiku največji. Če torej primerjamo primera (c) in (d), vidimo, da je pri prvem odvod v izhodišču enak nič, pri drugem pa ne. Ta neničelni odvod je posledica napetosti elementov. Večja kot je napetost, večji je odvod in posledično je ogrodje stabilnejše. Vidimo, da je treba napetosti elementov pazljivo izbirati. Morajo biti dovolj velike, da je ogrodje stabilno ob prisotnosti zunanjih sil, a ne prevelike, da ne presežejo meje trdnosti materiala elementov.

## 5 Zaključek

Cilj seminarja je bil predstaviti idejo tensegritete in dve metodi iskanja stabilnih ogrodij ter njuno uporabo. Na začetku smo povedali, kakšna mora biti zveza med številom vozlišč in številom elementov ogrodja, da mu lahko rečemo trdno. Preko mehanizmov smo si pogledali, kaj pomeni trdnost pri odzivu dolžin elementov na spreminjanje lege vozlišč. Po mehanizmih smo obdelali iskanje stabilnih tensegritet, oziroma dve metodi, s katerima pridemo do stabilnih ogrodij. Pri kinematični metodi smo videli, kako lahko s simetrijo ogrodja poenostavimo problem iskanja ekstremov razdalj med vozlišči. Pri metodi gostote sil pa smo preko linearizacije enačbe ravnovesja sil prišli do problema iskanja jedra matrike za neznane koordinate vozlišč in koeficiente gostote sil. Na koncu smo na primeru ikozaedričnega ogrodja pokazali pomen napetosti elementov za stabilnost tensegritete.

## 6 Viri

- [1] J.C. Maxwell, On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames, *Philosophical Magazine*, Volume 27, p. 294, (1864) (paper XXVI in *Collected Papers*, Cambridge 1890)
- [2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Tensegrity>, 2. 4. 2013
- [3] R. Motro, *Tensegrity, Structural Systems for the Future*, Kogan Page Limited, London, UK, (2003)
- [4] R. Connely, A. Black, Mathematics and Tensegrity, *American Scientist* 86, No. 2, March-April (1998)
- [5] Hoang Chi Tran, Jaehong Lee, Form-finding of tensegrity structures using double singular value decomposition, *Engineering with Computers*, Volume 29, Issue 1, January (2013)
- [6] C. R. Calladine, Buckminster Fullers "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 2. (1978)
- [7] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6b/Proto-Tensegrity\\_](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6b/Proto-Tensegrity_)



by\_Ioganson.jpg, 2. 4. 2013

[8] W. O. Williams, A Primer on the Mechanics of Tensegrity Structures, preprint [http://www.math.cmu.edu/users/wow/public\\_html/papers/newprimer.pdf](http://www.math.cmu.edu/users/wow/public_html/papers/newprimer.pdf), ogled: 13. junij, 2007

[9] R. W. Burkhardt, Jr., A Practical Guide to Tensegrity Design, Cambridge, MA, [on-line], Cambridge (USA), [http://www.angelfire.com/ma4/bob\\_wb/tenseg.pdf](http://www.angelfire.com/ma4/bob_wb/tenseg.pdf), ogled: 17. september, 2008

[10] <http://mathtourist.blogspot.com/2010/05/needle-tower.html>, 4. 4. 2013

[11] <http://www.tensegriteit.nl/e-xmodule.html>, 4. 4. 2013

[12] [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Tensegrity\\_Tetrahedron.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Tensegrity_Tetrahedron.png), 4. 4. 2013

[13] <http://tensegrity.wikispaces.com/Icosahedron>, 7. 4. 2013

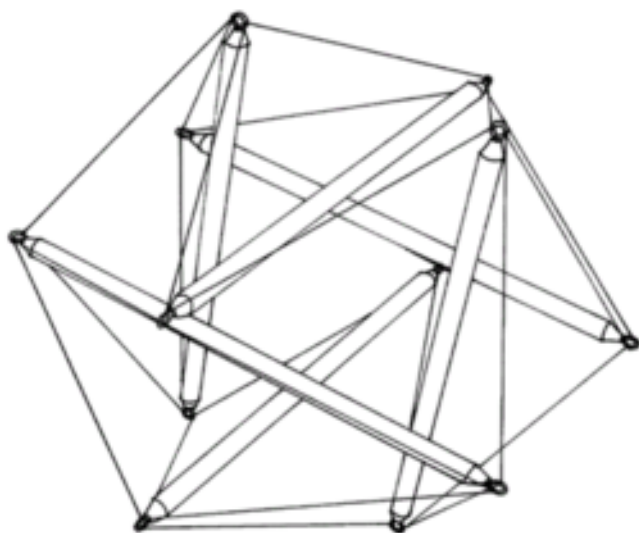
## 7 Dodatek: Razne tensegritete



Slika (8): Snelsonov "Needle tower" [10]



Slika (9): Snelsonov "X-Module" [11]



Slika (10): Ikozaedrična tensegriteta, sestavljena iz šestih paroma vzporednih opornikov [14]