

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Seminar 2

V. van Gogh sreča A. N. Kolmogorova

Gašper Kokot
Mentor: prof. Rudolf Podgornik

Ljubljana, oktober 2007

Povzetek

V seminarju bomo najprej obnovili glavne rezultate teorije turbulence K41. Pogledali si bomo, katere količine so pomembne pri eksperimentih s poudarkom na varianci logaritma hitrosti disipacije, saj se tu napovedi K41 razhajajo z eksperimenti. Omenili bomo β -model, ki se bolje ujema z meritvami, in izpeljali model hitrostne porazdelitve, ki iz predpostavk K41 vseeno reproducira rezultate β -modela. To porazdelitev bomo uporabili pri analizi slik V. van Gogha, kjer je zaradi narave človeškega očesa smiselno enačiti hitrost s svetlostjo slike.

Kazalo

1	Uvod	3
2	Sklepi K41	3
3	Eksperimenti s turbulenco	7
3.1	β -model	7
3.2	Hitrostno polje	8
4	Uporaba K41 pri analizi slik V. van Gogha	10
4.1	Efekt gibanja v slikarstvu	10
4.2	Analiza	11
5	Zaključek	12
	Literatura	15

1 Uvod

Trenutna teorija ve o turbulenci veliko, vendar so njeni temelji še vedno le hipoteze, ki niso dognane na podlagi fundamentalnih premis. Današnje dojetje turbulence je postavil A. N. Kolmogorov s serijo člankov leta 1941 - od tod tudi oznaka teorije K41.

K41 je bila kasneje izpostavljena pretresanju in kritiki. Izumili so nove popravljene modele, ki poskušajo zakrpati pomanjkljivosti. Vseeno obstaja še mnogo odprtih dilem, ki jih pestijo nekateri eksperimentalni podatki, saj odstopajo od napovedi. Sprva je bilo nemalo težav pri določanju meritvenih parametrov, predvsem z zagotavljanjem konvergirajoče statistike. Večina problemov, kar se tiče načina merjenja, je danes rešenih in v člankih predstavljene količine so standardizirane.

Da se pri uporabi principov K41 ne smemo omejevat le na hidrodinamiko, dokazuje več aplikacij. Poleg obravnave fluktuacij menjalnih tečajev so pred nedavnim odkrili primer tudi v slikarstvu. Analizirali so slike V. van Gogha [6], ki so nastale med ali po obdobjih daljše psihoze. Izkazalo se je, da "turbulentno stanje" umetnikove duše ni zgolj lepo zveneča fraza, ampak najdemo njeno potrditev v K41.

2 Sklepi K41

Kot turbulentnega označimo tok v vrtinčastem stanju, kjer se tokovno polje (hitrost, pritisk ...) naključno spreminja s krajem in časom. Glavna enačba hidrodinamike, Navier-Stokesova enačba (navedena je za nestisljive, viskozne tekočine) [1]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{f}, \quad (1)$$

kjer smo nestisljivost upoštevali z:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

tudi v turbulenci igra pomembno vlogo.

Razlaga turbulentnega toka v maniri K41 se opira na obravnavo energijskega toka na različnih skalah. Ohranitvi gibalne in vrtilne količine

sta vsebovani v enačbah, vendar ne ponudita nobenega novega spoznanja. Ohranjanje vrtilne količine na primer pomeni samo, da je napetostni tenzor simetričen. Šele opazovanje pretoka energije nam prikaže sliko energijske kaskade.

V turbulentnem toku se spremembe dogajajo na različnih dimenzijskih nivojih oz. skalah. Skalo lahko smiselno definiramo v Fourierovem prostoru s pomočjo dekompozicije [2], tako da določimo dodaten parameter $K > 0$, s katerim transformiranko razdelimo na dva dela:

$$\begin{aligned} f_K^<(\vec{r}) &\equiv \sum_{k \leq K} \hat{f}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} && \text{za velike skale in} \\ f_K^>(\vec{r}) &\equiv \sum_{k > K} \hat{f}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} && \text{za majhne skale.} \end{aligned} \quad (3)$$

Njun seštevek je seveda prvotna Fourierova transformacija $f(\vec{r}) = f_K^<(\vec{r}) + f_K^>(\vec{r})$, dolžina $l = 1/K$ pa služi za skalo filtriranja.

Na (1) in (2) delujemo z operatorjem $P_K : f(\vec{r}) \mapsto f_K^<(\vec{r})$, ki naredi Fourierovo transformiranko in jo filtrira za velike skale (3)¹:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_K^< + P_K \left[(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \cdot \vec{\nabla} (\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \right] &= \\ = -\vec{\nabla} p_K^< + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}_K^< + \vec{v}_K^< \cdot \vec{f}_K^<. & \end{aligned} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_K^< = 0, \quad (5)$$

Enačbo (4) skalarno pomnožimo z $\vec{v}_K^<$ ter povprečimo po osnovni periodični celici², da dobimo:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{|\vec{v}_K^<|^2}{2} \right\rangle + \left\langle \vec{v}_K^< \cdot \left[(\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \cdot \vec{\nabla} (\vec{v}_K^< + \vec{v}_K^>) \right] \right\rangle &= \\ = -\left\langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} p_K^< \right\rangle + \eta \left\langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla}^2 \vec{v}_K^< \right\rangle + \left\langle \vec{v}_K^< \cdot \vec{f}_K^< \right\rangle. & \end{aligned} \quad (6)$$

Upoštevajoč kontinuitetno enačbo in enačbo stanja $p = p(\rho)$ lahko črtamo člen s tlakom. Drugi del na levi strani enačbe v nasprotju z nedekompozirano enačbo ne izgine povsem, ampak sta na račun nestisljivosti (5) ničelna le dva od štirih členov:

$$\left\langle \vec{v}_K^< \cdot \left(\vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^< \right) \right\rangle = \left\langle \vec{v}_K^< \cdot \left(\vec{v}_K^> \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^< \right) \right\rangle = 0. \quad (7)$$

¹Uporabimo tudi dejstvo, da P_K komutira z operatorjema $\vec{\nabla}$ in $\vec{\nabla}^2$.

²Uporabimo relaciji za realni periodični funkciji f in g : $\langle f_K^> g_K^< \rangle = 0$ in $\langle f(P_K g) \rangle = \langle (P_K f) g \rangle = \sum_{k \leq K} \hat{f}_k \hat{g}_{-k}$.

V prvem delu enakosti nastopajo samo hitrosti na velikih skalah, torej interakcije med velikimi skalami ne morejo spremeniti njihove celotne energije. Drugi enačaj pove, da transport v tekočini, ki ni difuzivne narave, oz. advekcija velikih skal z manjšimi (advekcijski operator je v našem primeru $\vec{v}_K^> \cdot \vec{\nabla}$) ne spremeni celotne energije na velikih skalah.

Če ponovno zapišemo preostanek enačbe (6) in upoštevamo (3), je pred nami *energijska kaskada* oz. zapis zaloge energije, ki se prenaša od skale do skale:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} |\hat{v}_k|^2 + \left\langle \vec{v}_K^< \cdot \left(\vec{v}_K^< \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^> \right) \right\rangle + \left\langle \vec{v}_K^< \cdot \left(\vec{v}_K^> \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_K^> \right) \right\rangle = \\ = -\eta \sum_{k \leq K} k^2 |\hat{v}_k|^2 + \sum_{k \leq K} \hat{f}_k \cdot \hat{v}_{-k}. \end{aligned} \quad (8)$$

ali zapisano strnjeno:

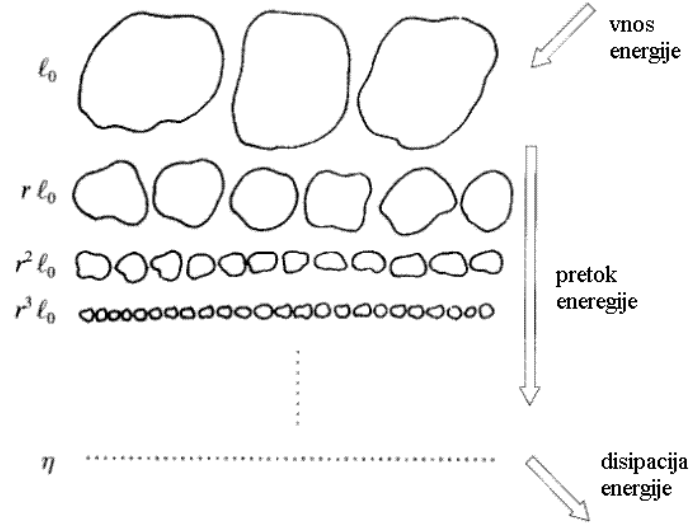
$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_K + \Pi_K = -2\eta\Omega_K + \mathcal{F}_K. \quad (9)$$

Ubesedimo enačbo (9) od leve proti desni: sprememba energijskega toka (\mathcal{E}_K) na skalah do $l = 1/K$ je enaka minus energijskemu toku na manjše skale od l zaradi nelinearnih interakcij oz. inercijskemu členu (Π_K), minus disipirani energiji na skali l oz. disipacijskemu členu ($2\eta\Omega_K$), plus energiji, ki jo je prinesla zunanja sila, oz. gonilnemu členu (\mathcal{F}_K). Oris pravkar povedanega nam nudi Slika 1. V območju velikih Reynoldsovih števil

$$Re = \frac{LV\rho}{\eta}, \quad (10)$$

kjer sta L karakterističen premer in V karakteristična hitrost toka, ρ gostota ter η viskoznost, za prenos energije med skalami skrbi inercijski člen, saj v tem režimu sistem ne izmenjuje energije z okolico. Velika Reynoldsova števila pomenijo, da imamo popolnoma razvito turbulenco, kjer inercijski člen prevlada nad viskoznim. Za večino tokov, ki so jih opazovali v laboratoriju, se to zgodi nad $Re \approx 2100$ [9].

Tak pogled je plival na A. N. Kolmogorova leta 1941, ko je napisal svojo fenomenološko razlago. Omejil se je na inercijsko skalo (desno stran enačbe (9) postavimo na nič) in s preprosto dimenzijsko analizo dobil enega pomembnejših rezultatov, zvezo med hitrostjo disipacije energije $\epsilon = \partial\langle v^2 \rangle / \partial t$



Slika 1: Energijska kaskada z vrtinci, ki na vseh skalah zapolnijo prostor. Skica vzeta iz [2].

ter hitrostjo v na skali l :

$$v \sim (\epsilon l)^{1/3}. \quad (11)$$

V statističnem smislu prepisemo (11) v enačbo za tretji moment porazdelitvene funkcije hitrosti in z natančnejšim izračunom določimo tudi sorazmernostni faktor:

$$\langle (\delta v_{\parallel}(l))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \epsilon l. \quad (12)$$

Homogeni prirastki k hitrosti so definirani kot:

$$\delta \vec{v}(\vec{r}, \vec{l}) \equiv \vec{v}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{v}(\vec{r}). \quad (13)$$

V duhu dimenzijske analize dobimo še drugi moment:

$$\langle (\delta \vec{v}(\vec{r}, \vec{l}))^2 \rangle \sim \epsilon^{2/3} l^{2/3}. \quad (14)$$

Skupaj z ugotovitvijo, da nam statistični pogled v limiti velikih Reynoldsovih števil (10), proč od mej ter na majhnih skalah, povrne vse simetrije Navier-Stokes enačbe (1), ki jih je turbulenca zlomila, pa imamo zbrane primarne zaključke vseh treh hipotez K41.

3 Eksperimenti s turbulenco

Ker sprva ni bilo na voljo teorije, ki bi točno proizvedla gostoto porazdelitve hitrostnega polja, so se meritve osredotočale na momente porazdelitvene funkcije (14) in predvsem t.i. zakon štirih petin (12).

Prvi poskus, da v račun vzamemo fluktuacije hitrosti disipacije ϵ , sta leta 1962 naredila Kolmogorov in Obukhov, ki sta za logaritem hitrosti disipacije predpostavila Gaussovo porazdelitev. Podrobneje to pomeni, da ϵ povprečimo po sferi z radijem r , dobimo njegovo pričakovano vrednost in predpostavimo Gaussovo porazdelitev njegovega logaritma z varianco [3]:

$$\langle [\Delta(\ln \epsilon_l)]^2 \rangle = A(\vec{r}, t) + \mu \ln(L/l), \quad (15)$$

kjer je A odvisen od gibanja na velikih skalah, μ je univerzalni faktor in L zunanja karakteristična dolžina. Kolmogorov je iz tega izračunal splošen izraz za momente porazdelitvene in pokazal, da se taka porazdelitev ujema z zakonom štirih petin (12). Slednje ujemanje je bilo tudi post festum opravičilo za predpostavko.

3.1 β -model

Prva čer, na katero je naletela teorija K41, je prav enačba (15). Desetletja eksperimentov in kasnejša teorijska dognanja so nabrala prepričljive dokaze, da varianca ne uboga (15). Nastalo je nekaj novih modelov, med njimi tudi β -model.

Energijsko kaskado diskretiziramo in vpeljemo dokaj svobodno domnevo, da vrtinec iz večje skale na manjšo skalo rodi v povprečju N potomcev (manjših vrtincev). Pri tem prenese tudi znaten del svoje energije. Glavna razlika od prejšnje razprave je, da naše razmišljanje lokaliziramo na trenutno skalo, kjer opazujemo turbulenco, in ne povezujemo največjega vrtinca neposredno s hitrostjo disipacije. V inercijskem režimu zanimanja je relevantna količina energijski tok na tej skali, ne pa hitrost disipacije.

Prejšnje ugotovitve (11) še vedno držijo lokalno - na trenutni skali l . Če si energijsko kaskado (Slika 1) predstavljamo kot diskretno serijo vrtincev (trenutno generacijo v tej seriji označimo z n), se zavemo, da moramo

nekako upoštevati še zmanjševanje celotnega volumna, ki ga zavzemajo vrtinci. Uvedemo parameter $B_n = Nl_{n+1}^3/l_n^3$, s katerim merimo, za koliko se zmanjša volumen generacije vrtincev napram prejšnji. Med *globalno* povprečeno energijsko gostoto E_n in *lokalno* povprečeno hitrostjo v_n postuliramo zvezo:

$$E_n \sim B_n v_n^2. \quad (16)$$

Z nekaj računskega truda [2],[3] za deviacijo logaritma energijskega toka na inercialni skali namesto (15) dobimo:

$$\langle [\Delta(\ln \epsilon_l)]^2 \rangle \sim (l/L)^{-\beta}, \quad (17)$$

kjer gre brezdimenzijski paramter β proti nič, ko gre Reynoldsovo število proti neskončno.

β lahko geometrično interpretiramo kot efektivno dimenzijo toka. Če imamo v toku neko disipativno strukturo in je disipacija ter s tem gradient hitrosti osredotočena nanjo, potem se bodo pomenljive spremembe hitrosti dogajale samo pravokotno na to strukturo. To pogledno je β tudi kodimenzija te disipativne strukture.

3.2 Hitrostno polje

V tem razdelku se bomo posvetili teoretski porazdelitvi hitrosti iz [5], ki so jo [6] uporabili pri obravnavi slik V. van Gogha. Porazdelitev izhaja iz predpostavke, da je $\ln \epsilon$ porazdeljen Gaussovo in vseeno reproducira varianco β -modela. Razlikuje dva nivoja fluktuacij:

- fluktuacije hitrostnega polja v_r pri danem energijskem toku ϵ in
- fluktuacije energijskega toka.

Fiksiramo ϵ in se spomnimo, da Gaussovo porazdelitev povsem določa varianca σ , ki po dimenzijski analizi enako kot hitrost uboga (11), in napišemo porazdelitev:

$$P_\epsilon(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right). \quad (18)$$

Sedaj upoštevamo še fluktuacije ϵ , tako da postuliramo Gaussovo porazdelitev $\ln \sigma$:

$$Q_\lambda(\sigma)d\sigma = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right) d\ln \sigma, \quad (19)$$

kjer smo s σ_0 označili pričakovano vrednost variance hitrosti v in z λ varianco $\ln \sigma$.

Če povežemo (18) in (19), dobimo za porazdelitev v :

$$\Pi_{a_s, \lambda}(v) = \frac{A(a_s)}{2\pi\lambda} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0)}{2\lambda^2}\right] \frac{d\sigma}{\sigma^2}. \quad (20)$$

Ker želimo zajeti vse prispevke fluktuacij σ , smo porazdelitev (19) integrirali.

Iz empiričnih podatkov vemo, da porazdelitev hitrosti ni simetrična, zato za nastavek vzamemo malce spremenjeno običajno Gaussovo porazdelitev:

$$P_\epsilon(v) \propto \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{d \ln \sigma^2}{dr} l(v)\right)\right], \quad (21)$$

kjer $l(v)$ predstavlja $r' - r$. Z r smo označili razdaljo med dvema točkama v toku in z r' razdaljo med istima točkama nek karakterističen čas prej, saj je za kratke čase obnašanje toka napovedljivo.

Ker poznamo lastnosti, ki jih želimo zajeti, nastavimo člen, ki popravlja eksponent Gaussove porazdelitve v (21), tako da jim ustreza. Pri tem moramo uvesti dodaten parameter a_s . Za gostoto porazdelitve hitrosti dobimo:

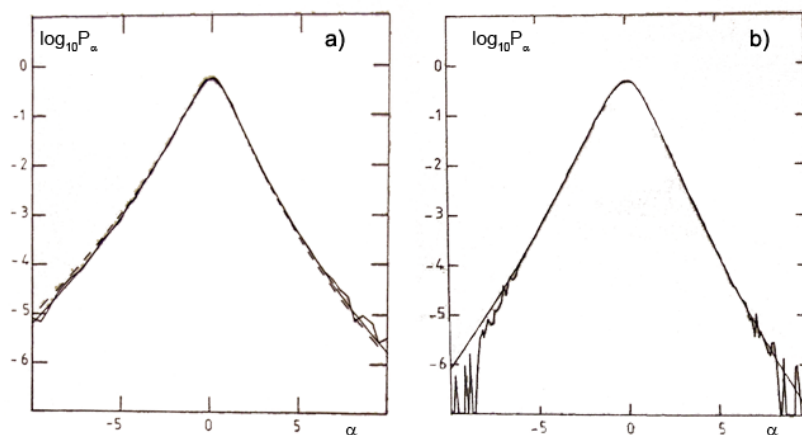
$$\Pi_{a_s, \lambda}(v) = \frac{A(a_s)}{2\pi\lambda} \int \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2} \left(1 + a_s \frac{\frac{v}{\sigma}}{(1 + \frac{v^2}{\sigma^2})^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \exp\left[-\frac{\ln^2(\frac{\sigma}{\sigma_0})}{2\lambda^2}\right] \frac{d\sigma}{\sigma^2}, \quad (22)$$

kjer je $A(a_s)$ normalizacijska konstanta odvisna od univerzalnega parametra a_s . S prilagajanjem na različne nabore podatkov so v [5] določili vrednost $a_s = 0,18$.

Ujemanje predlagane porazdelitve (23) z eksperimentalnimi podatki je izjemno (Slika 2). Edini parameter, ki ga določimo s prilagajanjem je λ :

$$9\lambda^2 = \langle [\Delta(\ln \epsilon_t)]^2 \rangle. \quad (23)$$

Večji kot je, več skal smo zajeli, zato se repi obnašajo manj Gaussovo in padajo počasneje. Če spreminjamo razdaljo med dvema točkama v toku r , dobljeni λ ubogajo β -model oz. enačbo (17).



Slika 2: Prilagajanje enačbe (23) na podatke za eksperimenta v a) vetrovniku, $\lambda = 0,428$ in b) curku, $\lambda = 0,334$. Abscisi sta v logaritemski skali, $\alpha = \delta v / \langle (\delta v)^2 \rangle$. Grafa vzeta iz [5].

Kljub uspešnemu prilaganju avtorji opozarjajo na nekatere težave, npr. odsotnost korelacije med pozitivnimi in negativnimi fluktuacijami. Ker je namen porazdelitve zgolj merjenje parametra λ , se na to ne ozirajo preveč.

4 Uporaba K41 pri analizi slik V. van Gogha

4.1 Efekt gibanja v slikarstvu

Svetlost je količina, ki jo v fizikalnem merilu merimo z $W/(sr \cdot m^2)$, v fiziološkem pa z cd/m^2 . Opisuje količino svetlobe, ki gre skozi oz. se izseva iz določene površine v prostorski kot. Slikarji impresionisti so bili prvi, ki so izkoriščali tehniko ekvisvetlosti, da so na sliki dosegli občutek premikanja. Motiv, naslikan s kontrasti enake svetlosti, vdahne sliki gibanje.

Za razlago tega efekta si moramo podrobneje ogledati merilnik, ki ga uporabljamo pri opazovanju slik - človeško oko. V očesu sta dva tipa sprejemnikov za svetlobo: čepki in paličice. Tri vrste čepkov so zadolžene za zaznavanje barv oz. fotoptično gledanje, paličice pa za zaznavanje svetlosti oz. skotoptično gledanje. Napram čepkom so paličice veliko bolj pogosta in občutljivejša čutilna celica v očesu. Združene so v svežnje, ki so speljani



Slika 3: Vidne celice v očesu. Č - čepek s stožčastim zunanjim odsekom. P - paličica s paličastim zunanjim odsekom. Fotografija vzeta iz [4].

na en internevron, kjer se signal še ojača. Zaradi tega so paličice precej bolj občutljive na gibanje. Pri ekvisvetli sliki je tako položaj objektov za človeškega opazovalca rahlo nedoločen, kar se odraža v občutku migotanja.

Kot postimpresionist je van Gogh verjetno poznal navedeno tehniko. Ker njegova dela med in po razvrvanih obdobjih življenja dajejo vtis turbulence, je možno, da je tehniko nevede povzdignil na nov nivo. Vzporedenje gostote porazdelitve svetlosti z gostoto porazdelitve hitrosti iz 3.2 bomo opravili v naslednjem razdelku.

4.2 Analiza

Eden izmed formatov digitaliziranih slik je RGB, kar stoji za rdeč (R), zelen (G) in moder (B) kanal. Opirajoč se na predhodno razpravo bomo občutek turbulentnosti ob opazovanju slike analizirali tako, da bomo svetlost L izenačili s hitrostjo v . Ker je oko različno občutljivo na barve, svetlost

piksla dobimo s približno formulo:

$$v = L = 0,299L_R + 0,587L_G + 0,114L_B. \quad (24)$$

Sestavimo matriko z razliko svetlosti δv med piksli v vrsticah in razdaljo med piksli R v stolpcih. Gostoto porazdelitve fluktuacij svetlosti, ki jo dobimo iz te matrike, normaliziramo s korenem drugega momenta:

$$P_R(\delta v_R) = \frac{\delta v_R}{\sqrt{\langle(\delta v_R)^2\rangle}}. \quad (25)$$

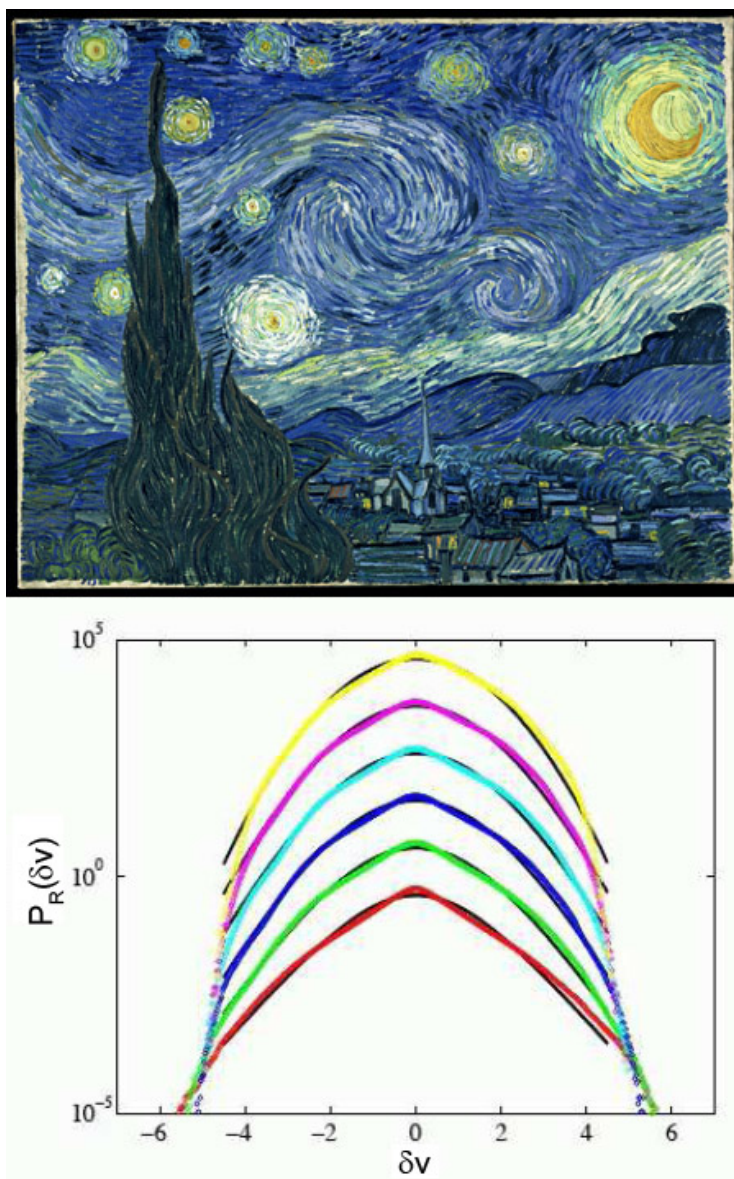
Na dobljene točke nato prilagajamo (23) in določimo parameter λ (Slika 4). Resolucija slik ne vpliva na rezultat, dokler je ne zmanjšamo toliko, da izginejo podrobnosti potez čopiča.

Pri van Goghovi sliki Zvezdnata noč, ki je nastala jeseni 1889 po umetnikovi mesec in pol trajajoči težki krizi, opazimo neverjetno ujemanje s turbulentnimi tokom (Slika 4). Podobno je tudi s sliko Žitno polje z vranami (Slika 5) iz istega obdobja in sliko Cesta s cipreso in zvezdo, ki jo je ustvaril leta 1890 po zadnji psihozi v njegovem življenju (Slika 6). Da bi bila taka tehnika slikanja vseh njegovih slik, zanika obdelava Avtoportreta z obvezo, ki je bil narejen v povsem pomirjenem duševnem stanju (Slika 7).

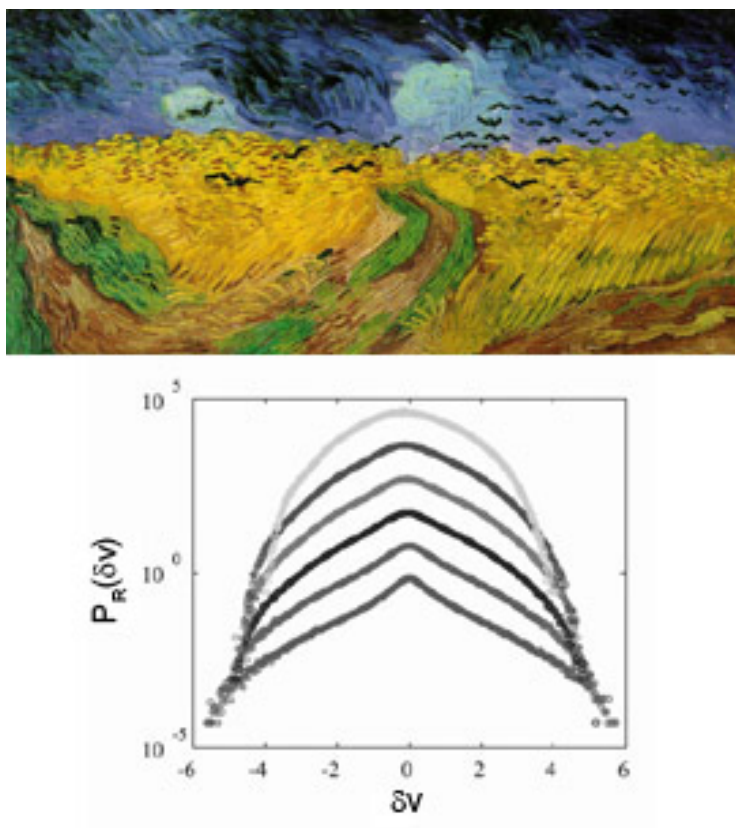
5 Zaključek

V tem seminarju opisani način obravnave umetniških del ni osamljen primer. Prvi poskus so naredili leta 1999 s fraktalnim opisom Pollockovih slik. Na vprašanje, zakaj neko delo dojemamo kot mojstrovino in drugo ne, je težko odgovoriti.

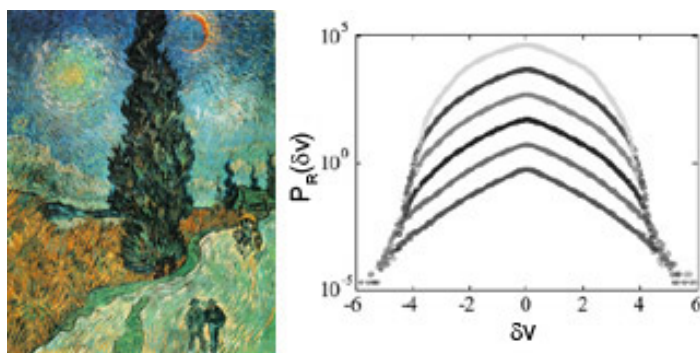
Pri Pollocku in van Goghu so našli matematično dokazljive posnetke naravnih procesov. Je kvaliteta umetnine v človeških očeh določena s kvaliteto posnemanja narave? Vsekakor lahko znanstvena objektivnost močno pripomore k razumevanju umetnosti.



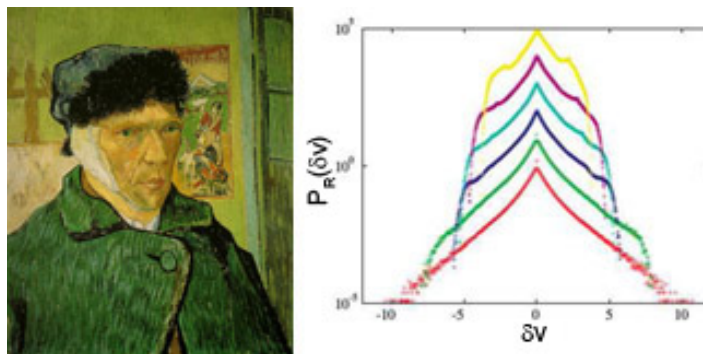
Slika 4: Zgoraj: van Goghova slika Zvezdnata noč. Spodaj: Gostota porazdelitve za šest razdalj med piksli (od spodaj navzgor) $R = 60; 240; 400; 600; 800; 1200$. Za boljšo vidljivost so krivulje navpično zamaknjene. Prilagajanje iz (23) kažejo polne črte, vrednosti parametrov so (od spodaj navzgor) $\lambda = 0, 2; 0,15; 0,12; 0,11; 0,09; 0,0009$. Slika in graf vzeta iz [7] in [6].



Slika 5: Slika Žitno polje z vranami in njena gostota porazdelitve svetlosti. Slika in graf vzeta iz [8] in [6].



Slika 6: Slika Cesta s cipreso in zvezdo in njena gostota porazdelitve svetlosti. Slika in graf vzeta iz [8] in [6].



Slika 7: Slika Avtoportret z obvezo in njena gostota porazdelitve svetlosti. Neujemanje s prejšnjimi slikami je očitno. Slika in graf vzeta iz [8] in [6].

Literatura

- [1] PODGORNIK, R. (2006). Mehanika kontinuumov. Skripta. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani.
- [2] FRISCH, U. (1996). Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov. 2. natis. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] McCOMB, W. D. (1992). The physics of fluid turbulence. 2. natis. Združene Države Amerike: Oxford University Press Inc. New York.
- [4] PÉRILLEUX, E., B. ANSELME, D. RICHARD. (1999). Biologija človeka, Anatomija, fiziologija, zdravje. 1. izdaja. 1. natis. Ljubljana: DZS, d. d.
- [5] CASTAING, B., Y. GAGNE in E. J. HOPFINGER. (1990). Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. V: Physica D. 46. 177-200.
- [6] ARAGON, J. L., G. G. NAUMIS, M. BAI, M. TORRES in P. K. MAINI. (2006). Turbulent luminance in impassioned van Gogh paintings. [Online]. [Citirano 4. oktobra 2007; 13.55]. Dostopno na spletnem naslovu: http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0606/0606246v2.pdf.

- [7] WIKIPEDIA. [Online]. [Citirano 5. oktobra 2007; 10.05]. Dostopno na spletnih naslovih: <http://sl.wikipedia.org> in <http://en.wikipedia.org>.
- [8] THE ARTCHIVE. [Online]. [Citirano 6. oktobra 2007; 11.50]. Dostopno na spletnem naslovu: <http://www.artchive.com/artchive/V/vangogh.html>.
- [9] GLOSSARY OF METEOROLOGY. [Online]. [Citirano 24. oktobra 2007; 18.20]. Dostopno na spletnem naslovu: <http://amsglossary.allenpress.com>