RAZBOJNIŠKI VALOVI

Avtor: David Tobias
Mentor: prof. dr. Marko Žnidarič

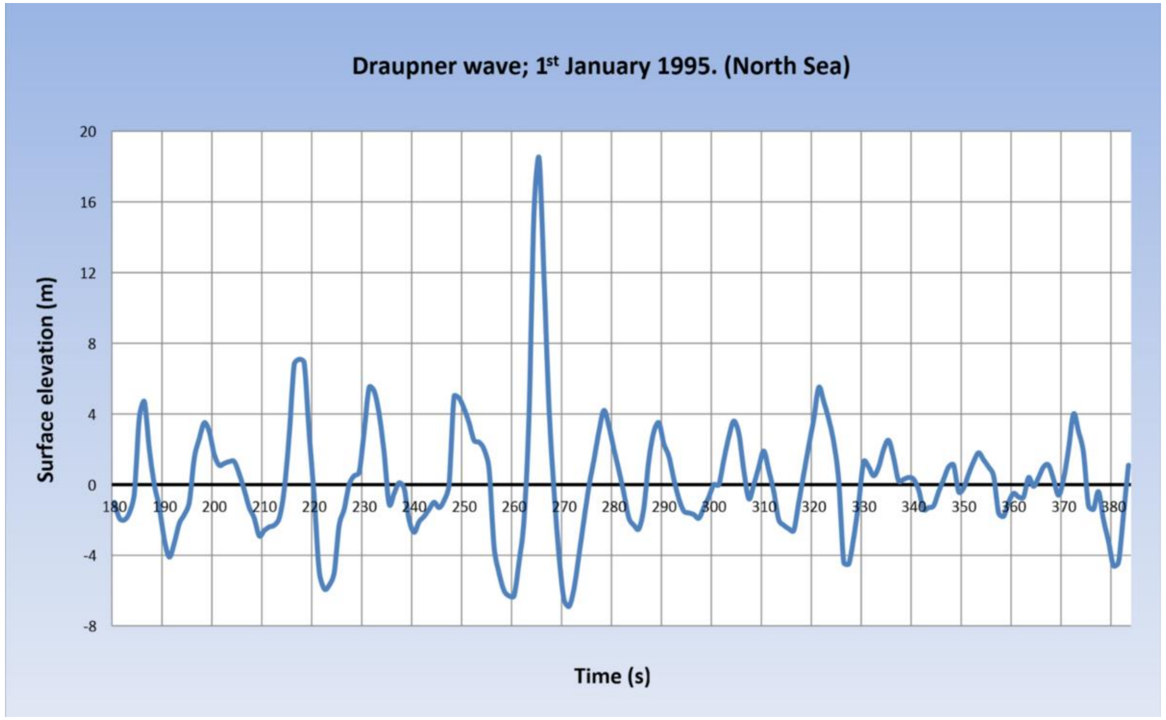
VSEBINA

Zgodovina raziskovanja

- Razbojniške valove so veliko časa imeli za izmišljotine mornarjev.
- O njih je že leta 1826 pisal francoski raziskovalec Jules Dumont d'Urville.
- Njihov obstoj so potrdili s pomočjo satelitskih slik, posnetkov s plovil in ploščadi ter izmerkov merilnih instrumentov.

Zgodovina raziskovanja

- Razlog za dvom: uporaba Gaussove statistike kot model za napovedovanja višine valov.
- Val, višji od 30 metrov bi se naj pojavil le enkrat na 10.000 let!
- Pomembno vlogo v zgodovini preučevanja razbojniških valov je imel Draupnerjev val.



Možni razlogi nastanka

- Morski tokovi in atmosferski procesi.
- Nelinearnost enačb, ki opisujejo dinamiko tekočin.
- Konstruktivna interferenca kot posledica disperzije.

Disperzijska relacija

Predpostavimo, da je tekočina brezvrtinčna in nestisljiva. Prvi pogoj matematično zapišemo kot

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

Nestisljivost upoštevamo preko kontinuitetne enačbe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

ki se pri konstantni gostoti poenostavi na $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$ Dobimo

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Disperzijska relacija

Uporabimo nastavek

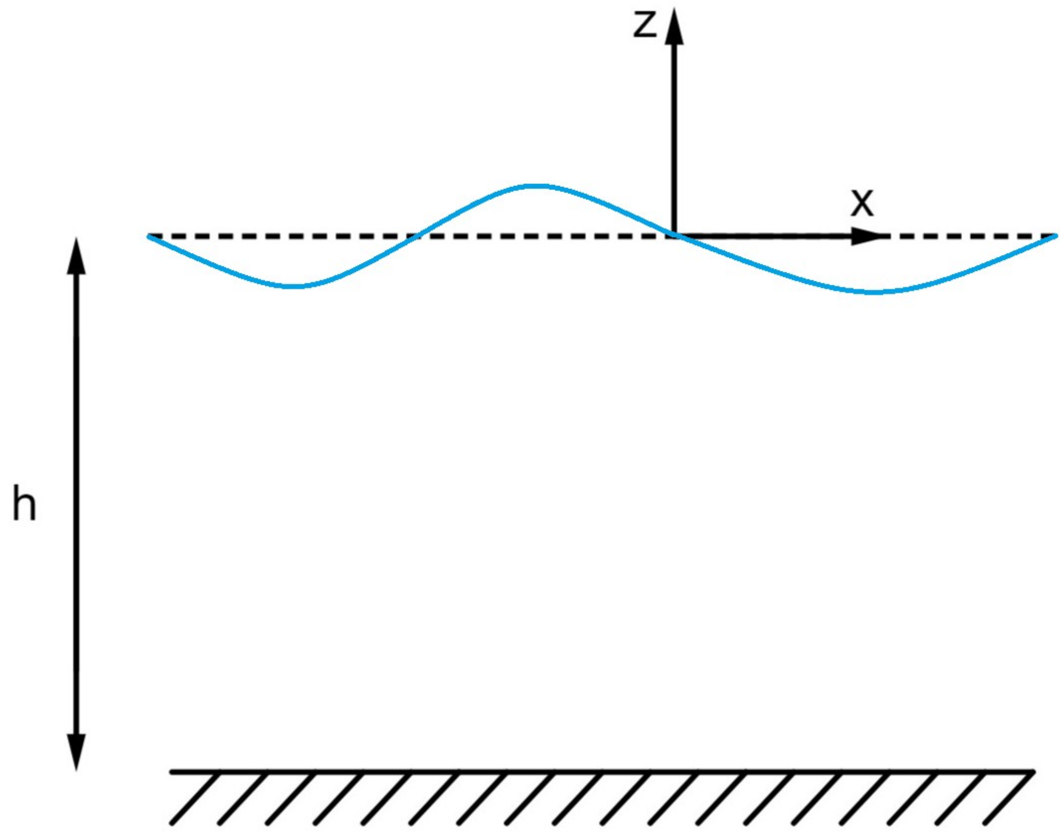
$$\varphi = f(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

in dobimo diferencialno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} f(z) - k^2 f(z) = 0$$

z rešitvijo

$$f(z) = A\cosh\left(k(z+\delta)\right).$$



Disperzijska relacija

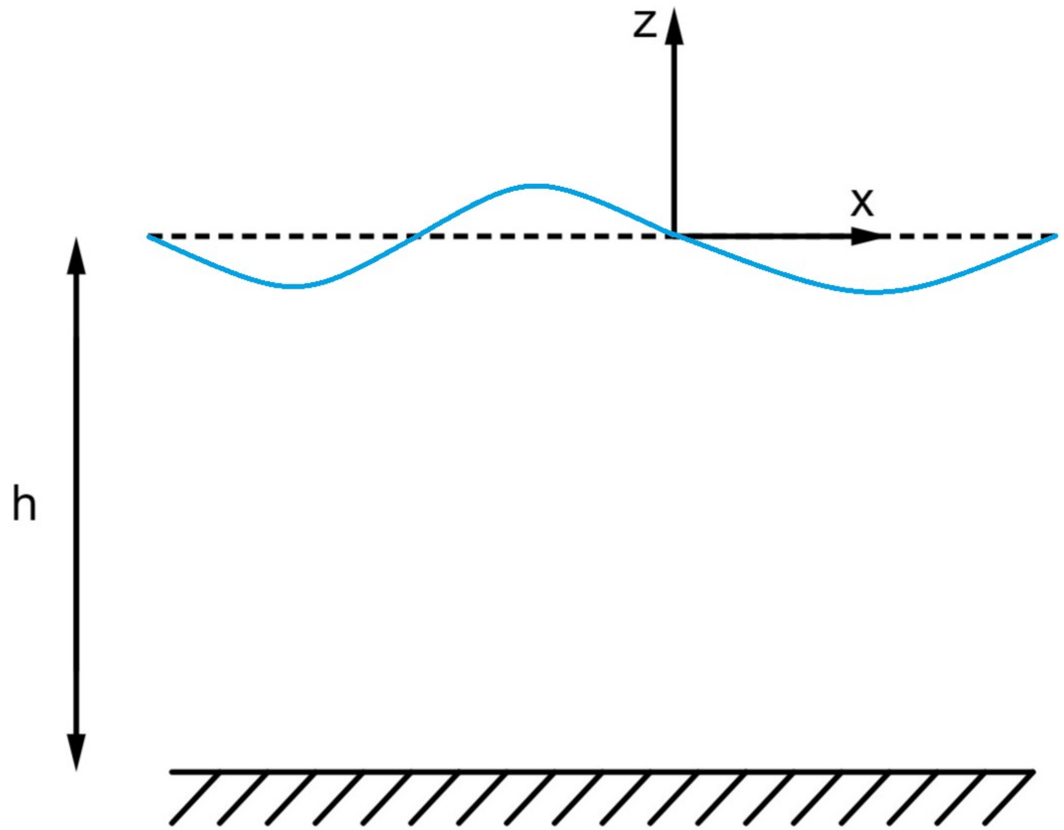
Robni pogoj 1: neprepustnost dna.

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0$$

Vstavimo nastavek in dobimo

$$Ak \sinh(k(z+\delta)) = 0.$$

Robnemu pogoju zadostimo tako, da zahtevamo $\delta = h.$



Disperzijska relacija

Robni pogoj 2: Eulerjeva enačba za ohranitev gibalne količine tekočine.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}.$$

Drugega člena v substancialnem odvodu se znebimo s pomočjo zveze

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\nabla v^2 - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v},$$

saj upoštevamo brezvrtinčnost in zanemarimo kvadratni člen. Ker bomo robni pogoj zapisali na površini, lahko zanemarimo tudi gradient tlaka, gravitacijski pospešek pa zapišemo kot $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. S tem se Eulerjeva enačba poenostavi na

$$\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Phi\right) = 0.$$

Disperzijska relacija

Zadnjo enačbo integriramo po kraju. Vpeljemo $u(x,t)$ kot odmik od ravnovesne lege in dobimo

$$ug + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Odvajamo po času in upoštevamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Dobimo drugi robni pogoj

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

v katerega vstavimo $\varphi = A\cosh(k(z+h))e^{i(kx-\omega t)}$ in upoštevamo $z=0$.

Disperzijska relacija

Pridemo do disperzijske relacije:

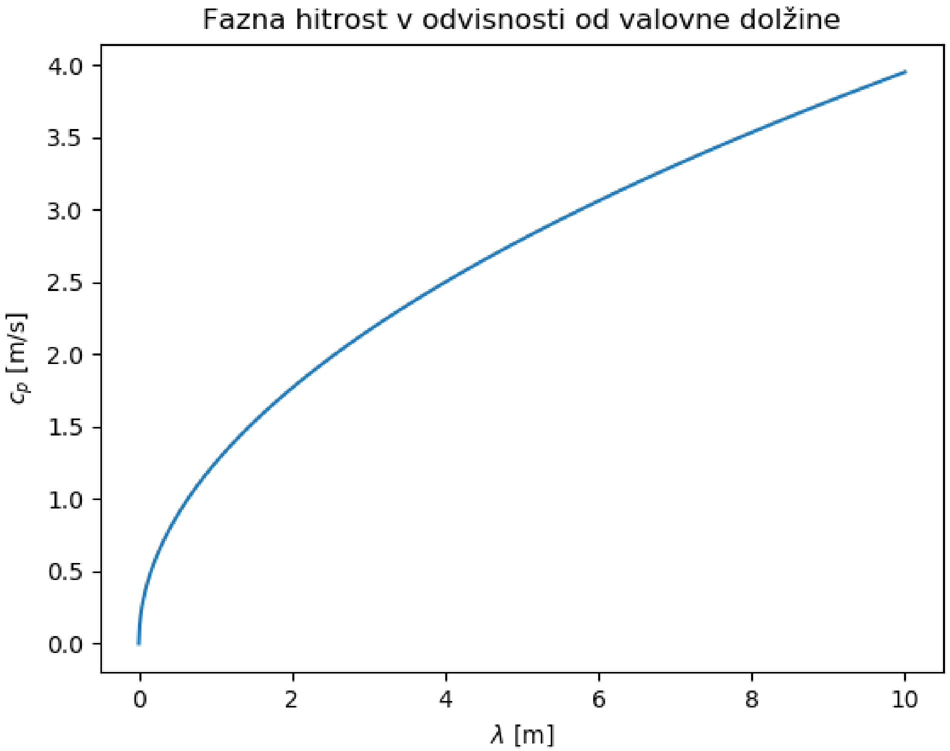
$$\boxed{\omega(k) = \sqrt{gk\tanh(kh)}}$$

V globoki vodi se zveza poenostavi.

$$\omega(k) = \sqrt{gk}$$

Izračunamo lahko fazno hitrost

$$c_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$



Kinematična enačba za frekvenco

Odmik od ravnovesne lege pri valovanju zapišemo kot

$$u(x,t) = A(x,t)\sin\phi,$$

kjer je $\phi = kx - \omega t$. Izračunajmo mešana druga odvoda faze ϕ:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t}$$

Če so vsi odvodi zvezni, vrstni red odvajanja ni pomemben in dobimo

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0.$$

Enačbo pomnožimo z $\partial\omega/\partial k$, upoštevamo definicijo grupne hitrosti in zapišemo

$$\boxed{\frac{\partial\omega}{\partial t} + c_{\mathrm{g}}(\omega)\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0.}$$

Konstruktivna interferenca

Kinematično enačbo prevedemo na enačbo za grupno hitrost

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} + c_g \frac{\partial c_g}{\partial x} = 0.$$

Rešitev poiščemo s pomočjo metode karakteristik. Grupna hitrost se v nekem gibajočem se sistemu spreminja kot

$$\frac{\mathrm{d}c_g(x(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial c_g}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial c_g}{\partial t}.$$

Če izberemo $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = c_g$, se nam enačba poenostavi na

$$\frac{\mathrm{d}c_g}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Rešitev zapišemo kot

$$c_g = c_0(x_0).$$

Konstruktivna interferenca

x_0 izračunamo iz karakteristike

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_g \to x = x_0 + c_g t,$$

Kar nam da končno rešitev

$$c_g(x,t) = c_0(x - c_g(x,t)t).$$

Dobili smo implicitno enačbo za grupno hitrost. Da bi lažje razumeli, kako lahko pride do konstruktivne interference, si oglejmo njen odvod po spremenljivki x. Vpeljemo še $\xi = x - c_g t$ in dobimo

$$\frac{\partial c_g}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}c_0}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}c_0}{\mathrm{d}\xi}\left(1 - t\frac{\partial c_g}{\partial x}\right).$$

Konstruktivna interferenca

Iz prejšnje enačbe izrazimo

$$\frac{\partial c_g}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}c_0/\mathrm{d}\xi}{1+t\,\mathrm{d}c_0/\mathrm{d}\xi}.$$

Do razbojniškega vala bo prišlo, če bo zgornji odvod v neki točki divergiral. To realiziramo tako, da zahtevamo

$$\frac{\mathrm{d}c_0}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{1}{T} \rightarrow c_0(\xi) = \frac{x_0-\xi}{T},$$

Kjer je T pozitivna konstanta. Spomnimo se, da je $c_g(x,t) = c_0(\xi)$ in upoštevamo definicijo ξ. Dobimo implicitno enačbo

$$c_g(x,t) = \frac{x_0-x+c_g(x,t)t}{T}.$$

Konstruktivna interferenca

Rešitev enačbe je

$$\boxed{c_g(x,t) = \frac{x - x_0}{t - T},}$$

kjer sta x_0 in T kraj in čas tvorbe razbojniškega vala.

Poglejmo si, kako bi razbojniški val naredili v laboratorijskih pogojih. Mislimo si dolg bazen z izvorom na eni strani. Izračunali bi radi frekvenco izvora iz že izračunane grupne hitrosti:

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{2\omega}.$$

Konstruktivna interferenca

Postavimo koordinatni sistem v izvor in dobimo

$$\boxed{\omega(t) = \frac{g(T-t)}{2x_0}.}$$

https://www.youtube.com/watch?v=AjaioEX1OBU

Zakaj je pomembno razumeti nastanek razbojniških valov?

- Zaradi nepredvidljivosti in ekstremnih višin predstavljajo nevarnost za plovila.
- Predpisani so bili ostrejši varnostni standardi.
- Poglobljeno razumevanje njihovega nastanka bi lahko omogočilo napovedovanje razbojniških valov.
- Pojavljajo se tudi v drugih vejah fizike (optika, kvantna mehanika, difuzija).