

# Fizika 2 za študente matematike

Saša Prelovšek Komelj in Denis Arčon

Ljubljana, 4. februar 2019

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Nihanje</b>	<b>4</b>
1.1	Uvod . . . . .	4
1.2	Harmonično nihanje: opis z enačbami gibanja . . . . .	6
1.2.1	Vodoravno vzmetno nihalo . . . . .	6
1.2.2	Fizično nihalo in Taylorjev razvoj za male odmike . . . . .	9
1.2.3	Kako določiti nihajni čas nihala (za majhne odmike) . . . . .	11
1.3	Kratek uvod v diferencialne enačbe (seminar) . . . . .	11
1.4	Harmonično nihanje iz gibalnih enačb s konstantnim členom . . . . .	13
1.5	Harmonično nihanje: opis z energijskim zakonom . . . . .	13
1.6	Gibanje v bližini labilne ravnovesne lege . . . . .	15
1.7	Neharmonično nihanje za večje odmike (seminar) . . . . .	16
1.8	Dušeno nihanje . . . . .	17
1.9	Vsiljeno nihanje s harmoničnim vzbujanjem in resonanca . . . . .	19
1.10	Vzbujeno nihanje s splošnim vzbujanjem in s kratkotrajnim sunkom . . . . .	23
1.11	Dve sklopljeni nihali . . . . .	26
1.11.1	Iskanje lastnih nihanj . . . . .	28
1.11.2	Linearne kombinacije lastnih nihanj, ki vodi do utripanja . . . . .	29
1.11.3	$N$ sklopljenih nihal . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Mehansko valovanje</b>	<b>32</b>
2.1	Splošen opis valovanja . . . . .	32
2.2	Valovanje v eni dimenziji . . . . .	34
2.3	Valovanje na vrvi in valovna enačba . . . . .	35
2.4	Rešitve valovne enačbe . . . . .	38
2.4.1	Potujoči val $u(x, t) = f(x - ct)$ v smeri $+x$ . . . . .	38
2.4.2	Potujoči val $u(x, t) = g(x + ct)$ v smeri $-x$ . . . . .	41
2.4.3	Interferenca . . . . .	41
2.4.4	Splošne rešitve valovne enačbe . . . . .	42
2.5	Val na neskončnem sredstvu ob danih začetnih pogojih . . . . .	42
2.6	Potujoč harmoničen val . . . . .	43
2.7	Robni pogoji in stoječe valovanje . . . . .	46
2.8	Robni pogoji pri valovanju na meji med sredstvoma: odbiti in prepuščeni val . . . . .	49
2.9	Energija pri valovanju . . . . .	53

2.10	Zvok . . . . .	55
2.10.1	Izpeljava zvočne hitrosti . . . . .	56
2.10.2	Zvok v zraku in akustika . . . . .	58
2.10.3	Zvok v kapljevini in trdnini . . . . .	59
2.11	Valovanje po diskretnem sredstvu . . . . .	59
2.12	Valovanje v treh dimenzijah . . . . .	62
2.13	Interferenca . . . . .	64
2.14	Dopplerjev pojav . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Električno polje</b>	<b>66</b>
3.1	Uvod . . . . .	66
3.2	Naboj . . . . .	66
3.3	Coulombova električna sila . . . . .	68
3.4	Električno polje . . . . .	69
3.5	Električni pretok . . . . .	76
3.5.1	Definicija pretoka . . . . .	76
3.5.2	Zakon o električnem pretoku - Gaussov zakon . . . . .	78
3.5.3	Dokaz zakona o električnem pretoku . . . . .	79
3.5.4	Uporaba zakona o električnem pretoku . . . . .	79
3.5.5	Zakon o električnem pretoku v diferencialni obliki . . . . .	82
3.6	Električna potencialna energija ( $W_{ep}$ ), električni potencial ( $\varphi$ ) in električna napetost ( $U$ ) . . . . .	84
3.6.1	Definicije energije, potenciala in napetosti . . . . .	84
3.6.2	Uporaba električne energije in napetosti pri zgledih . . . . .	85

## Oznake:

V fiziki odvod po kraju pogosto označimo s črtico, odvod po času pa s piko.

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \quad f''(x) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (1)$$

$$\dot{g}(t) \equiv \frac{dg(t)}{dt} \quad \ddot{g}(t) \equiv \frac{d^2 g(t)}{dt^2} \quad (2)$$

(3)

Smeri vektorjev: ven in notri (glej Sliko)

⊙ smer ven (iz lista)

⊗ smer mot (v list)

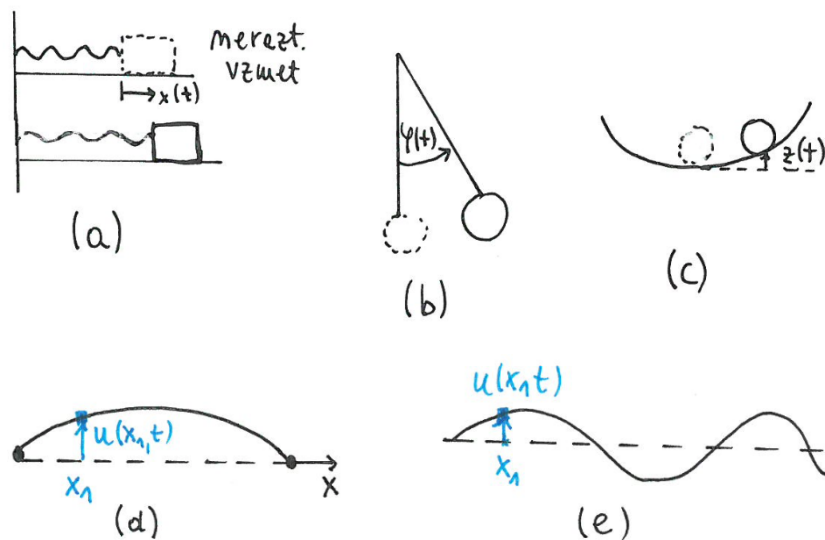
# 1. Nihanje

## 1.1 Uvod

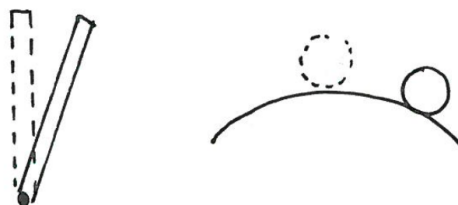
Nihanje obravnava periodična gibanja, kjer se dogodki vrstijo v pravilnih zaporedjih. Pri tem se periodično spreminja vrednost neke fizikalne količine okoli ravnovesne vrednosti. Primeri fizikalnih količin, ki se spreminjajo s časom, so prikazani na Sliki 1.1:

- *odmik*:
  - odmik uteži  $x(t)$  na vzmetnem nihalu, ki niha vzdolž koordinate  $x$  (Slika 1.1a)
  - kot odmika  $\varphi(t)$  matematičnega nihala ali palice vpete na zgornjem krajišču (1.1b)
  - višina kroglice  $z(t)$ , ki se kotali po dnu krožne posode (1.1c)
  - lega atoma v kristalu, ki niha okoli ravnovesne vrednosti
- *odmik sredstva  $u(x_1, t)$  pri valovanju na nekem mestu  $x_1$* :
  - pri struni na kitari, ki jo zabrenkamo, vsak košček strune niha. Odmik koščka, ki se nahaja na mestu  $x_1$  vzdolž strune, opišemo z  $u(x_1, t)$  (Slika 1.1d) . Ta odmik se periodično spreminja s časom.
  - imejmo v mislih ravni potujoči val na vodni gladini, ki potuje v smeri osi  $x$ . Delček vode na mestu  $x_1$  niha (v smeri gor in dol) z odmikom  $u(x_1, t)$  (Slika 1.1e). Ta odmik se periodično spreminja s časom.
- *druge fizikalne količine*:
  - V električnem omrežju napetost  $U(t)$  niha okoli ničelne vrednosti.
  - Pri harmoničnem zvočnem valu tlak  $p(x_1, t)$  in gostota  $\rho(x_1, t)$  na mestu  $x_1$  v zraku nihata okoli ravnovesnih vrednosti  $p_0$  in  $\rho_0$ .
  - Pri harmoničnem elektro-magnetnem valovanju vrednost električnega polja  $E(x_1, t)$  in  $B(x_1, t)$  na nekem mestu  $x_1$  nihata okoli ničelnih vrednosti.

*Nihajni čas* je čas ene periode (nihaja) in ga označimo s  $t_0$ . Frekvenca  $\nu = 1/t_0$  izražena v Hertzi (Hz=1/s) pa nam pove število nihajev na sekundo.



Slika 1.1: Primeri nihanj okoli stabilnih ravnovesnih leg, ki so označene črtkano.



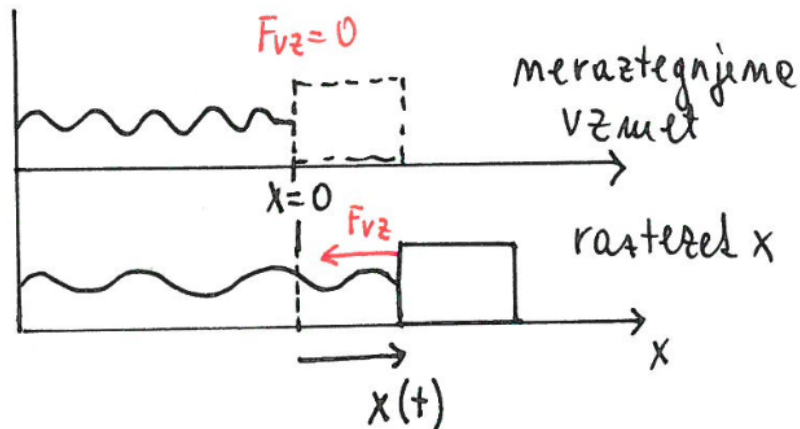
Slika 1.2: Labilne ravnovesne lege in gibanja okrog njih.

*Ravnovesje* predstavlja lego telesa (ali stanje sistema) za katero je vsota vseh zunanjih sil enaka nič in prav tako vsota vseh zunanjih navarov enaka nič.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 = m\vec{a}_T \rightarrow \vec{a}_T = 0, \quad \sum_i \vec{M}_i = 0 = J\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha} = 0. \quad (1.1)$$

Telo v taki legi miruje (ali pa se enakomerno giblje ali vrti, vendar se za ta primer pri nihanju ne zanimamo). Ravnovesna stanja sistemov na Sliki 1.1 so označene črtkano. V teh stanjih bi sistemi lahko mirovali.

Pogoj za nihanje je prisotnost sile ali navora, ki sistem sili proti ravnovesni legi. Pri vzmetnem nihalu je to sila vzmeti. Pri matematičnem nihalu vsota sil vrvice in teže. Pri valovanju na struni delujejo na dan košček strune sile sosednjih delov strune in le-te kažejo proti ravnovesju. Če pri malih odmikih od ravnovesja sile oz. navori sistem silijo proti ravnovesju, takemu ravnovesju pravimo *stabilno ravnovesje*. Vsi primeri ravnovesij na Sliki so stabilna ravnovesja.



Slika 1.3: Vodoravno vzmetno nihalo.

Navpična palica na Sliki 1.2, ki je vpeta na spodnjem krajišču, je tudi v ravnovesju: točno v navpični legi lahko miruje. Vendar pri majhnem odklonu od navpične lege navor palico sili stran od ravnovesja in ne proti ravnovesju. Podobno velja za obrnjeno krožno posodo. Črtkane črte tokrat označujejo *labilna ravnovesja*.

Eden od motivov za podrobno obravnavo nihanja pri *Fiziki 2* je tudi spoznavanje zapisa in reševanja preprostih navadnih diferencialnih enačb na praktičnih primerih. Pri skoraj vseh obravnavanih primerih bo potrebno za določitev časovne odvisnosti odmika pri nihanju namreč rešiti diferencialno enačbo.

## 1.2 Harmonično nihanje: opis z enačbami gibanja

Ko nihalo odmaknemo iz stabilne ravnovesne lege, ga sile in navori silijo proti ravnovesju. Zaradi tega se vrne v ravnovesje, vendar se tam zaradi vztrajnosti ne ustavi, temveč se začne oddaljevati od ravnovesja v drugo stran. Dokler ga sile proti ravnovesju zopet ne usmerijo h gibanju proti ravnovesju. Zgodba se potem ponovi in če ne bi bilo dušenja bi nihanje trajalo v nedogled.

Spreminjanje lege nihala s časom lahko preučimo s pomočjo enačb gibanja ( $\vec{F} = m\vec{a}_T$  ali/in  $\vec{M} = J\vec{\alpha}$ ) ali z energijskim zakonom ( $A = \Delta W$ ). V tem in nekaterih ostalih poglavjih se bomo oprli na enačbe gibanja, v poglavju 1.5 pa bomo uporabili energijski zakon. Matematični uvod v navadne diferencialne enačbe bo predstavljen v poglavju 1.3.

### 1.2.1 Vodoravno vzmetno nihalo

Podrobneje preučimo časovno odvisnost odmika pri vodoravnem vzmetnem nihalu s koeficientom vzmeti  $k$  in maso uteži  $m$  (Slika 1.3). Pri tem bomo zanemarili trenje med utežjo in

podlago ter zračni upor. Naš prvi zgled je še posebej "matematično čist" ker brez dodatnih približkov vodi do preproste enačbe nihanja. Utež je v ravnovesni legi, ko je vzmet neraztegnjena in na utež ne povzroča sile. Odmik  $x(t)$  od ravnovesja je enak raztezku vzmeti. Izhajamo iz enačbe gibanja in zapšemo drugi Newtonov zakon za utež. Edina sila na utež je sila vzmeti  $\vec{F}_{vz} = -k\vec{x}$ , ki je sorazmerna z njenim raztezkom  $x$  in kaže v levo ko je odmik v desno in obratno

$$\begin{aligned} \vec{F}_{vz}(t) &= m\vec{a}(t) \\ -kx(t) &= m\ddot{x} \\ \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) &= 0 \\ \ddot{x}(t) + \omega_0^2x(t) &= 0 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

V drugi vrstici smo zapisali x-komponento enačbe iz prve vrstice. Predznak minus pri sili ustreza sili, ki v vsaki legi kaže proti ravnovesju - ta je ključen za nihanje. Z drugimi besedami - pospešek ima nasprotno smer kot odmik. V četrti vrstici smo definirali vrednost konstante  $\omega_0$  za vzmetno nihalo, ki jo imenujemo *krožna frekvenca nihanja*. To vodi do *enačbe nihanja*

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0}, \quad (1.2)$$

ki vsebuje vsoto drugega odvoda neke spremenljivke in spremenljivke same. Do tovrstne enačbe pridemo pri proučevanju skoraj poljubnih nihanj, če obravnavamo primer majhnih odmikov od ravnovesja. Enačbo bomo rešili na dva načina, ki seveda vodita do enake rešitve:

- *reševanje s ločitvijo spremenljivk in integracijo*: enačbo (1.2) lahko izrazimo tako, da v njej nastopata le spremenljivki  $x$  in  $v$  ter njuni diferenciali  $dx$  in  $dv$

$$-kx = m \frac{dv(x(t))}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v$$

pri čemer smo upoštevali pravilo posrednega odvoda  $f(g(x))' = f'(g)g'$  oziroma  $\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$ , torej  $\frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$ . Zdaj lahko ločimo (separiramo) spremenljivki  $x$  in  $v$ : spremenljivke odvisne od  $v$  damo na desno stran enačbe, spremenljivke odvisne od  $x$  pa na levo. Integracija dobljene enačbe od  $t = 0$  do  $t$  vodi do zveze med hitrostjo in odmikom, pove torej kakšna je hitrost  $v(x)$  pri danem odmiku  $x$

$$\begin{aligned} - \int_{x(0)}^{x(t)} k x dx &= \int_{v(0)}^{v(t)} m v dv \\ - \frac{1}{2} k x(t)^2 + \frac{1}{2} k x(0)^2 - \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} m v(0)^2 &= 0 \quad \text{oz} \quad -W(t) + W(0) = 0 \quad W = W_{pr} + W_{kin} \\ v(x) &= \sqrt{\omega_0^2[x(0)^2 - x^2] + v(0)^2} = \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$



V drugi vrstici prepoznamo energijski stavek, ki pravi, da je vsota kinetične in prožnostne energije ves čas enaka: ob času  $t$  je enaka kot ob času nič. Lega  $x(0)$  in hitrost  $v(0)$  ob času  $t = 0$  nastopita v integracijski meji in morata biti znana če naj določimo  $v(x)$  poslej. Lego  $x(t)$  določimo iz zadnje enačbe, kjer uporabimo definicijo za hitrost  $v = dx/dt$  in tokrat ločimo spremenljivki lege in časa. Dobljeno enačbo integriramo od časa 0 do  $t$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x(0)^2 + v(0)^2/\omega_0^2 - x^2}} = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \omega_0 \int_0^t dt$$

$$\arcsin \frac{x(t)}{x_0} - \arcsin \frac{x(0)}{x_0} = \omega_0 t$$

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega_0 t + \arcsin \frac{x(0)}{x_0}\right) = x_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (1.3)$$

kjer smo uvedeli novi spremenljivki

$$x_0^2 \equiv x(0)^2 + v(0)^2/\omega_0^2 \quad \delta \equiv \arcsin[x(0)/x_0] \quad (1.4)$$

Dobljena odvisnost odmika od časa  $x(t)$  (1.3) je res periodična, več o njej pa spregovorimo potem ko isto rešitev dobimo tudi z drugo metodo.

- *reševanje z nastavkom*: iz poskusa vidimo, da je nihanje periodično, zato poskusimo rešiti enačbo nihanja (1.2) z nastavkom  $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta)$ , kjer so  $\omega$ ,  $x_0$  in  $\delta$  zaenkrat neznani. Nastavek vstavimo v enačbo nihanja

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \delta) + x_0 \omega_0^2 \sin(\omega t + \delta) = 0 .$$

in vidimo, da nastavek reši enačbo (1.2), če je  $\omega = \omega_0$ , kar se sklada z rešitvijo (1.3).

Oba pristopa k reševanju vodita do *harmoničnega nihanja*

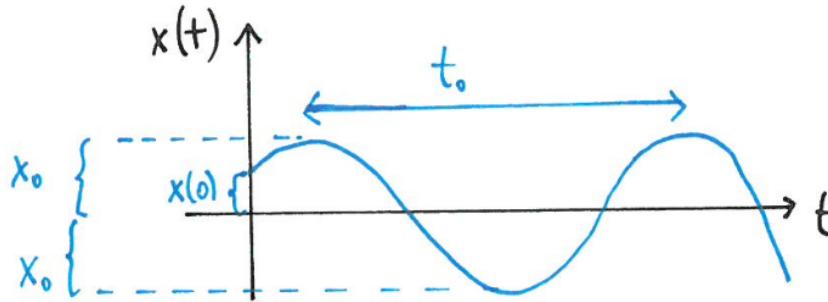
$$\boxed{x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \delta)} \quad (1.5)$$

prikazanega na Sliki 1.4. Harmonično nihanje je periodično spreminja se ko se odmik ali kaka druga fizikalna količina spreminja s časom sinusno, kjer je  $x_0$  je amplituda nihanja,  $\delta$  pa je poljubna faza (torej je harmonično nihanje lahko tudi kosinusno ali poljubna linearna kombinacija sinusa in kosinusa). Krožna frekvenca nihanja  $\omega_0$  je povezana z frekvenco nihanja  $\nu$  in nihajnim časom  $t_0$ : v času  $[t, t + t_0]$  enega nihaja se nihalo vrne v isto lego, faza pa se mora zato spremeniti za  $2\pi$

$$\sin(\omega_0 t + \delta) = \sin(\omega_0(t + t_0) + \delta) = \sin(\omega_0 t + \delta + 2\pi)$$

zato mora biti dodatni prispevek  $\omega_0 t_0$  k fazi na desni enak  $2\pi$ . Od tod sledijo zveze med nihajnim časom  $t_0$ , frekvenco  $\nu$  in krožno frekvenco  $\omega_0$

$$\boxed{t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \nu = \frac{1}{t_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad \omega_0 = 2\pi\nu} \quad (1.6)$$



Slika 1.4: Časovna odvisnost odmika pri harmoničnem nihanju.

Pomembno spoznanje pri harmoničnem nihanju je, da je  $\omega_0$  (in s tem nihajni čas) neodvisen od amplitude nihanja  $x_0$ : pri večji amplitudi nihalo opravi večjo pot, njegova hitrost pa je večja, kar vodi do enakega nihajnega časa kot pri manjši amplitudi. Nihajni čas in  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  sta pri vzmetnem nihalu odvisna le od lastnosti vzmeti in uteži.

**Poskus:** merjenje nihajnega časa za različne amplitude nihanja - nihajni časi so za različne amplitude znotraj merske napake enaki.

Razmislimo še kako določimo amplitudo  $x_0$  in fazo  $\delta$  pri reševanju z nastavkom, če poznamo začetne pogoje: lego  $x(0)$  in hitrost  $v(0)$  uteži ob času  $t = 0$ . Dva začetna pogoja potrebujemo ker vsebuje enačba nihanja drugi odvod. Zveza za odmik (1.5) vodi do  $x(0)$  in po odvajanju do  $v(0)$

$$x(0) = x_0 \sin \delta \quad v(0) = x_0 \omega_0 \cos \delta$$

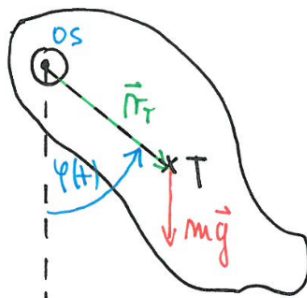
iz dveh zvez pa lahko izluščimo dve neznanki

$$\tan \delta = \frac{x(0)\omega_0}{v(0)} \quad x_0 = \frac{x(0)}{\sin \delta}$$

ki se ujemata z (1.4), kar lahko sami s krajšim računom preverite. Pri znani začetni legi in hitrosti je časovna odvisnost nihala torej popolnoma določena preko (1.5), če le sta zračni upor in trenje zanemarljiva.

## 1.2.2 Fizično nihalo in Taylorjev razvoj za male odmike

Fizično nihalo na Sliki 1.5 je togo telo, ki je vrtljivo vpeto v osi, ustrežna gibalna enačba pa je drugi Newtonov zakon za vrtenje okoli osi. Navor sile teže določimo tako kot da je vsa masa nihala  $m$  zbrana v težišču



Slika 1.5: Fizično nihalo

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= J\vec{\alpha} & \vec{M} &= \vec{r}_T \times m\vec{g} \\
 -mg \sin \varphi r_T &= J\ddot{\varphi} \\
 \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi &= 0 & \omega_0^2 &= \frac{mgr_T}{J}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

pri čemer je  $\vec{r}_T$  vektor od osi do težišča,  $J$  pa vztrajnostni moment okoli osi. V drugi vrstici smo zapisali komponente enačbe iz prve vrstice v smeri osi, ki kaže navzven, torej v pozitivni smeri kota  $\varphi$ . Kotni pospešek  $\alpha$  smo izrazili z drugim odvodom kota po času. Navor deluje navznoter, torej sili nihalo proti ravnovesju, kar botruje negativnemu predznaku v drugi vrstici, ki je zopet ključen za nihanje.

Enačba (1.7) je homogena diferencialna enačba drugega reda, ni pa linearna (definicije tipov diferencialnih enačb so zbrane v poglavju 1.3). Če so odmiki  $\varphi \ll 1$  tako majhni, da je v Taylorjevem razvoju  $\sin \varphi \simeq \varphi - \varphi^3/3! + \varphi^5/5!$  dovolj dober približek že prvi red  $\sin \varphi \simeq \varphi$ , enačba (1.7) preide v enačbo nihanja (1.2). Tedaj je časovna odvisnost kota v dobrem približku harmonična

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \quad \omega_0^2 = \frac{mgr_T}{J} = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \tag{1.8}$$

Za matematično nihalo (majhna utež pripeta na vrvici z dolžino  $l$ ) in za palico vpeto na zgornjem krajišču dobimo nihajne čase

$$t_0^{mat.nih.} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad t_0^{palica} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} \tag{1.9}$$

**Poskus:** Merjenje nihajnega časa matematičnega nihala za različne dolžine vrvic. Merjenje nihajnega časa palice.

### 1.2.3 Kako določiti nihajni čas nihala (za majhne odmike)

Povzemimo kako določiti nihajni čas nihala (za male odmike):

1. poiščemo ravnovesno lego
2. uvedemo spremenljivko  $(x, \varphi, \dots)$  ki opiše odmik od ravnovesja
3. zapišemo ustrezno enačbo gibanja ( $\vec{F} = m\vec{a}_T$  in/ali  $\vec{M} = J\vec{\alpha}$ ) in jo izrazimo z spremenljivko in njenimi drugimi odvodi
4. če enačba ni linearna jo lineariziramo za male odmike (enačba je linearna ko spremenljivka nastopa v prvi potenci)
5. dobimo enačbo nihanja tipa (1.2), kjer iz konstante pred spremenljivko izluščimo  $\omega_0^2$ , rešitev pa je harmonično nihanje (1.5). Če smo naredili razvoj do prvega reda, ta rešitev velja le za dovolj male odmike.
6. Amplitudo  $x_0$  in  $\delta$  lahko določimo iz znanih začetnih pogojev za lego in hitrost.

### 1.3 Kratak uvod v diferencialne enačbe (seminar)

Opis nihanja vodi do diferencialnih enačb za spremenljivko  $x(t)$ , ki opisuje časovno odvisnost lege nihala. Rešitev diferencialne enačbe predstavlja funkcija  $x(t)$ . V tem podpoglavju bomo namesto  $x(t)$  zapisovali neznano funkcijo kot  $y(x)$  kot to ponavadi storite pri matematičnih predmetih.

Navadna diferencialna enačba je odvisna le od ene neznane funkcije  $y(t)$  in njenih odvodov  $F(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ , na primer  $y'''(x)(y''(x))^2 - \sqrt{x} = 0$ . Enačba je reda  $n$ , če je najvišji odvod v njej  $y^{(n)}(x)$ . V linearni diferencialni enačbi nastopajo vsi odvodi s potenco ena in ne vsebuje produktov različnih odvodov.

Splošna linearna enačba  $n$ -tega reda

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x) \quad (1.10)$$

je homogena za  $f(x) = 0$  in ne-homogena za  $f(x) \neq 0$ . Splošna rešitev enačbe (1.10) je

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)} \quad y_h : \text{homogena rešitev} \quad y_p : \text{partikularna rešitev} \quad (1.11)$$

- Homogena rešitev  $y_h(x)$  je splošna rešitev pripadajoče homogene enačbe enačbe (1.10) z  $f(x)$ . Preprosto jo je najti za primer konstantnih koeficientov

$$\boxed{a_n y_h^{(n)}(x) + \dots + a_1 y_h'(x) + a_0 y_h(x) = 0} \quad (1.12)$$

kjer jo rešimo z nastavkom

$$\boxed{y_h(x) = C e^{\lambda x}} \quad (1.13)$$

in dobimo

$$a_n \lambda^n C e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda C e^{\lambda x} + a_0 C e^{\lambda x} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = 0}, \quad (1.14)$$

kjer so  $\lambda_i$  rešitve desne enačbe. Poljubna linearna kombinacija rešitev homogene enačbe je tudi rešitev iste enačbe (preizkusite sami). Če ima desna enačba  $n$  različnih rešitev  $\lambda_{i=1,\dots,n}$  je splošna rešitev homogene enačbe

$$\boxed{y_h(x) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i x}} \quad (1.15)$$

Vrednosti koeficientov  $C_i$  ne narekuje diferencialna enačba in so poljubne. Različni izbori vrednosti  $C_{i=1,\dots,n}$  vodijo do  $n$  različnih linearno neodvisnih rešitev. Primerov, ko je več rešitev  $\lambda_{i=1,\dots,n}$  enakih, pri Fiziki 2 ne bomo obravnavali; obravnavali jih boste pri predmetu Diferencialne enačbe.

- *Partikularna rešitev*  $y_p(x)$  je ena (katerakoli) od rešitev nehomogene enačbe (1.10). Mi jo bomo večinoma določili kar z ugibanjem. Obstaja več možnih rešitev za  $y_p(x)$  (ker obstaja tudi več možnih rešitev za  $y_h(x)$ ), z ugibanjem pa bomo našli najpreprostejšo izmed njih.
- V prejšnjih dveh korakih smo poiskali partikularno in homogeno rešitev, slednja pa vsebuje še proste koeficiente  $C_i$ . Vrednosti  $C_i$  pri fizikalnih problemih določajo začetni ali robni pogoji  $y(x=0)$ ,  $y'(x=0)$ , ... . Pri nihanju bi bili to začetni pogoji  $x(t=0)$ ,  $\dot{x}(t=0)$ , ...
- Preizkusimo naposled še, da je vsota (1.11) je res rešitev enačbe (1.10) saj

$$\begin{aligned} & a_n(x) [y_h^{(n)} + y_p^{(n)}] + \dots + a_1(x) [y_h' + y_p'] + a_0(x) [y_h + y_p] = \\ & = [a_n(x) y_h^{(n)} \dots + a_1(x) y_h' + a_0(x) y_h] + \{a_n(x) y_p^{(n)} \dots + a_1(x) y_p' + a_0(x) y_p\} = 0 + f(x) \end{aligned}$$

kjer izraz  $[..]$  vodi do 0, izraz  $\{..\}$  pa do  $f(x)$ .

V splošnem smo torej nakazali rešitve linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Enačba nihanja (1.2) je zgled take enačbe, ki je tudi homogena. Splošne linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti bodo zadostovale tudi za opis malce drugačnih tipov nihanj (vzbujeno, dušeno in vsiljeno) in tudi gibanja okoli labilnega ravnovesja. Splošne rešitve ne-linearnih enačb ni tako preprosto najti, obravnavali pa jih boste pri matematičnih predmetih.

## 1.4 Harmonično nihanje iz gibalnih enačb s konstantnim členom

Pri vzmetnem nihalu na Sliki 1.6, ki niha navpično, je prisotna tudi konstantna gravitacijska sila. Če za spremenljivko izberemo raztezek vzmeti  $x$  (ki tokrat ne pomeni odmika od ravnovesne lege), dobimo nehomogeno diferencialno enačbo

$$mg - kx = m\ddot{x} \quad \text{ali} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = g, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (1.16)$$

Le-to bomo rešili na dva načina, pri čemer bo drugi način zgled uporabe poglavja 1.3.

- Konstantni člen na desni je prisoten, ker spremenljivka  $x$  ne označuje odmika od ravnovesja in v ravnovesju  $x \neq 0$ . Uvedimo novo spremenljivko  $x_1 = x - x_r$ , ki označuje odmik od ravnovesja. Tu je  $x_r = mg/k$  raztezek v ravnovesju. Enačba za  $x_1$  dobi homogeno obliko  $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$ , njena rešitev je (1.5), torej  $x(t) = \frac{mg}{k} + x_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$ .
- Do enake rešitve pridemo tudi z uporabo splošnih napotkov v poglavju 1.3, kjer  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ . Homogena rešitev  $x_h(t)$  za  $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$  in  $\lambda = \pm i\omega_0$  (1.14) je  $x_h(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$ . Najpreprostejša partikularna rešitev  $\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p = g$  je kar konstantna  $x_p = g/\omega^2 = mg/k$ . Splošna rešitev  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  mora ustrezati tudi fizikalni zahtevi, da je odmik ob vseh časih realen, kar narekuje pogoje na možne vrednosti  $C_{1,2}$ . Splošna rešitev se torej sklada z prej dobljeno  $x(t) = \frac{mg}{k} + A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) = \frac{mg}{k} + x_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$ .

Navpično vzmetno nihalo torej niha okoli ravnovesne lege z enako frekvenco kot isto vodoravno vzmetno nihalo. Vpliv teže le premakne ravnovesje iz raztezka  $x = 0$  k raztezkum  $x = mg/k$ .

**Poskus:** navpično vzmetno nihalo in neodvisnost nihajnega časa od amplitude.

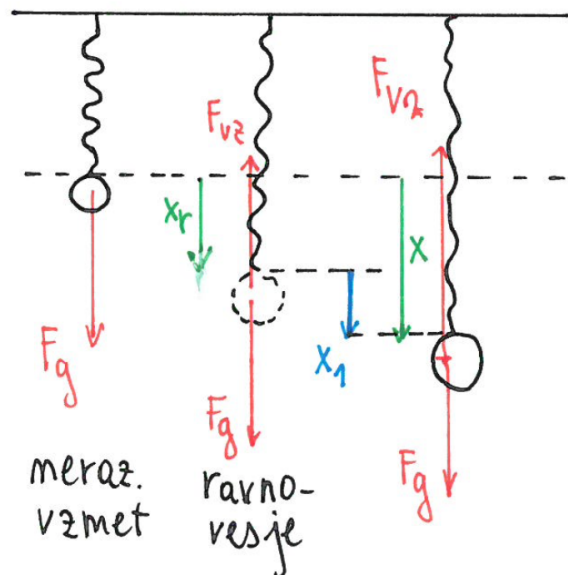
## 1.5 Harmonično nihanje: opis z energijskim zakonom

Pri nekaterih primerih je opis nihanja bolj preprost z energijskim zakonom  $A = \Delta W$ . Ta pristop je uporaben če je delo sil, ki niso upoštevane v potencialni energiji, enako nič:  $A = 0$ . Tedaj se celotna energija  $W$  ohranja:  $W(t) = W(t=0) = konst = C$ . Za primer vodoravnega vzmetnega nihala na Sliki 1.3 se ohranja vsota kinetične in prožnostne energije

$$W(t) = W_k(t) + W_{pr}(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} k x(t)^2 = C. \quad (1.17)$$

Prožnostna in/ali potencialna energija tipično vodita do člena, kjer nastopa spremenljivka v kvadratu, kinetična in/ali rotacijska energija pa do člena kjer je odvod spremenljivke v kvadratu - izkaže se, da to precej splošno velja vsaj za male odmike. V splošnem vsaj za majhna nihanja dobimo torej diferencialno enačno obliko

$$\boxed{D\dot{x}(t)^2 + Bx(t)^2 = C} \quad (1.18)$$



Slika 1.6: Navpično vzmetno nihalo.

kjer so konstantni predfaktorji (označeni z  $B$  in  $D$ ) odvisni od nihala. Rešujemo zopet z nastavkom  $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta)$ , ki ga narekujejo empirične izkušnje in predhodna spoznanja

$$D\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) + Bx_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) = C \quad (1.19)$$

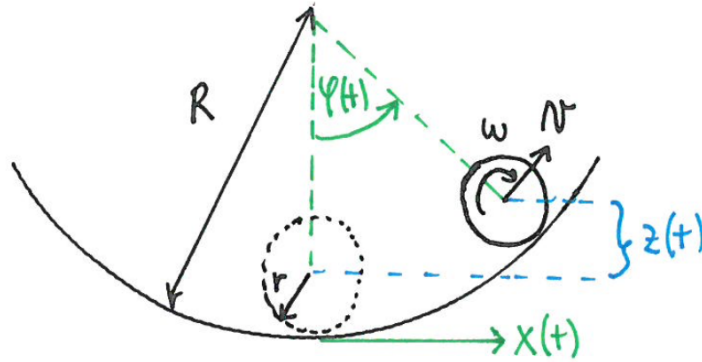
Leva stran vodi do konstante, če sta predfaktorja pred  $\sin^2$  in  $\cos^2$  enaka. To narekuje kako je krožna frekvenca nihanja  $\omega$  odvisna od konstant  $D$  in  $B$ , ki nastopajo v različnih energijskih doprinosih

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta), \quad \omega^2 = \frac{B}{D} \quad (1.20)$$

Obravnavajmo kotaljenje kroglice s polmerom  $r$  na dnu krožne posode s krožnim polmerom  $R$  (Slika 1.7). Koeficient lepenja med kroglico in podlago naj bo tako velik, da kroglica ne spodrsava. Opis z energijskim zakonom je tu morda bolj preprost kot z enačbami gibanja (kjer je potrebno obravnavati gibanje težišča in vrtenje okoli njega ter upoštevati silo lepenja). Energija kroglice se ohranja ker je delo sile lepenja in podlage nanjo enako nič: sila podlage je pravokotna na premik ( $dA_{pod} = \vec{F}_{pod} \cdot \vec{d}s$ ), premika prijemališča pa pri lepenju ni ( $dA_{lep} = 0$ ). Ohranja se vsota kinetične energije težišča ( $W_{kin}$ ), rotacijske ( $W_{rot}$ ) in potencialne ( $W_p$ ) energije

$$A = \Delta W = 0 \quad \rightarrow \quad W(t) = W_{kin}(t) + W_{rot}(t) + W_p(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}J\omega(t)^2 + mgz(t) = C$$

kjer je  $J = 2mr^2/5$  za kroglo okoli težišča. Vse prispevke k energiji izrazimo z eno spremenljivko, ki opisuje lego težišča kroglice: izberemo lahko na primer  $x$  (vodoravni odmik od



Slika 1.7: Kotaljenje kroglice po dni krožne posode.

ravnovesja),  $z$  (navpični odmik od ravnovesja) ali  $\varphi$  (kot prikazan na Sliki 1.7). Izberemo slednjo kjer  $v(t) = (R - r)\dot{\varphi}(t)$ ,  $\omega(t) = v(t)/r$  ker ni spodrsavanja ter  $z(t) = (R - r)(1 - \cos \varphi)$ . Prva dva člena že imata obliko  $\dot{\varphi}^2$  kot v (1.18), tretji  $(1 - \cos \varphi) = 1 - 1 + \varphi^2/2 - O(\varphi^4)$  pa ima kvadratno obliko  $\varphi^2$  (1.18) le za male odmike po razvoju do drugega reda. Za male odmike dobimo

$$W(t) = \frac{1}{2} \frac{7}{5} m (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 + mg(R - r) \frac{1}{2} \varphi^2 = C \quad (1.21)$$

z rešitvijo (1.20)

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \delta) \quad \omega = \sqrt{\frac{B}{D}} = \sqrt{\frac{5g}{7(R - r)}} \quad (1.22)$$

kjer smo odčitali koeficienta  $B = \frac{1}{2} mg(R - r)$  in  $D = \frac{1}{2} \frac{7}{5} m (R - r)^2$  kot prefaktorja v prvem in drugem členu (1.18). Kotaljenje kroglice je za male amplitude torej harmonično nihanje okoli dna posode.

## 1.6 Gibanje v bližini labilne ravnovesne lege

Navpično postavljeno nihalo na Sliki 1.8 je v ravnovesju, saj je vsota sil enaka nič, prav tako tudi vsota navorov. Če pa nihalo zunanja motnja nagne malce stran od navpične lege, bo navor sile teže sistem silil stran od ravnovesja

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_T \times \vec{F}_f = J\vec{\alpha} \\ mgr_T \sin \varphi &= J\ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} - \frac{mgr_T}{J} \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} - \omega_0^2 \varphi = 0} \quad \text{za } \varphi \ll 1, \quad \omega_0^2 = \frac{mgr_T}{J} \quad (1.24)$$



pri čemer smo odklonski kot od navpične lege označili z  $\varphi$ . V drugi enačbi smo zapisali komponente prve enačbe v smeri osi (not), navor deluje v pozitivni smeri te osi, kar botruje negativnemu predznaku v zadnji enačbi. Ta enačba ne vodi ni nihanja, saj se fizično nihalo vedno bolj oddaljuje od labilnega ravnovesja. Enačba (1.24) predstavlja linearno homogeno enačbo z konstantnimi koeficienti, zato jo reši (1.15) z  $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$  (1.14)

$$\varphi(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t} = A \operatorname{sh}(\omega_0 t) + B \operatorname{ch}(\omega_0 t) \quad (1.25)$$

Naj nihalo za začetku miruje ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ ), spustimo pa ga iz dane začetne lege  $\varphi(0)$ : prvi pogoj je izpolnjen če  $A = 0$ , drugi pa potem za  $B = \varphi(0)$ . Naklon se torej oddaljuje od začetne lege kot  $\varphi(t) = \varphi(0) \operatorname{ch}(\omega_0 t)$  kjer ta zveza velja le dokler  $\varphi \ll 1$ . Za večje odmike je potrebno rešiti nelinearno enačbo (1.23).

**Poskus:** Gibanje fizičnega nihala v okolici labilne ravnovesne lege.

## 1.7 Neharmonično nihanje za večje odmike (seminar)

Harmonično nihanje (1.5), kjer je nihajni čas neodvisen od amplitude, pri mnogih nihalih opisuje le razmere pri majhnih odmikih od ravnovesja. Preučimo še primer nihanja za večje odmike, na primer pri matematičnem nihalu. Definirajmo še začetne pogoje: na začetku nihalo odmaknemo do maksimalnega odklona ( $\varphi(0) = -\varphi_0$ ) in ga spustimo iz mirovanja ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ ). Potrebno bi bilo rešiti nelinearno diferencialno enačbo  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$  (1.7) z  $\omega_0^2 = g/l$ , rešitev za  $\varphi(t)$  pa tu ni preprosta. Obravnava z uporabo energijskega zakona bo bolj preprosta. Delo sile vrvice je enako nič, zato se vsota kinetične in potencialne energije uteži ohranja, kjer je hitrost uteži  $v = l\dot{\varphi}$  in sprememba višine  $h = l(1 - \cos \varphi)$

$$W(t) = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = W(0) = mgl(1 - \cos \varphi_0)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}, \quad \sqrt{\frac{2g}{l}} \int dt = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \quad (1.26)$$

V drugi vrstici smo izrazili  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$  in pri tem ugotovili kako je le-ta odvisen od  $\varphi$  in  $\varphi_0$ . Nato smo ločili spremenljivki  $\varphi$  in  $t$ . Integral  $\int_{t=0}^t$  do poljubnega  $t$  na levi, ter  $\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)}$  na desni, bi dal željeno odvisnost naklona  $\varphi$  od časa  $t$ : rezultat z uporabo Wolframove Mathematice je precej zapleten in je izražen z eliptičnimi funkcijami.

Zastavimo preprostejše vprašanje: kako je nihajni čas  $t_0$  odvisen od amplitude nihanja  $\varphi_0$ ? V ta namen bomo integrirali po času polovice nihaja:  $\int_{t=0}^{t_0/2}$  na levi ter  $\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0}$  na desni - to bo vodilo do povezave  $t_0/2$  in  $\varphi_0$ . V najnižjem redu razvoja energije (do reda  $\varphi^2$ ) nihajni čas ni odvisen od amplitude - tu gre za harmonično nihanje, ki smo ga že dodobra spoznali. Nas pa zanima naslednji ne-trivialni popravek k temu - ta zahteva razvoj do reda  $\varphi^4$  zato

pod-integralski izraz Taylorjevo razvijmo do reda  $\varphi^4$  in  $\varphi_0^4$

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos \varphi_0 &\simeq -\frac{1}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2) + \frac{1}{4!}(\varphi^4 - \varphi_0^4) = -\frac{1}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2) \left[ 1 - \frac{1}{12}(\varphi^2 + \varphi_0^2) \right] \\ \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\varphi_0^2 - \varphi^2)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{12}(\varphi^2 + \varphi_0^2)}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\varphi_0^2 - \varphi^2)}} \left( 1 + \frac{1}{24}(\varphi^2 + \varphi_0^2) \right) \end{aligned}$$

Določen integral po  $\varphi$  je v tem redu razvoja analitično izračunljiv (rezultat lahko preprosto preverite z Wolframovo Mathematico) in vodi do

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{l}{2g}} \left( \sqrt{2}\pi + \sqrt{2}\frac{3}{48}\pi\varphi_0^2 \right) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[ 1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + O(\varphi_0^4) \right], \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (1.27)$$

Za majhne kote je vodilni prispevek  $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  neodvisen od amplitude kot nam je znano iz harmoničnega nihanja. Najnižji popravek k temu je sorazmeren z  $\varphi_0^2$  in pove, da se nihajni čas pri večjih amplitudah malce podaljša. Pri amplitudi nihanja  $\varphi_0 = 30^\circ = \pi/6$  je to podaljšanje približno  $\Delta t_0/t_0 = \frac{1}{16}(\frac{\pi}{6})^2 \simeq 0.017$ . Naj še enkrat poudarimo, da je potrebno za točno določitev odvisnosti  $\varphi(t)$  pri poljubno-velikih odmikih analitično izračunati integral (1.26) v mejah do  $\varphi(0)$  do  $\varphi(t)$ .

**Poskus:** Merjenje nihajnega časa matematičnega nihala v odvisnosti od amplitude. Pozor: pri izračunu smo zanemarili silo zračnega upora, ki v poskusu ni zanemarljiva in je tudi odvisna od amplitude nihanja. Zato ne pričakujemo točnega ujemanja med napovedjo in izmerjeno vrednostjo.

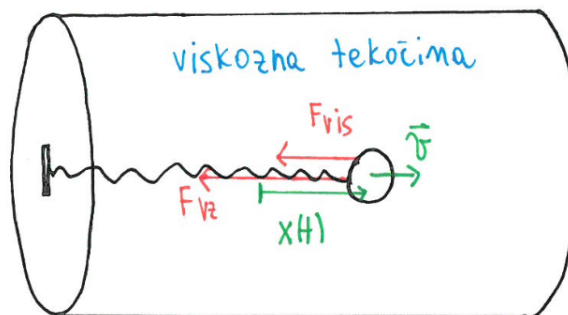
## 1.8 Dušeno nihanje

V makroskopskem svetu so nihanja pogosto dušena zaradi sil upora, ki imajo smer nasprotno od smeri hitrosti. To so sila trenja, zračnega upora, viskozna sila,... Delo teh sil  $dA = \vec{F} \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt < 0$  je negativno in zato energija nihala  $W(t)$  s časom zmanjšuje, nihanje pa večni harmonično in s časom zamira. Sila zračnega upora je na primer sorazmerna z  $v^2$ , viskozna sila pri premikanju po viskozni tekočini (medu, olju, ..) pa z  $v$ , kjer je  $v$  hitrost telesa glede na zrak ali tekočino.

**Poskus:** Nihanje matematičnega nihala zamira zaradi sile zračnega upora. Nihanje navpičnega vzmetnega nihala, ki ga potopimo v viskozno tekočino, zamira zaradi viskozne sile.

V mikroskopskem svetu nihanje običajno ni dušeno: na atom, ki na primer niha v kristalni mreži, ne deluje sila zračnega upora. Zato nihanja v mikroskopskem svetu lahko trajajo v nedogled. V tem je ena od bistvenih razlik med nihanjem v makroskopskem in mikroskopskem svetu.

Obravnavali bomo dušeno nihanje v makroskopskem svetu. Podrobneje si oglejmo primer dušenja zaradi viskozne sile, saj je ta sorazmerna s hitrostjo in vodi do preproste diferencialne enačbe, ki jo znamo rešiti. V vodoravni cevi napolnjeni s precej viskozni oljem je na



Slika 1.8: Dušeno nihanje kroglice, ki je pritrjena na vzmet potopljena v viskozno tekočino.

vzmet pritrjena kroglica (Slika 1.8); zaradi preprostosti si zamišljajmo, da smo v breztežnem prostoru. Kroglico potegnemo in opazujemo dušeno nihanje, ki zamira ker olje na kroglico deluje z viskozno silo, ki ima smer nasprotno od hitrosti. Čeprav pojava viskoznosti morda niste podrobno obravnavali v preteklosti, moramo za pristop k temu problemu vedeti le, da je viskozna sila na predmet  $\vec{F}_{vis} = -A\vec{v}$  sorazmerna s hitrostjo. Konstanta  $A$  je odvisna od viskoznosti ("lepljivosti") tekočine ter od oblike in velikost predmeta, ki se premika po tekočini. Zapišemo gibalno enačbo, to je 2. Newtonov zakon, za gibanje kroglice na katero delujeta sila vzmeti in viskozna sila

$$\begin{aligned} \vec{F}_{vz} + \vec{F}_{vis} &= m\vec{a} & (1.28) \\ -kx - A\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{A}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0}, \quad 2\beta = \frac{A}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} & (1.29) \end{aligned}$$

Uvedli smo novi konstanti  $\omega_0$  in  $\beta$ , da diferencialna enačba dobi preprostejšo obliko. Dušenje se poveča pri večji viskozni sili, oziroma večjem  $\beta$ .

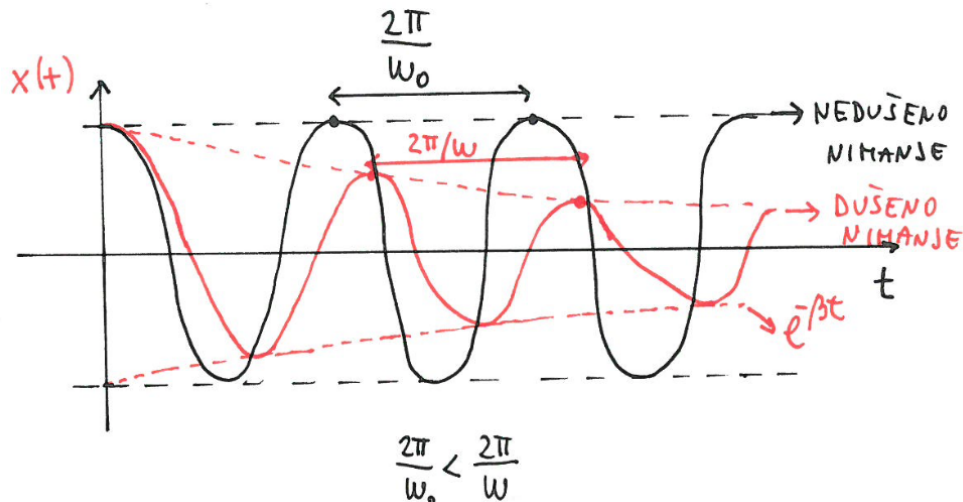
Tudi dušeno nihanje torej vodi do homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti, ki smo se jo naučili reševati v poglavju 1.3. Nastavek  $x(t) = Ce^{\lambda t}$  vodi do enačbe za  $\lambda$  (1.14)

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}[-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}] = -\beta \pm i\omega, \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

- če je sila dušenja razmeroma majhna in zadošča njen koeficient  $\beta < \omega_0$ , je  $\omega$  realen in

$$x(t) = C_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t} [A \sin \omega t + B \cos \omega t] = e^{-\beta t} x_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (1.30)$$

Amplituda nihanja v tem primeru zamira kot  $x_0 e^{-\beta t}$  kar je prikazano na Sliki 1.9a. Podobno se izniha večina nihanj v makroskopskem svetu, kako hitro pada amplituda pa je odvisno od koeficienta  $\beta$ .



Slika 1.9: časovni potek  $x(t)$  dušenega nihanja na Sliki 1.8

- če je dušenje zelo močno,  $\beta > \omega_0$ , je  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i|\omega|$  imaginaren

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{-|\omega|t} + C_2 e^{|\omega|t}),$$

kjer oba člana eksponentno padata ker  $|\omega| < \beta$ . V tem primeru je nihanje tako dušeno, da nihalo ne gre skozi ravnovesno lego in se njegov odmik le manjša proti njej.

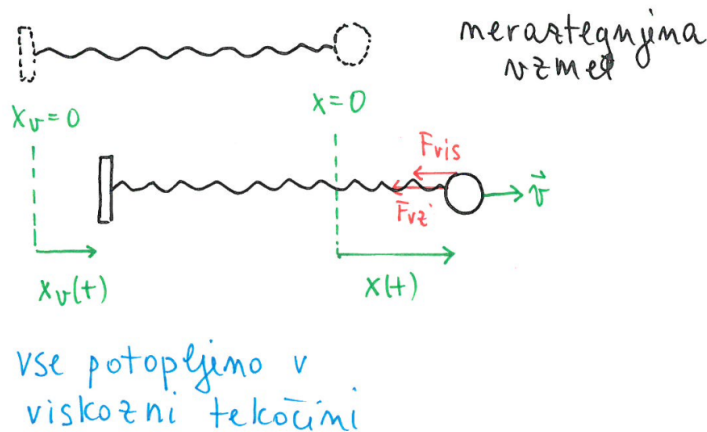
- Pri kritičnem dušenju  $\beta = \omega_0$  ima enačba za  $\lambda$  dve enaki rešitvi. V poglavju 1.3 smo se omejili le na reševanje problemov, kjer so vse rešitve  $\lambda_i$  različne, zato bomo ta primer pustili in se ga boste naučili reševati pri matematičnih predmetih. Čeprav sta obe  $\lambda_i$  enaki se izkaže da homogena enačba tudi tu vodi do dveh linearno neodvisnih rešitev (in dveh prostih koeficientov  $C_{1,2}$ ).

Dušeno nihanje s časom vedno zamre in to drži za večino nihanj v makroskopskem svetu. Pri vseh treh primerih sta v časovni odvisnosti  $x(t)$  dva prosta parametra  $C_1$  in  $C_2$  (oziroma  $x_0$  in  $\delta$ ), ki ju določajo na primer začetni pogoji  $x(0)$  in  $v(0)$ <sup>1</sup>.

## 1.9 Vsiljeno nihanje s harmoničnim vzbujanjem in resonanca

Zmanjševanje amplitude nihanja zaradi dušenja lahko preprečimo z vzbujanjem. Namesto, da drugi konec vzmetnega nihala toga vpnemo, ga primemo v roko in ga premikamo sem ter tja. To vpliva na raztezek vzmeti in s tem na gibanje uteži, ki je na vzmet pripeta.

<sup>1</sup>če bi bila pri kritičnem dušenju le ena linearno-neodvisna rešitev in le en prost parameter, bi bilo v splošnem nemogoče zadostiti obema začetnima pogojema.



Slika 1.10: Vzbujeno nihanje vzmetnega nihala potopljenega v viskozni tekočini.

Vzbujanje dosežemo tudi, če zgornjega konca matematičnega nihala ne vpneto togo temveč ga primemo v roko in premikamo; to prek sile vrvice vpliva na utež, ki je obešena na njej. Če je naše vzbujanje sinusno opazimo, da utež v obeh primerih niha, da je njeno nihanje harmonično (če počakamo določen čas) ter da se amplituda nihanja ne zmanjšuje.

**Poskus:** Vzbujeno nihanje vzmetnega in matematičnega nihala - vzbujanje z roko.

**Poskus:** Harmonično vzbujanje na Sliki 1.10 le, da je gibanje v navpični in ne vodoravni smeri. Vzbuja naprava, kotno hitrost vzbujanja  $\omega_v$  pa lahko spreminjamo. Amplituda vzbujanja  $x_{0v}$  se ne spreminja (ves čas je okoli 2 cm). Ko je frekvenca vzbujanja enaka lastni frekvenci nihanja,  $\omega_v = \omega_0$ , opazimo močno povečano amplitudo nihanja kroglice. Temu pojavu pravimo, da je nihanje v resonanci.

Obravnavajmo zopet primer nihanja vzmetnega nihala. Nihalo niha s krožno frekvenco  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , če je drug konec vzmeti togo vpnet in je dušenje zanemarljivo;  $\omega_0$  imenujemo *lastno frekvenco nihala*. Zdaj isto nihalo potopimo v viskozno tekočino in vzbujamo nihanje (Slika 1.10). Prost konec vzmeti gibljemo, razdalja  $x_v(t)$  od izhodišča do začetka vzmeti pa se spreminja s časom. Zaenkrat imejmo v mislih poljubno časovno odvisnost  $x_v(t)$ , pri čemer index  $v$  označuje vzbujanje. Vzmet je neraztegnjena ko  $x_v = 0$  in  $x = 0$  - to ustreza ravnovesni legi kroglice. Odmik kroglice od lege  $x = 0$  naj opisuje spremenljivka  $x(t)$ . Dušenja pri tem problemu ne smemo zanemariti, saj se bo izkazalo, da amplituda nedušenega nihanja kroglice naraste preko vseh mej ob harmoničnem vzbujanju s kotno hitrostjo  $\omega_0$ . Zato upoštevamo dušenje, pa naj bo to še tako majhno. Enačba gibanja je enaka kot pri prejšnjem problemu (1.28), le da je raztezek vzmeti zdaj  $x(t) - x_v(t)$  odvisen tudi od vzbujanja

$$\begin{aligned} \vec{F}_{vz} + \vec{F}_{vis} &= m\vec{a} \\ -k(x(t) - x_v(t)) - A\dot{x} &= m\ddot{x} \\ \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_v(t)}, \quad 2\beta = \frac{A}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Enačba za lego kroglice  $x(t)$  se od ne-vzbujenega dušenega nihanja razlikuje le po členu na desni strani enačbe, ki je bil v (1.28) enak nič. Rešitev homogene enačbe (1.31) je

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad x_h(t) = C_h e^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta_h), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0 \quad (1.32)$$

kjer smo homogeno enačbo rešili že pri ne-vzbujenem dušenem nihanju. Zapisali smo jo za primer šibkega dušenja  $\beta < \omega_0$  (1.30) ker nas ta primer še posebej zanima. Parametra  $c_h$  in  $\delta_h$  smo označili z indeksom  $h$ , ki označuje, da gre za proste parametre homogene rešitve, določali pa ju bodo začetni pogoji. Pomembno je spoznanje, da je po določenem času homogeno rešitev zaradi dušenja zanemarljiva - tedaj vzbujeno nihanje opisuje zgolj partikularna rešitev.

Da bi določili partikularno rešitev, moramo izbrati način vzbujanja: praktično je še posebej zanimivo harmonično vzbujanje

$$\boxed{\ddot{x}_p + 2\beta\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \omega_0^2 x_{v0} \cos(\omega_v t)} \quad \text{za} \quad x_v(t) = x_{v0} \cos(\omega_v t) \quad (1.33)$$

kjer konec vzmeti niha z določeno kotno hitrostjo  $\omega_v$  in amplitudo  $x_{v0}$ . Pri opazovanem poskusu lahko izberemo poljubno  $\omega_v$  na določenem frekvenčnem območju, amplituda  $x_{v0}$  pa je fiksna. Splošnega napotka za reševanje partikularne enačbe v poglavju 1.3 nismo navedli - omenili smo le, da z nastavkom poskušamo najti eno (katerokoli) partikularno rešitev. Če pa so koeficienti konstantni in je desna stran v (1.10) harmonična ( $f(t) \propto \sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$ ,  $e^{i\omega t}$ ), potem je splošen napotek za iskanje  $x_p(t)$  v (1.33) naslednji:

1. Zapiši ustrezno kompleksno diferencialno enačbo

$$\ddot{z}_p + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z_p = \omega_0^2 x_{v0} e^{i\omega_v t} \quad (1.34)$$

kjer je  $z_p(t)$  zdaj neznan kompleksna funkcija, desna stran pa je kompleksna posplošitev, ki preide v desno stran izhodiščne enačbe (1.33) če vzamemo realen ali imaginarni del: v našem primeru je realni del (1.34) enak (1.33), ker v vzbujanju nastopa kosinus. Rešitev za  $z_p(t)$  nam bo pomagala do realne rešitve za  $x_p(t)$ . Nastavek za reševanje splošne enačbe

$$\boxed{a_n z_p^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{z}_p(t) + a_0 z_p(t) = C_p e^{i\omega_v t}} \quad \text{nastavek:} \quad \boxed{z_p(t) = z_{p0} e^{i\omega_v t}} \quad (1.35)$$

ima enako časovno odvisnost kot nehomogeni člen in kompleksni predfaktor  $z_{p0}$ . Preverimo, da ta nastavek reši splošno enačbo

$$z_{p0} e^{i\omega_v t} [a_n (i\omega_v)^n + \dots + a_1 (i\omega_v) + a_0] = C_p e^{i\omega_v t}$$

$$\boxed{z_{p0} \sum_{j=0}^n a_j (i\omega_v)^j = C_p} \quad (1.36)$$

in pri tem določi vrednost  $z_{p0}$ . Pri vzbujenem nihanju torej nastopa v nastavku  $z_p(t) = z_{p0}e^{i\omega_v t}$  kotna hitrost vzbujanja, kompleksen prefaktor  $z_{p0}$  pa je po (1.39) enak

$$z_{p0}[-\omega_v^2 + 2i\beta\omega_v + \omega_0^2] = \omega_0^2 x_{v0}$$

$$z_{p0} = \frac{\omega_0^2 x_{v0}}{-\omega_v^2 + 2i\beta\omega_v + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 x_{v0}(-\omega_v^2 - 2i\beta\omega_v + \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + (2\beta\omega_v)^2} = x_0 e^{i\delta} \quad (1.37)$$

$$\boxed{x_0 = x_{v0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + (2\beta\omega_v)^2}}}, \quad \boxed{\tan \delta = \frac{-2\beta\omega_v}{\omega_0^2 - \omega_v^2}} = \frac{Im z_{p0}}{Re z_{p0}} \quad (1.38)$$

kjer smo  $z_{p0}$  razdelili na absolutno vrednost  $x_0$  in fazni faktor  $e^{i\delta}$  z velikostjo ena. Dobili smo torej partikularno rešitev kompleksne enačbe (1.34)

$$z_p(t) = x_0 e^{i\delta} e^{i\omega_v t} = x_0 e^{i(\omega_v t + \delta)} \quad (1.39)$$

2. Dobljena rešitev  $z_p(t)$  je povezana z iskano partikularno rešitvijo  $x_p(t)$  preprosto:

$$x_p(t) = Re[z_p(t)] = x_0 \cos(\omega_v t + \delta) \quad (1.40)$$

To pokažemo tako, da vzamemo realni del celotne enačbe (1.34)

$$Re[\ddot{z}_p] + 2\beta Re[\dot{z}_p] + \omega_0^2 Re[z_p] = \omega_0^2 x_{v0} \cos \omega_v t \quad (1.41)$$

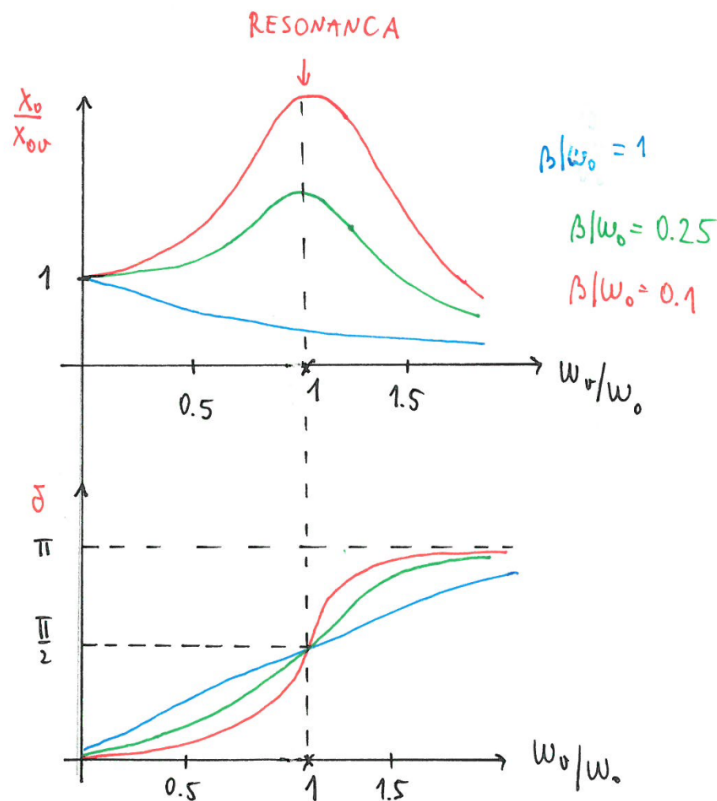
in uporabimo  $Re[z_p^{(n)}] = [Re(z_p)]^{(n)} = x_p^{(n)}$ , ki velja za  $z_p$  oblike (1.39) saj  $Re[(i\omega_v)^n e^{i(\omega_v t + \delta)}] = \cos(\omega_v t + \delta)^{(n)}$ .

Končno lego kroglice  $x(t)$  torej opisuje (1.32,1.40)

$$\boxed{x(t) = C_h e^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta_h) + x_0 \cos(\omega_v t + \delta)}, \quad \boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \cos(\omega_v t + \delta)} \quad (1.42)$$

kjer sta amplituda  $x_0$  in fazna razlika  $\delta$  točno določeni z danimi  $\omega_0$ ,  $\omega_v$ ,  $x_{v0}$  in  $\beta$  (1.38). Prosta parametra  $C_h$  in  $\delta_h$  določajo začetni pogoji, na primer  $x(0)$  in  $\dot{x}(0)$ . Gibanje kroglice je sprva zelo komplicirano in je odvisno od začetne lege in hitrosti kroglice. Po daljšem času prvi člen, ki je sorazmeren z  $e^{-\beta t}$ , zamre. Tedaj je gibanje kroglice preprosto: harmonično z enako krožno hitrostjo kot je krožna hitrost vzbujanja  $\omega_v$ . Amplituda tega nihanja  $x_0$  (1.38) je močno odvisna od frekvence vzbujanja  $\omega_0$  in je največja pri vzbujanju z lastno frekvenco:  $\omega_v = \omega_0$  - pravimo, da tedaj vzbujeno nihanje doseže resonanco. Odvisnosti amplitude nihanja nihala  $x_0$  od frekvence vzbujanja  $\omega_v$  pravimo resonančna odvisnost in je prikazana na Sliki 1.11. Če bi zanemarili dušenje, bi bila amplituda v resonanci neskončna. Fazna razlika  $\delta$  (1.38) med nihanjem kroglice in vzbujanjem je majhna za male  $\omega_v$ , v resonanci doseže  $\delta = \pi/2$ , pri velikih frekvencah vzbujanja pa sta nihanje kroglice in vzbujanje v proti fazi in je  $\delta = \pi$ .

Če vzbujamo z lastno frekvenco je torej amplituda nihanja največja. Lastno frekvenco nihala empirično poiščemo tako, da nihalo zanihamo in poskrbimo za zanemarljivo dušenje:



Slika 1.11: Resonančne krivulje:  $x_0/x_{0v}$  in  $\delta$  v odvisnosti od  $\omega_v/\omega_0$ .

tedaj nihalo niha z lastno frekvenco  $\omega_0$ . Včasih se želimo pojavu resonance izogniti, na primer v gradbeništvu pri gradnji mostov in stavb. Poskrbeti moramo, da se lastne frekvence objektov ( $\omega_0$ ) dovolj razlikujejo od frekvenc tipičnih potresnih valov ( $\omega_v$ ). S tem preprečimo, da se nihanje objektov ob vzbujanju s potresnimi valovi resonančno ojači. Včasih pa si seveda želimo doseči nihanje s čim večjo amplitudo, na primer z izbiro oblike kitare in drugih instrumentov. Tu naj bo amplituda zvočnega nihanja, ki ga vzbujajo strune s frekvenco  $\omega_v$ , čim večja. Tudi na gugalnici otroci z nogami vzbujajo gugalnje: največjo amplitudo dosežejo, ko je vzbujajo z lastno frekvenco nihala, ki ga sestavljajo skupaj z gugalnico. Naj še enkrat povzamemo, da smo v pričujočem razdelku obravnavali primer, ko je vzbujanje periodično v času.

## 1.10 Vzbujeno nihanje s splošnim vzbujanjem in s kratkotrajnim sunkom

Obravnavajmo vzbujeno nihanje iz prejšnjega podpoglavja bolj splošno in skušajmo priti do rešitve tudi za splošno vzbujanje, tokrat pa predpostavimo zanemarljivo dušenje. V

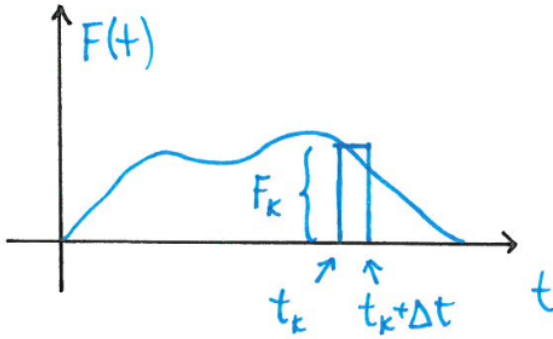


mislih bomo zaradi preprostosti zopet imeli vodoravno vzmetno nihalo, na utež pa naj deluje dodatna sila z znano časovno odvisnostjo  $F(t)$ :

$$-kx + F(t) = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}} \quad x(0) = \dot{x}(0) = F(0) = 0 \quad (1.43)$$

Določimo še začetne pogoje: nihalo pri  $t \leq 0$  miruje v ravnovesni legi. Sila vzbujanja je lahko posledica marsičesa: udarca na utež s kladivom, električne sile za primer nabite klade v električnem polju, lahko pa je tudi posledica odmikov  $x_v(t)$  prostega konca vzmeti iz prejšnjega poglavja (tedaj  $F(t) = kx_v(t)$ ). Poseben primer obravnavanega splošnega vzbujanja je bilo torej harmonično gibanje prostega konca nihala.

K reševanju problema pristopimo tako, da silo  $F(t)$  sestavimo iz mnogo kratkotrajnih sunkov: sila  $F_k = F(t_k)$ , na primer, deluje v kratkotrajnem časovnem intervalu  $[t_k, t_{k+1} = t_k + \Delta t]$  in je tedaj približno konstantna:



S tem v mislih postopajmo od najlažjega problema z enim samim sunkom (a), preko primera z dvema sunkoma (b) do povsem splošnega primera sile  $F(t)$  (c).

- (a) Določimo nihanje v primeru enega samega sunka z silo  $F_k$  ob času  $t_k$ , ki traja čas  $\Delta t$ : dobljeno časovno odvisnost odmika od ravnovesja imenujemo  $x_k(t)$  (Slika 1.12a):

$$\begin{aligned} x_k(t) &= t < t_k & : 0 \\ t &\geq t_k & : x_{0k} \sin(\omega_0(t - t_k)) = \frac{F_k \Delta t}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_k)) \end{aligned} \quad (1.44)$$

Nihanje je za  $t > t_k$  je kar harmonično z lastno frekvenco  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , saj tedaj ni prisotna nobena dodatna sila. Fazo (oziroma sinus) narekuje dejstvo, da je nihalo pred sunkom v ravnovesni legi, amplitudo pa izrek o gibalni količini  $F_k \Delta t = mv(t_k) = mx_{0k} \omega_0$  kjer  $v(t) = \dot{x}(t) = x_{0k} \omega_0 \cos(\omega_0(t - t_k))$ . Izraz kompaktno zapišemo

$$x_k(t) = \frac{F_k \Delta t}{m\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_k)) \theta(t - t_k) \quad (1.45)$$

z uporabo funkcije  $\theta(t - t_0)$ , ki je definirana kot  $\theta(t > t_0) = 1$  in  $\theta(t < t_0) = 0$ .

- (b) Napravimo zdaj dva kratkotrajna sunka dolžine  $\Delta t$ :  $F_1$  ob  $t_1$  in  $F_2$  ob  $t_2$  (Slika 1.12b). Če bi napravili le sunek 1, bi bil odmik  $x_1(t)$  podan z (1.45); če bi napravili le sunek 2 bi bil odmik  $x_2(t)$ . K odmiku za primer dveh sunkov nam pomaga dejstvo, da je enačba za odmik (1.43) linearna v  $x$  in njegovih odvodih in je rešitev za  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$  kar vsota  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) &= \frac{F_1(t) + F_2(t)}{m} \\ \left[ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{F_1(t)}{m} \right] + \left[ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{F_2(t)}{m} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Oba člena v oglatih oklepajih sta namreč enaka nič, ker sta  $x_{k=1,2}(t)$  rešitvi enačbe  $\ddot{x}_k + \omega_0^2 x_k - \frac{F_k(t)}{m} = 0$ . Odmik je torej vsota dveh rešitev (1.45) :

$$x(t) = \frac{F_1 \Delta t}{m \omega_0} \sin(\omega_0(t - t_1)) \theta(t - t_1) + \frac{F_2 \Delta t}{m \omega_0} \sin(\omega_0(t - t_2)) \theta(t - t_2) \quad (1.47)$$

njegova časovna odvisnost pa je prikazana na Sliki 1.12b za primer ko je prvi sunek večji od drugega.

- (c) Končno preidemo na vzburjanje s splošno silo  $F(t)$  sestavljeno iz kratkotrajnih sunkov  $F_k$  med  $t_k$  in  $t_k + \Delta t$ . Vsak sunek  $F_k$  zase bi povzročil odmik  $x_k(t)$  (1.45), dejanski odmik za silo  $F(t) = \sum_k F_k(t)$  pa je  $x(t) = \sum x_k(t)$  po analogiji iz prejšnjega primera z dvema sunkoma

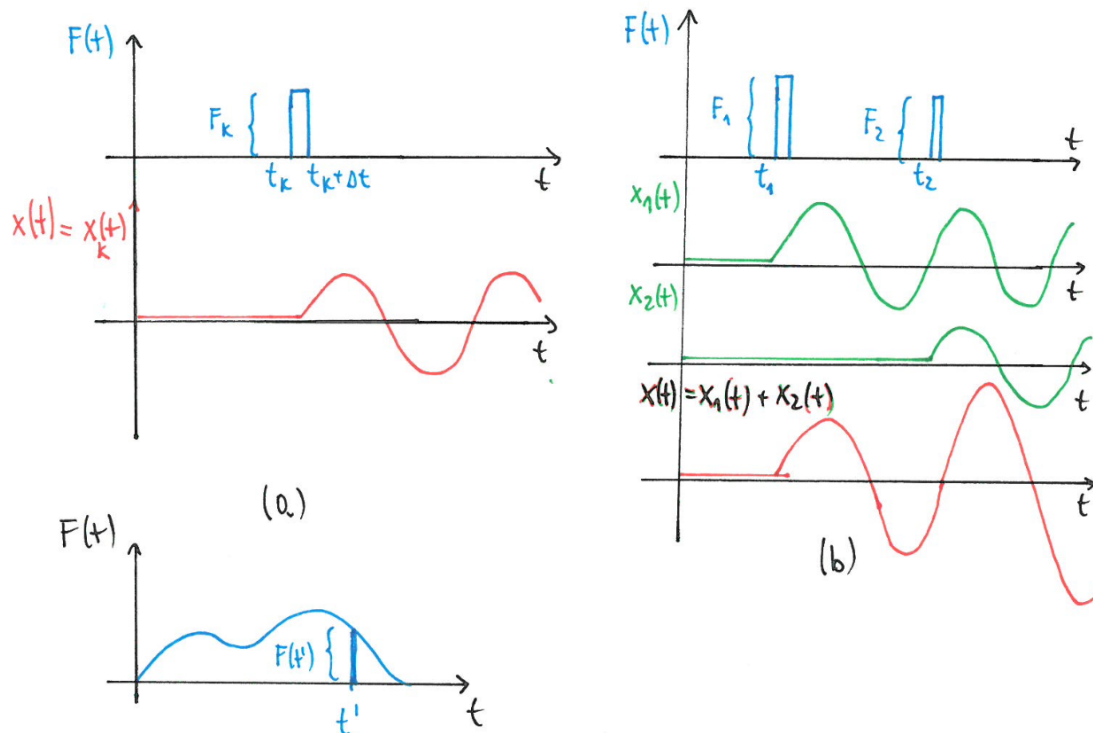
$$x(t) = \sum_k x_k(t) = \sum_k \frac{F_k \Delta t}{m \omega_0} \sin(\omega_0(t - t_k)) \theta(t - t_k) \rightarrow \int_0^\infty \frac{F(t') dt'}{m \omega_0} \sin(\omega_0(t - t')) \theta(t - t')$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(t') dt'}{m \omega_0} \sin(\omega_0(t - t')) \quad (1.48)$$

Tu smo čas posameznega sunka  $\Delta t \rightarrow dt'$  limitirali proti nič, diskretno spremenljivko  $t_k$  pa preimenovali v zvezno spremenljivko  $t'$ . Integral do  $t' = \infty$  se poenostavi v integral do  $t$  ob upoštevanju  $\theta(t < t') = 0$ . Odmik  $x(t)$  je očitno odvisen le od vrednosti sile vzburjanja pred časom  $t$ . Sunki po času  $t$  pa na odmik  $x(t)$  ne vplivajo - to je v skladu z splošnim načelom kavzalnosti: prihodnji dogodki na trenutne ne vplivajo. Izraz (1.48) podaja odmik nihala, ki ima lastno frekvenco  $\omega_0$ , za poljubno časovno-odvisno silo vzburjanja  $F(t)$ .

(\*\*) Dodatek: V matematičnem jeziku bi rekli, da smo nehomogeno diferencialno enačbo z nehomogenim členom  $f(t) = \frac{F(t)}{m}$  rešili s pomočjo Greenovih funkcij. Najprej smo rešili željeno diferencialni enačbo (1.45) za primer, ko  $f(t)$  predstavlja kratkotrajen skok pri  $t = t_k$  <sup>(2)</sup>: taka rešitev  $x_k(t)$  se imenuje Greenova funkcija diferencialne enačbe. Iz Greenovih funkcij za različne  $t_k$  lahko z superpozicijo sestavimo rešitev za poljubno funkcijo  $f(t)$ . S preprostim zgledom vzburjenega nihanja smo si torej ogledali primer uporabe Greenovih funkcij.

<sup>2</sup>Matematično bi rekli, da je tedaj  $f(t) \propto \delta(t - t_k)$ , kjer je  $\delta(t - t_k)$  funkcija, ki ima vrednost nič povsod razen v  $t_k$ .



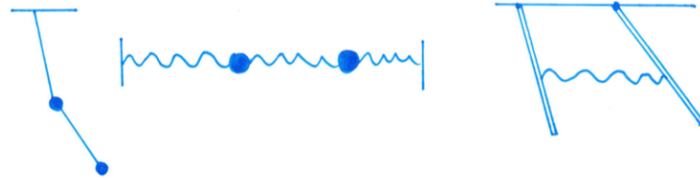
Slika 1.12: Vzbujeno nihanje, ki ga vzbuja dodatna sila: en sunek (a), dva sunka (b), splošna sila  $F(t)$  (c).

## 1.11 Dve sklopljeni nihali

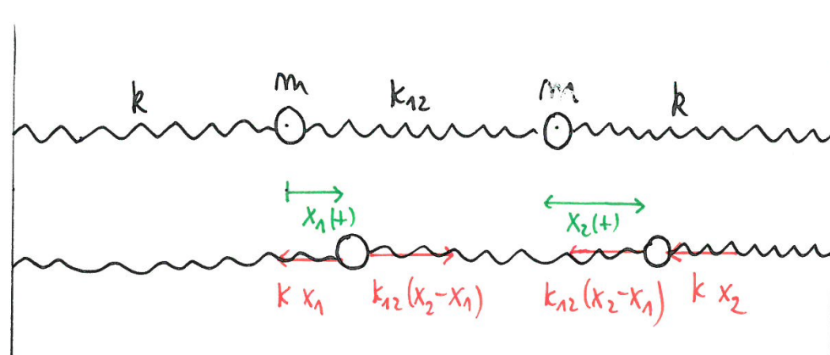
Sklopljena nihala vplivajo druga na drugo - primeri dveh sklopljenih nihali so prikazani na Sliki 1.13. Odmik prvega vpliva preko sile ali navora na odmik drugega nihala. Sklopljeno nihanje dveh ali več nihali matematično prevede do problema lastnih vrednosti in lastnih vektorjev - to predstavlja dodatno motivacijo za obravnavo tega matematičnega orodja na praktičnem zgledu.

Podrobneje obravnavajmo dve enaki<sup>3</sup> vzmetni nihali s koeficientoma  $k$ , ki sta sklopljeni preko šibkejše vzmeti  $k_{12} < k$ . Njuno gibanje je v splošnem precej zapleteno: leva utež se ne giblje harmonično (sinusno nihanje z dano frekvenco in amplitudo), razen v dveh posebnih primerih ko nihalo zanihamo na prav poseben način; podobno velja za desno utež. Zapišimo gibalne enačbe in jih poskusimo rešiti. V ravnovesni legi na Sliki 1.14 zgoraj naj bodo vzmeti neraztegnjene. Spodaj je stanje sistema v poljubnem trenutku  $t$ , ko sta trenutna odmika od ravnovesja  $x_1(t)$  in  $x_2(t)$ . Zapišemo 2. Newtonov zakon za vsako od uteži posebej: pospešek

<sup>3</sup>Enako pot do reševanja bi ubrali lahko tudi pri dveh različnih nihalih, le da bi bile končne zveze za odmike malce daljše.



Slika 1.13: Primeri dveh sklopljenih nihali: dve vzmetni ali fizični nihali lahko vplivata druga na drugo prek vzmeti. Dve matematični vzajemno vplivata, če je spodnje pritrjeno na zgornje.



Slika 1.14: Sklopljeni vzmetni nihali.

prve je odvisen od odmika  $x_1$  in tudi od odmika  $x_2$ :

$$\begin{aligned} -kx_1 + k_{12}(x_2 - x_1) &= m\ddot{x}_1 \\ -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1) &= m\ddot{x}_2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

Na Sliki so prikazane smeri sil za  $x_2 > x_1 > 0$  in na podlagi teh je preprosto zapisati smeri sil v enačbah. Vendar enačbe veljajo za poljubne  $x_1$  in  $x_2$  <sup>(4)</sup>. Enačbi (1.49) sta sklopljeni linearni homogeni diferencialni enačbi s konstantnimi koeficienti: v sklopljenih enačbah ista spremenljivka nastopa v več enačbah hkrati. Ker so enačbe homogene, je linearna kombinacija rešitev za nihanje tudi rešitev.

Poskusimo najti najprej rešitvi, kjer obe uteži nihata harmonično. S poskusom ju brez težav najdemo: obe uteži enako odmaknemo v isto ali nasprotno smer in spustimo - imenujemo ju *lastni nihanji*. Poljubna linearna kombinacija obeh načinov vodi do bolj zapletenega gibanja, ki ni harmonično - temu se bomo posveteili potem ko najdemo lastna nihanja.

<sup>4</sup>če bi bil na primer  $x_1 > 0$  in  $x_2 < 0$  (glede na osi prikazane na zgornji Sliki), bi bila srednja vzmet skrčena, izraz  $k_{12}(x_2 - x_1)$  pa bi imel drug predznak.

### 1.11.1 Iskanje lastnih nihanj

1. Brez zanašanja na fizikalno intuicijo, bi matematično poiskali rešitev sklopljenega sistema homogenih linearnih diferencialnih enačb (1.49) z nastavkom (1.13)

$$\boxed{x_j(t) = C_j e^{\alpha t}} \quad (1.50)$$

Enačbi rešimo namreč le, če je eksponentna odvisnost  $\alpha$  pri obeh nihalih enaka (v eksponentu nismo uporabili oznake  $\lambda$  (1.13) ker le-to v tem razdelku prihranimo za lastne vrednosti). Ko zgornji nastavek vstavimo v (1.49), se časovno-odvisni člen  $e^{\alpha t}$  pokrajša - kar pomeni, da je nastavek rešil sistem diferencialnih enačb. Ostane sistem navadnih enačb za kompleksna števila  $(C_1, C_2)$

$$\begin{aligned} -kC_1 + k_{12}(C_2 - C_1) &= m\alpha^2 C_1 \\ -kC_2 - k_{12}(C_2 - C_1) &= m\alpha^2 C_2 \end{aligned}$$

ki vodi do kompleksnih rešitev za  $\alpha$ . Vendar se bomo istih diferencialnih enačb raje lotili z bolj intuitivnim fizikalnim nastavkom.

2. Da bomo bližje opaženi fizikalni sliki obeh lastnih nihanj, se lotimo (1.49) raje z realnim nastavkom

$$\boxed{x_j(t) = A_j \cos(\omega t + \delta)} \quad (1.51)$$

kjer ima  $\omega$  že takoj pomen lastnih krožnih frekvenc za vsako utež,  $A_j$  pa sta realni amplitudi, ki imata lahko poljubne predznake. Naj omenimo, da je tak nastavek uporaben za dve sklopljeni nihali, če pa je sklopljenih več nihali, moramo za vsako dopustiti še poljubno fazo  $x_j(t) = A_j \cos(\omega t + \delta_j)$ : tedaj je bolj prikladen splošnejši nastavek (1.50), splošen problem  $N$  sklopljenih nihali pa bomo obravnavali v posebnem poglavju pri valovanju. Za primer dveh sklopljenih nihali nastavek (1.51) vstavimo v (1.49), časovno-odvisni del  $\cos(\omega t + \delta)$  se pokrajša kar pomeni, da nastavek res reši enačbi. Ostane sistem navadnih enačb

$$\begin{aligned} -kA_1 + k_{12}(A_2 - A_1) &= -m\omega^2 A_1 \\ -kA_2 - k_{12}(A_2 - A_1) &= -m\omega^2 A_2 \end{aligned} \quad (1.52)$$

Enači (1.52) predstavljata sistem dveh homogenih enačb za  $(A_1, A_2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

kar vodi do ne-ničelne rešitve za  $(A_1, A_2)$ , če je determinanta matrike na levi enaka nič

$$\left( \frac{k+k_{12}}{m} - \omega^2 \right)^2 - \left( \frac{k_{12}}{m} \right)^2 = 0$$

To je kvadratna enačba za  $\omega^2$  in ima dve rešitvi

$$\omega_I^2 = \omega_0^2, \quad \omega_{II}^2 = \omega_0^2 + 2\frac{k_{12}}{m} \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad (1.54)$$

kjer smo z  $\omega_0$  označili lastni krožni frekvenci nemotenih nihali, ki sta v našem primeru enaki.

Prvo lastno nihanje dobimo ko vstavimo  $\omega_I^2$  v sistem (1.53)

$$\omega_I = \omega_0 \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^I = A^I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A^I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_I t + \delta_I) \quad (1.55)$$

kjer sta amplituda  $A^I$  in faza  $\delta_I$  poljubni. Odmika obeh nihali sta enaka in v isto smer, srednja vzmet je zato neraztegnjena in sploh ne vpliva na nihali. Ti nihata z istim nihajnim časom, kot da ne bi bili sklopljeni.

Drugo lastno nihanje sledi iz sistema (1.53), ko vstavimo  $\omega_{II}^2$

$$\omega = \omega_{II} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{II} = A^{II} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A^{II} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{II} t + \delta_{II}) \quad (1.56)$$

Odmika nihali sta po velikosti enaka vendar v nasprotnih smereh. Ko gre leva utež na levo gre desna na desno, in obratno. Srednja vzmet se pri tem širi in krči ter s tem povzroča večjo frekvenco  $\omega_{II} > \omega_I = \omega_0$ .

Zdaj poznamo dve lastni nihanji za sklopljeni nihali na Sliki 1.14: pri teh dveh nihanjih obe nihali nihata harmonično.

### 1.11.2 Linearne kombinacije lastnih nihanj, ki vodi do utripanja

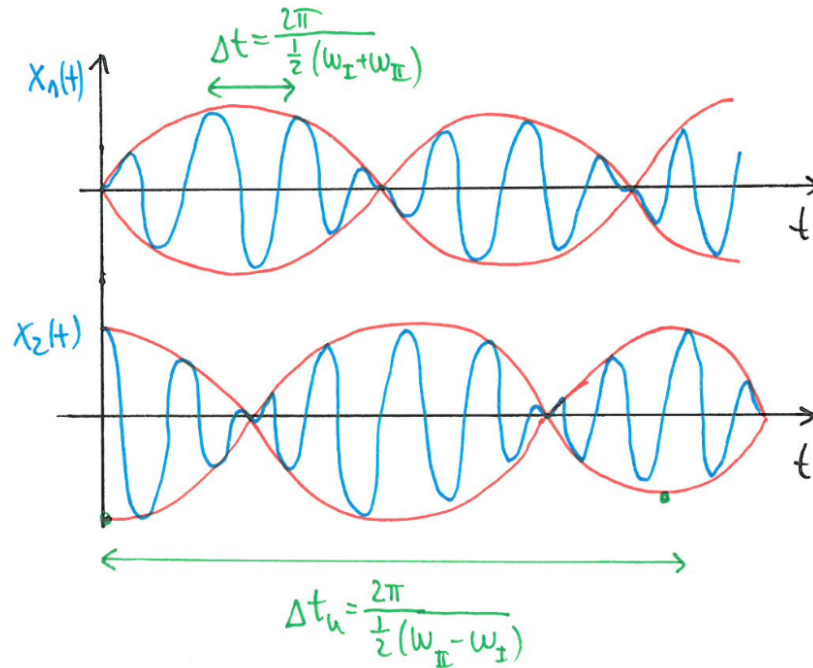
Splošno gibanje je poljubna linearna kombinacij obeh lastnih nihanj

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A^I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_I t + \delta_I) + A^{II} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{II} t + \delta_{II})} \quad (1.57)$$

ker je sistem enačb (1.49) homogen. To lahko preprosto preverite tako, da vanj vstavite vsoto dveh rešitev in ugotovite, da tudi ta predstavlja rešitev. Linearna kombinacija (1.57) ni več harmonično nihanje saj imata člena različni krožni frekvenci  $\omega_I$  in  $\omega_{II}$ : vsota takih kosinusov nima več kosinusne ali sinusne odvisnosti. Gibanje uteži kot določa (1.57) je lahko v splošnem precej zapleteno gibanje.

Preučimo poseben primer, ki vodi do tako-imenovanega *utripanja*. Pri njem se amplituda prvega nihala najprej večja in potem manjša, pri drugem nihalu pa je ravno obratno (Slika 1.15). Do takega gibanja pridemo, če na primer prvo nihalo ob začetku držimo v ravnovesni legi, drugo pa odmaknemo in spustimo:

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = x_0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (1.58)$$



Slika 1.15: Odmiki dveh sklopljenih nihal pri utripanju.

če te pogoje uporabimo za (1.57), dobimo štiri enačbe za štiri neznanke:  $A_{I,II}$  in  $\delta_{I,II}$ . To lahko v splošnem predstavlja nadležen sistem in tu brez izpeljave podamo rešitev:

$$A_I = -A_{II} = \frac{x_0}{2} \quad \delta_I = \delta_{II} = 0 .$$

Brez težav pa lahko preverite, da taka izbira v (1.57) izpolnjuje izbrane začetne pogoje (1.58) pri utripanju. Iz (1.57) sledijo končne zveze za odmike

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{x_0}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_I t) - \cos(\omega_{II} t) \\ \cos(\omega_I t) + \cos(\omega_{II} t) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} \sin(\frac{1}{2}(\omega_I + \omega_{II})t) \sin(\frac{1}{2}(\omega_{II} - \omega_I)t) \\ \cos(\frac{1}{2}(\omega_I + \omega_{II})t) \cos(\frac{1}{2}(\omega_{II} - \omega_I)t) \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

kar je prikazano na Sliki 1.15. Če je sklopitev  $k_{12} \ll k$  šibka, je  $\frac{1}{2}(\omega_I + \omega_{II}) \gg \omega_{II} - \omega_I$  in se nihanju s krožno frekvenco  $\frac{1}{2}(\omega_I + \omega_{II})$  amplituda počasi spreminja kot določa črtkana envelope s krožno frekvenco  $\omega_{II} - \omega_I$ . Ko je amplituda enega največja je amplituda drugega najmanjša.

Poiskali smo torej časovno odvisnost gibanja vsakega od nihala, ki vplivata druga na drugo preko vzajemne sile. Dobljena časovna odvisnost v splošnem ni harmonična, torej ne gre za kosinusno nihanje z dano frekvenco in amplitudo. To nazorno prikazuje primer utripanja na Sliki 1.15. Le v posebnih primerih obe nihali nihata harmonično - to so lastna nihanja sklopljenega sistema.

### 1.11.3 $N$ sklopljenih nihali

Enačbe gibanja tu predstavljajo sistem  $N$  sklopljenih linearnih homogenih diferencialnih enačb za  $x_i(t)$ , ki predstavljajo odmik  $i$ -tega nihala. Te vodijo do  $N$  lastnih nihanj: pri teh vsa nihala nihajo harmonično z enako frekvenco, le faze odmikov med nihali se razlikujejo. Splošna rešitev je linearna kombinacija lastnih nihanj. Če je sklopljenih nihali veliko, gre pravzaprav za mehansko valovanje, zato bomo ta primer obravnavali v naslednjem poglavju pro valovanjih.



## 2. Mehansko valovanje

### 2.1 Splošen opis valovanja

Preden se posvetimo podrobnejšemu opisu valovanja si pogledjmo nekaj primerov s poskusi.

**Poskus:** *valovanje na viseči vodoravni vzmeti:* na enem koncu vzmeti s kratkim sunkom v vodoravni smeri napravimo zgoščino v vzmeti. Zgoščina potuje po vzmeti in se kmalu približa drugemu koncu vzmeti.

**Poskus:** *valovanje na vrvi:* dolga vodoravna vrv je napeta med dvema koncema, en konec pa zelo na kratko zazibljemo z roko gor in dol. Odmiku vrvi od ravnovesne vodoravne lege pravimo motnja. Motnja potuje od enega konca vrvi do drugega. Čez kratek čas se bo motnja (odmik od vodoravne lege) približala drugemu koncu vrvi. Potovanje motnje so povzročile sile oziroma napetosti v vrvi. Če pa prvi konec vrvi harmonično nihamo, nihajo harmonično tudi drugi koščki vrvi.

**Poskusa:** *valovanje na vodni gladini in strižno valovanje.*

**Poskus:** *Zvočno valovanje* potuje med dvema opnoma: s kladivcem udarimo na eno opno, na drugi opni pa za zaznamo njen premik (preko kroglice, ki zaradi premika odskoči). Pri zvočnem valovanju se v zraku tvorijo zgoščine in razredčine - v zraku se spreminjata gostota in tlak. Udarec ob prvo opno povzroči zgoščino, ta potuje do druge opne in zaradi povečanega tlaka premakne drugo opno.

Valovanje delimo na mehansko valovanje, ki ga bomo obravnavali v tem poglavju, in elektromagnetno valovanje, ki ga bomo obravnavali v poglavju 5:

#### 1. Mehansko valovanje:

- Primeri: valovanje po vrvi, struni, vodni gladini, vzmeti; zvočno valovanje v zraku, kapljevini in trdnini; večje število sklopljenih nihal
- mehansko valovanje lahko potuje le po sredstvu (vrvi, vzmeti, plinu, kapljevini, trdnini,...)
- pri mehanskem valovanju se delčki sredstva odmaknejo od svojih ravnovesnih leg. Odmiku od ravnovesja pravimo motnja.
- zaradi odmikov se v sredstvu pojavijo sile in/ali navori. Najpreprosteje se to vidi na primeru viseče vodoravne vzmeti: posledica odmikov je lahko na primer razredčina oziroma raztezek določenega dela vzmeti. Le-ta pa povzroči silo zaradi

Hookovega zakona po katerem je sila sorazmerna z raztežkom vzmeti. Tudi pri zvočnem valovanju se zaradi odmikov delčkov zraka pojavijo razredčine - te pa povzročijo tlačne sile, ki nadalje vplivajo na gibanje zraka. Tudi pri valovanju na vodoravni vrvi se zaradi odmikov v navpični smer pojavijo sile v navpični smeri.

- sile in/ali navori iz prejšnje alineje preko enačb gibanja (na primer 2. Newtonovega zakona) povzročajo nadaljnji razvoj valovanja in potovanje motnje.
- V praznem prostoru (vakuumu) ni odmikov sredstva in zato se po njem mehansko valovanje ne more širiti.

## 2. Elektromagnetno valovanje:

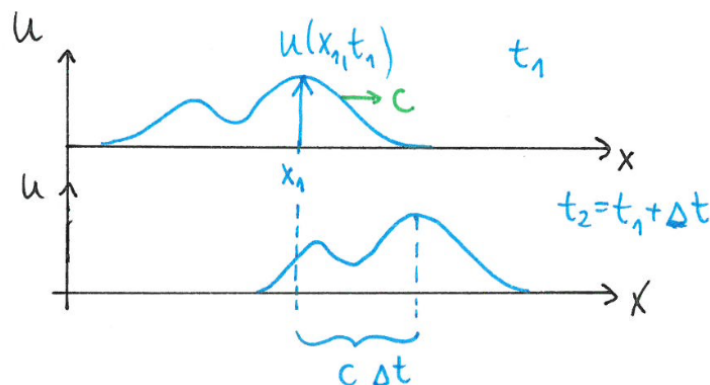
- Potuje lahko tudi praznem prostoru, lahko pa tudi po snovi
- Tu ne gre za odmike sredstva temveč za spreminjanje električnega polja  $\vec{E}$  in magnetnega polja  $\vec{B}$  s časom in krajem.
- V poglavju 5 bomo ugotovili, da ima matematična enačba za električno polje v EM valovanju enako obliko kot enačba za odmik v mehanskem valovanju.
- mehansko in elektromagnetno valovanje imata zato mnogo skupnih značilnosti, ki jih bomo podrobno obravnavali: potovanje motnje, interferenca, uklon, odboj, lom,...

Ključna fizikalna količina pri valovanju je odmik  $\vec{u}$  od ravnovesne lege:  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  označuje vektor odmika koščka sredstva na mestu  $\vec{x}$  ob času  $t$ . Pri nihanju je bil odmik opazovanega telesa (na primer kroglice pri matematičnem nihalu) odvisen le od časa. Pri valovanju pa opazujemo večje telo/sredstvo (celotno vrv, dolgo vzmet, ves zrak v sobi,..) in tu so odmiki določenih delov telesa/sredstva odvisni ne le od časa, temveč tudi od lege sredstva  $\vec{x}$ .

Kvalitativno opišimo zakaj se valovanje širi. Opišimo valovanje vzdolž vodoravno obežene vzmeti, ki je v ravnovesju neraztegnjena. Ko z roko udarimo po levi strani vzmeti opazimo, da se val v obliki ene zgoščine širi proti desni. Ko vzmet udarimo na levi, se na tem mestu vzmet skrči in napravi se zgoščina. Zaradi tega skrčka se (po Hookovem zakonu  $F = kx$ ) pojavi sila levega koščka vzmeti na desnega sosedu. Ta sila skrči desnega sosedu, na tem mestu nastane zgoščina in zopet se pojavi sila tega koščka, ki posledično stisne desnega sosedu. Tako se val širi v desno dokler ne pride do desnega konca vzmeti. Pri tem je bilo pomembno, da sta sila in raztezek povezana preko Hookovega zakona.

Podobno je z zvočnim valovanjem - recimo potovanje zvoka po medeninasti palici. Če palico na levi udarimo, se poveča tlak na levem delu in ta povečan tlak premakne sosednji košček na desni; premik tega povroči povečanje tlaka na tem mestu in zopet odrine sosedu na desni - tako se širi zvočni val na desno. Pri tem je bilo pomembno, da je sprememba tlaka povezana z skrčkom/raztežkom. Podobna je obravnava zvoka v plinu in kapljevini, le da moramo imeti za ta primer v mislih nekatere približke povezane z Brownovim gibanjem.

Kvalitativno opišimo se valovanje na dolgi napeti struni, ki jo na levi strani na kratko udarimo v pravokotni smeri navzgor. Opazimo, da odmik strune v smeri nazgor potuje v desno. Zaradi tega se na tistem mestu struna odkloni navzgor. Zaradi tega se struna



Slika 2.1: Odmike pri valovanju na vrvi  $u(x, t_1)$  lahko določimo iz fotografije, ki jo naredimo v trenutku  $t_1$ . Odmik ob tem času na mestu  $x_1$  je posebej označen. Če slikamo še ob malce kasnejšem trenutku  $t_2 > t_1$  opazimo, da se je oblika vala tega preselila v desno smer

raztegne in vzporedno z struno se povavi sila: pri odklonjeni struni ima ta sila vodoravno in tudi majhno navpično komponento. Zaradi navpične komponente deluje sile levega koščka strune na desni košček strune in ga sili navzgor. Posledično se ta desnji sosed začne gibati navzgor, pride do sil v struni in te zopet vplivajo na desnega sosedu in valovanje se širi.

## 2.2 Valovanje v eni dimenziji

Večinoma bomo obravnavali valovanje, ki se širi le v eni dimenziji. Koordinato vzdolž katere se valovanje širi bomo označili z  $x$ . Tedaj je  $u(x, t)$  odmik sredstva na mestu  $x$  ob času  $t$ . Primer odmikov pri valovanju na vrvi ob dveh različnih časih so prikazani na Sliki 2.1.

Smer odmika  $\vec{u}$  je

- pravokotna na smer širjenja valovanja pri *transverzalnem valovanju* ( $\vec{u} \perp \vec{e}_x$ ): valovanje na vrvi in vodni gladini
- vzporedna z smerjo širjenja valovanja pri *longitudinalnem valovanju* ( $\vec{u} \parallel \vec{e}_x$ ): valovanje na viseči vzmeti, zvočno valovanje po plinu, kapljevini ali trdnini

Primerjajmo matematične količine, ki nastopajo pri nihanju in valovanju v eni dimenziji:

- Nihanje:
  1. Odmik je funkcija ene spremenljivke:  $t$
  2. Enačba, ki opisuje odmike, je navadna diferencialna enačba. V njej nastopajo *odmik*( $t$ ) ter njegovi odvodi. Neznana funkcija je *odmik*( $t$ ).
- Valovanje:

1. Odmik  $u(x, t)$  je funkcija dveh spremenljivk: časa  $t$  in kraja  $x$
2. Enačba, ki opisuje odmike, je parcialna diferencialna enačba. Neznana funkcija parcialne diferencialne enačbe je  $u(x, t)$ . V njej nastopajo odmik  $u(x, t)$  ter njegovi parcialni diferencialni odvodi po kraju in času

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x}, & u(x + \delta x, t) - u(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\delta x + O(\delta x^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\delta t}, & u(x, t + \delta t) - u(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\delta t + O(\delta t^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Parcialni odvod po kraju pove za koliko se razlikujejo odmiki na bližnjih mestih ( $x$  ter  $x + \delta x$ ) ob istem času  $t$ . V desni enačbi smo izrazili števec iz leve enačbe (zapisali smo diferencial odmika po kraju): razlika odmikov na bližnjih mestih, ki sta oddaljeni  $\delta x$ , je enaka produktu parcialnega odvoda ter  $\delta x$ . Po Taylorjevem razvoju uvidimo, da je popravek k desnemu izrazu sorazmeren z  $\delta x^2$  in je majhen za male  $\delta x$ : to zaznamuje popravek  $O(\delta x^2)$ .

Parcialni odvod po času pove za koliko se razlikujeta odmika na določenem mestu  $x$  ob dveh bližnjih trenutkih ( $t$  in  $t + \delta t$ ).

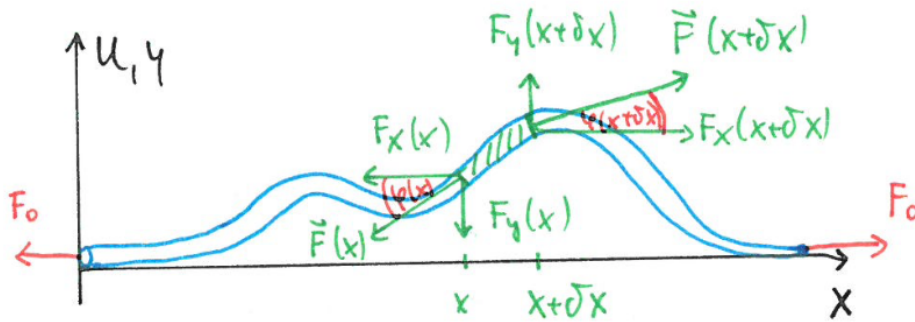
## 2.3 Valovanje na vrvi in valovna enačba

Naučili smo se, da valovanje opišemo s tem, da podamo odmike  $u(x, t)$  sredstva na različnih mestih  $x$  ter ob različnih časih  $t$ . Zdaj pa bi radi ugotovili kakšnim zakonom je spreminjanje  $u(x, t)$  podrejeno - želimo izpeljati enačbo, ki ji bo funkcija  $u(x, t)$  zadoščala. To enačbo bomo imenovali valovna enačba. Kasneje se bo izkazalo, da ima ta enačba pri valovanju na vrvi, vzmeti in zvoku enako obliko (vsaj za primer malih odmikov in njihovih parcialnih odvodov). V poglavju o elektro-magnetnem valovanju pa se bo izkazalo, da enaka enačba velja tudi za električno polje  $E(x, t)$  in magnetno polje  $B(x, t)$  pri svetlobi.

Obravnavajmo nazoren primer valovanja po vrvi in zanj izpeljimo enačbo. Pri nihanju smo pristopili k problemu tako, da smo obravnavali nihalo ob nekem poljubnem trenutku in zanj zapisali gibalne enačbe. Podobno bomo zdaj obravnavali poljuben košček vrvi (med  $x$  in  $x + \delta x$ ) ob poljubnem času in zanj zapisali enačbe gibanja. Obliko vrvi popisujejo s odmiki  $u(x, t)$ . Zapisali bomo sile na košček vrvi med  $x$  in  $x + \delta x$ . Te sile so odvisne tudi od oblike  $u(x, t)$ , po drugi strani pa te sile po 2. Newtonovem zakonu narekujejo kako se bo gibanje tega koščka vrvi razvijalo v času. Zapis te izjave v matematičen jezik bo vodil do parcialne diferencialne enačbe za  $u(x, t)$ .

Vrv na Sliki 2.2 na desni ves čas vlečemo s znano silo  $F_0$  in ker se težišče vrvi ne premika moramo z enako silo vleči tudi na levi strani. Zapišimo 2. Newtonov zakon za košček vrvi med  $x$  in  $x + \delta x$  posebej za  $x$  in  $y$  komponenti. V mislih imam košček kratke, a končne, dolžine  $\delta x$ . Naj bo dovolj kratek, da se sile in nakloni vrvic na levi in desni razlikujejo le malo<sup>1</sup>. Če zanemarimo gravitacijsko silo, na ta košček vrvi delujeta le dve sili: sila sosednjega

<sup>1</sup>Da bomo lahko uporabili Taylorjev razvoj količin  $f(x + \delta x)$  v okolici  $x$  za male  $\delta x$ .



Slika 2.2: Izpeljava valovne enačbe za primer transverzalnega valovanja na vrvi.

koščka vrvi  $\vec{F}(x + \delta x, t)$  na desni ter sila sosednjega koščka vrvi  $\vec{F}(x, t)$  na levi (označena na Sliki 2.2). Ker gre za transverzavno valovanje, se koščki vrvi gibljejo le v smeri  $y$  ne pa tudi v smeri  $x$ . Od tod sledi da ima pospešek le  $y$ /komponento, v  $x$  smeri pa ga ni:

$$\begin{aligned} y : \quad F_y(x + \delta x, t) - F_y(x, t) &= \delta m a_y(x, t) \\ x : \quad F_x(x + \delta x, t) &= F_x(x, t) \quad \text{ker } a_x = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Iz druge enačbe razberemo, da je  $F_x$  neodvisna od lege  $x$ , saj mora enakost veljati za kateri koli košček poljubne dolžine  $\delta x$ . Poleg tega vemo, da je na krajiščih vrvi sila  $F_x = F_0$  ves čas enaka, ker tam vlečemo s konstantno silo. Od tod sledi, da je vodoravna komponenta napetosti v vrvi  $F_x(x, t) = F_0$  neodvisna od lege in časa. Vrv dolžine  $L$  in celotne mase  $M$  ima konstantno gostoto. Deleža  $\delta x/L = \delta m/M$  sta zato enaka. Masa koščka  $\delta m = \frac{M}{L} \delta x = \mu \delta x$  je sorazmerna z njegovo dolžino kjer smo definirali maso na dolžinsko enoto  $\mu \equiv \frac{M}{L}$ .

Količine v prvi gibalni enačbi (2.2) bi zdaj radi izrazili z odmikom vrvi  $u(x, t)$ , da dobimo eno enačbo za to spremenljivko. Odmik koščka predstavlja pravzaprav  $y$ -komponento lege obravnavanega koščka:  $u(x, t) = y(x, t)$ . Pospešek obravnavanega koščka vrvi je drugi odvod odmika po času:

$$a_y(x, t) = \frac{\partial v_y}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) . \quad (2.3)$$

Uporabili smo parcialni odvod, ker opazujemo kako se spreminjata hitrost in odmik koščka pri danem  $x$  s časom.

Tudi sile  $F_y$  v (2.2) so odvisne od odmikov, kar je bistveno za pojav valovanja. Ker je vodoravna sila  $F_x = F_0$  konstantna, je transverzalna komponenta  $F_y$  odvisna od naklona vrvice  $\varphi(x, t)$  pri dani legi  $x$

$$F_y(x, t) = F_0 \tan \varphi(x, t) = F_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) . \quad (2.4)$$

Tangens naklonskega kota vrvice je po definiciji odvoda enak odvodu po legi. Uporabimo parcialni odvod, ker je relevantno spreminjanje odmika v odvisnosti od lege  $x$  pri danem času

$t$ . Predstavljajmo si, da fotografiramo vrstico ob nekem času  $t$ : obliko vrstice na fotografiji podaja  $y(x) = u(x, t)$ , tangens naklonskega kota pa  $y'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ . Za pojav mehanskega valovanja je ključno, da so sile oziroma navori v sredstvu odvisni od odmikov in to ne velja le za valovanje na vrvi.

Količine (2.3,2.4) izražene z  $u(x, t)$  vstavimo v gibalno enačbo (2.2):

$$F_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = \mu \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.5)$$

Na levi je razlika dveh količin  $f(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  pri  $x + \delta x$  ter  $x$ . Ker je dolžina obravnavanega koščka  $\delta x$  kratka, se ti dve količini malo razlikujeta in uporabimo Taylorjev razvoj funkcije  $f(x + \delta x, t)$  okoli  $(x, t)$  do prvega reda:

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, t) &\simeq f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\delta x &\rightarrow f(x + \delta x, t) - f(x, t) &\simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \delta x \\ & &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &\simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \delta x \end{aligned} \quad (2.6)$$

Razliko prvih odvodov podaja drugi odvod in gibalna enačba (2.5) dobi obliko

$$F_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \delta x = \mu \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.7)$$

Vsota vseh sil  $F_y$  na obravnavan košček (leva stran enačbe) je sorazmerna z drugim parcialnim odvodom odmika po legi  $x$ . Sorazmernost s končno dolžino koščka  $\delta x$  na levi in desni pokrajšamo. Po deljenju z  $\mu$  končno pridemo do parcialne diferencialne enačbe za odmik  $u(x, t)$

$$\boxed{c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)} \quad (2.8)$$

Predfaktor na levi je pri valovanju na vrvi konstanta  $F_0/\mu$  in le to smo označili z

$$\text{vrv : } \boxed{c^2 = \frac{F_0}{\mu}}, \quad \mu = \frac{M}{L} \quad (2.9)$$

Parcialno diferencialno enačbo (2.8) za odmik  $u(x, t)$  imenujemo *valovna enačba* in je osnova za obravnavo pojavov pri valovanju. Spomnimo, da je izpeljana za valovanje, ki se širi v eni sami smeri  $x$ . Drugi parcialni odvod po času je sorazmeren drugemu parcialnemu odvodu po legi, sorazmernostni faktor je  $c^2$  - v naslednjem podpoglavju bomo izpeljali, da je  $c$  hitrost valovanja. Pri valovanju po drugih sredstvih ima enačba za odmik običajno enako obliko, le pred faktor  $c^2$  je drugačen in odvisen od lastnosti sredstva. Pristop k izpeljavi valovne enačbe v 1 dimenziji je za večino sredstev podoben kot pri vrvi, torej sledeč:

- Obravnavamo majhen košček sredstva
- Zapišemo gibalne enačbe (2. Newtonov zakon za linearno gibanje ali vrtenje) za ta košček

- Izrazimo vse količini v gibalni enačbi z odmiki: skupna lastnost sredstev, po katerih potuje valovanje, je, da so sile ali navori odvisni od odkikov (oziroma njihovih parcialnih odvodov po legi).
- Napravimo Taylorjev razvoj količin za mali košček
- Če gre za enostaven valovni pojav dobimo, da je parcialni odvod odkika po času sorazmeren drugemu parcialnemu odvodu po legi (2.8). Sorazmernostni konstantni faktor na levi je odvisen od primera do primera in ga označimo s  $c^2$ . Izkazalo se bo, da  $c$  predstavlja hitrost valovanja. Na ta način torej izpeljemo hitrosti valovanja za različna sredstva.

## 2.4 Rešitve valovne enačbe

Valovna enačba v 1D (2.8) je parcialna diferencialna enačba za odmike  $u(x, t)$ , ki so funkcija dveh spremenljivk. Splošne parcialne diferencialne enačbe je običajno težko ali pa nemogoče analitično rešiti.

### 2.4.1 Potujoči val $u(x, t) = f(x - ct)$ v smeri $+x$

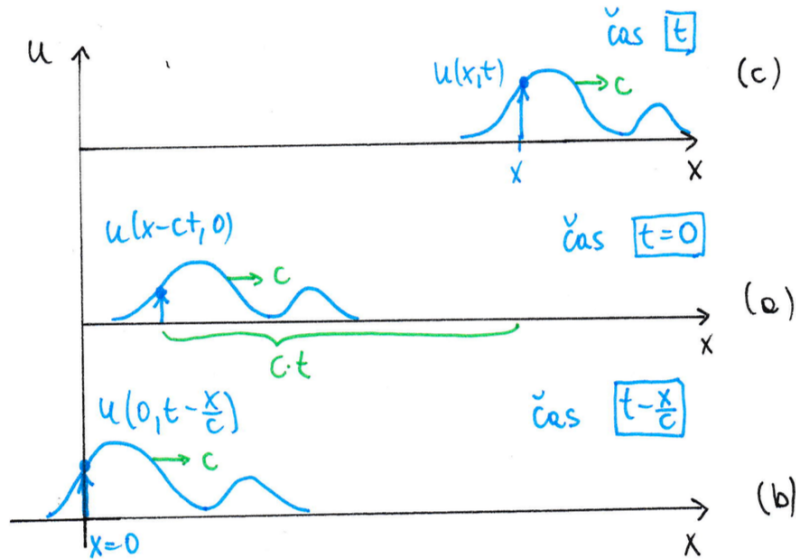
Valovna enačba je razmeroma preprosta in je ni težko rešiti. Reši jo vsaka funkcija odkikov  $u(x, t)$  oblike

$$\boxed{u(x, t) = f(x - ct)} = f(\eta) = f(\eta(x, t)) , \quad \eta(x, t) = x - ct \quad (2.10)$$

kjer je  $f$  poljubna funkcija ene spremenljivke  $\eta$ . Najpomembnejša in najbolj domača nam je harmonična oblika, kjer ima funkcija  $f$  obliko sinusa ali kosinusa. Do poglavja 2.6 se ne omejimo na določene oblike in imejmo v mislih res poljubne oblike, da spoznamo bogastvo valovnih pojavov. Rešitev preverimo tako da jo vstavimo v (2.8) in uporabimo pravila za posredni odvod. Na desni in levi strani dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial \eta}(x - ct) = -c f'(x - ct); & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = (-c)^2 f''(x - ct) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta}(x - ct) = f'(x - ct); & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = f''(x - ct) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Leva in desna stran valovne enačbe (2.8) za  $u$  oblike (2.10) vodita do drugega odvoda funkcije  $f$  po svojem argumentu  $\eta$ , iz vrednotenem pri  $\eta = x - ct$ . Drugi parcialni odvod  $u$  po  $t$  je torej res sorazmeren z drugim parcialnim odvodom po  $x$ , pomnoženim s konstanto  $c^2$ . Ugotovili smo, da rešitev (2.10) zadošča valovni enačbi za poljubno funkcijo  $f$ . Širok nabor možnih funkcij govori o tem, da je valovanje bogat pojav in se kaže v raznovrstnih oblikah in ustreznih rešitvah.



Slika 2.3: Odmik  $u(x, t) = f(x - ct)$  ustreza potovanju motnje s hitrostjo  $c$  v smeri osi  $+x$ .

### Interpretacija

**Poskus:** Vzбудimo kratko potujočo motnjo na vrvi in viseči vzmeti. Motnja potuje s hitrostjo  $c$ .

Dobljena rešitev ustreza potovanju motnje s hitrostjo  $c$  v smeri osi  $+x$ , pri čemer motnja ne spreminja oblike (glej Sliko 2.3). Da bi to razumeli obravnavajmo posledice zvez

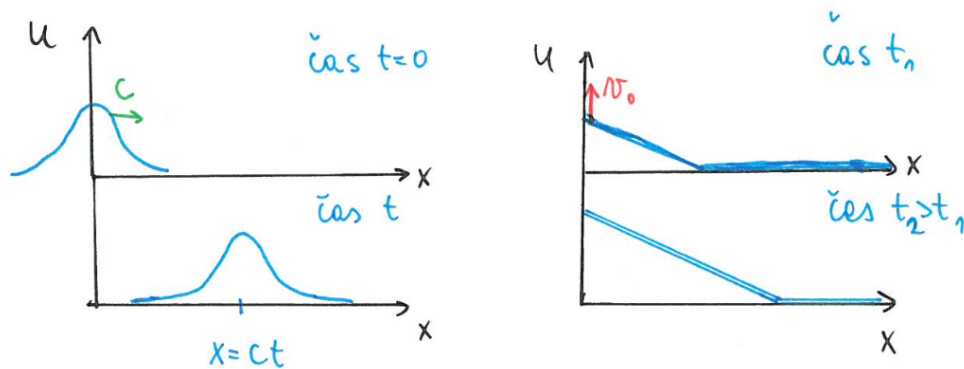
$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \boxed{u(x, t) = u(x - ct, 0)} \quad \text{ker} \quad u(x, t) = f(x - ct), \quad u(x - ct, 0) = f(x - ct) \\
 (b) \quad & \boxed{u(x, t) = u(0, t - \frac{x}{c})} \quad \text{ker} \quad u(x, t) = f(x - ct), \quad u(0, t - \frac{x}{c}) = f(0 - c(t - \frac{x}{c})) = f(x - ct)
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

ki sledijo iz tega, da je  $u(a, b) = f(a - cb)$  (2.10) za poljubna argumenta  $a$  in  $b$ .

Zveza (2.12a) pove, da je odmik ob času  $t$  pri  $x$  enak odmiku ob času 0 pri  $x - ct$ , kar je prikazano s primerjavo Slik 2.3 (c) in (a). Dan odmik je potreboval čas  $t$ , da "prepotoval" razdaljo  $ct$  (ko se je premaknil od  $x - ct$  do  $x$ ): "potoval" je torej s hitrostjo  $ct/t = c$ . Pri tem nimamo v mislih, da bi se s tako hitrostjo gibal kakšen košček vrvi<sup>2</sup>. Le dana vrednost odmika se prenese vzdolž vrvi. Vsak odmik se vzdolž vrvi prenaša z enako hitrostjo, zato se oblika vala (2.10) ne spreminja; val poljubne oblike togu potuje z dano hitrostjo  $c$  v smeri  $+x$ . Na Sliki 2.3 val "dvo-grbe" oblike ne spreminja oblike, le vrh vala v času  $t$  prepotuje razdaljo  $ct$ . Odmiku vrvi (ali drugega sredstva) od ravnovesne vrednosti pravimo *motnja* in motnja pri valovanju (2.10) potuje s hitrostjo  $c$  v smeri koordinate  $+x$ . Oblika motnje je odvisna od oblike funkcije  $f$ . Na Sliki 2.3 "dvo-grbo" motnja togu potuje z dano hitrostjo.

<sup>2</sup>Hitrost gibanja koščkov vrvi podaja  $v_y(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ .





Slika 2.4: (a) Potovanje motnje, ki ima na začetku obliko Gavsovke. (b) Potovanje motnje kjer levi konec vrvi premikamo s konstantno hitrostjo.

Pri vrvi je hitrost  $c = \sqrt{F_0/\mu}$  (2.9) potovanja motnje tem večja, čim bolj jo nategnemo s silo  $F_0$  in čim manjšo gostoto oziroma presek ima.

Poudarimo, da se potujoče valovanje oblike (2.10) lahko nemoteno širi le po obsežnem ali neskončnem sredstvu, kjer so vplivi zunanjih sil na robovih sredstva zanemarljivi. Edina sila, ki jo zaobjame valovna enačba, je namreč sila zaradi odmikov v sredstvu. Blizu roba (recimo na mestu kjer je vpet konec vrvi) pa na sredstvo delujejo še zunanje sile in potujoči val ni več točna rešitev.

Tudi zveza (2.12b) privede do zaključka da motnja potuje s hitrostjo  $c$ . Odmik pri  $x$  ob času  $t$  je enak odmiku v izhodišču  $x = 0$  ob bolj zgodnjem času  $t - x/c$ , kar kaže primerjava Slik 2.3 (c) in (b). Motnja od izhodišča do lege  $x$  torej potrebuje čas  $x/c$  kar pomeni da potuje s hitrostjo  $c$ .

Če poznamo obliko celotne vrvi  $u(x, t = 0) = H(x)$  ob času  $t = 0$  <sup>(3)</sup>, zveza (2.12a) določa kasnejši razvoj potujočega vala:  $u(x, t) = u(x - ct, 0) = H(x - ct)$ . Matematično bi rekli, da smo val določili iz znanega *začetnega pogoja*. Zgled: če ima motnja ob času  $t = 0$  obliko Gavsovke  $u(x, 0) = H(x) = Ke^{-x^2/\sigma^2}$  z vrhom pri  $x = 0$ , ima val  $u(x, t) = H(x - ct) = Ke^{-(x-ct)^2/\sigma^2}$  ob času  $t$  vrh pri  $x = ct$  (Slika 2.4a).

Če poznamo gibanje  $u(x = 0, t) = G(t)$  koščka vrvi pri  $x = 0$  <sup>(4)</sup>, zveza (2.12b) določa odmike  $u(x, t) = u(x = 0, t - x/c) = G(t - x/c)$  tudi pri drugih legah. Matematično bi rekli, da val določajo dani *robni pogoji*. Zgled: če konec vrvi pri  $x = 0$  premikamo navzgor  $u(x = 0, t) = G(t) = v_0 t$  s konstantno hitrostjo  $v_0$ , bo  $u(x, t) = G(t - x/c) = v_0(t - x/c)$  (Slika 2.4b).

<sup>3</sup>Obliko naj podaja funkcija  $H(x)$ .

<sup>4</sup>Gibanje oziroma časovno odvisnost odmika naj podaja funkcija  $G(t)$ .

## 2.4.2 Potujoči val $u(x, t) = g(x + ct)$ v smeri $-x$

Tudi val

$$\boxed{u(x, t) = g(x + ct)} \quad (2.13)$$

je rešitev valovne enačbe (2.8), kar lahko preprosto preverite z analognimi koraki kot smo jih napravili v (2.11). Tu je  $g$  zopet poljubna funkcija ene spremenljivke. Za tak val velja  $u(x, t) = u(x + ct, 0) = u(0, t + x/c)$  in s podobnimi argumenti kot zgoraj pridemo do zaključka da se taka motnja giblje s hitrostjo  $c$  v smeri osi  $-x$ .

## 2.4.3 Interferenca

*Interferenca* je pojav pri valovanju kjer se odmiki raznih valov seštevajo. Če sta valova  $u_1(x, t)$  in  $u_2(x, t)$  rešitvi valovne enačbe (2.8), je njena rešitev tudi njuna vsota

$$\boxed{\vec{u}(x, t) = \vec{u}_1(x, t) + \vec{u}_2(x, t)} \quad (2.14)$$

saj je valovna enačba linearna v odmiku (ne vsebuje višjih potenc odmika), odvod vsote pa je enak vsoti odvodov

$$c^2 \left[ \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial x^2}(x, t) \right] = \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2 \vec{u}_2}{\partial t^2}(x, t) .$$

Poudarili smo, da je odmik vektor saj sta lahko odmika  $\vec{u}_1$  in  $\vec{u}_2$  načeloma lahko v različnih smereh tudi pri valovanju v eni dimenziji; pri transversalnem valovanju sta lahko na primer v pravokotnih smereh, ki sta pravokotni na smer širjenja. Prva člena na levi in desni sta enaka ker je  $\vec{u}_1$  rešitev. Druga člena na levi in desni sta enaka ker je  $\vec{u}_2$  rešitev. Leva stran je torej enaka desni strani in vsota (2.14) je rešitev valovne enačbe. Poljubna linearna kombinacija valov  $\vec{u}_i(x, t)$ , ki so rešitev valovne enačbe, tudi predstavlja možen val

$$\boxed{\vec{u}(x, t) = \sum_{i=1}^N A_i \vec{u}_i(x, t)} \quad (2.15)$$

Torej je interferenca pojav kjer se odmiki valov seštevajo. V matematičnem jeziku pojav interference opisujeta kar preprosti zvezi (2.14) in (2.15), pojav pa je posledica naštetih lastnosti valovne enačbe. Če na primer po vrvi iz leve pošljemo eno motnjo, iz desne pa drugo, se odmiki seštejejo ko se motnji srečata. Analogen pojav interference velja za valovanje v dveh in treh dimenzijah: odmiki krožnih valov na vodni površini se seštevajo.

**Poskus:** Vzbudimo hkrati kratkotrajni motnji na enem in drugem krajišču vodoravne vzmeti.

**Poskus:** Opazovanje valov na vodni gladini iz več krožnih izvorov.

**Poskus:** Interferenca zvočnega valovanja iz dveh zvočnikov: na nekaterih mestih je amplituda odmika in jakost zvoka večja, na drugih manjša.

## 2.4.4 Splošne rešitve valovne enačbe

Poznamo že dve pomembni rešitvi valovne enačbe: potujoči val v smeri  $+x$  (2.10) in  $-x$  (2.13). Tudi njuna vsota ustreza možnemu poteku valovanja

$$\boxed{u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)} \quad (2.16)$$

To predstavlja najsplošnejšo obliko rešitve valovne enačbe, kjer sta obe funkciji  $f$  in  $g$  poljubni. Gre za seštevek valov poljubnih oblik, ki potujejo v desno in levo.

V nadaljevanju bomo obravnavali valovanja in rešitve, ki jih praktično najpogosteje srečamo v naravi. Najpomembnejša in najbolj domača nam je harmonična oblika, kjer imata  $f$  in/ali  $g$  obliko sinusa ali kosinusa. Na splošno pa obliko vala oziroma obliko funkcij  $f$  in  $g$  določa eden izmed naslednjih podatkov za obravnavan val:

- **Robni pogoji:** Znani odmiki ali njihovi odvodi na več legah  $x_{1,2,\dots}$  ob vseh časih:  $u(x_1, t), u(x_2, t), \dots$
- **Začetni pogoji:** Znani odmiki in njihovi odvodi na vseh legah ob nekem času, na primer ob  $t = 0$ :  $u(x, t = 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0)$ .

Z drugim se bomo podrobneje spoznali v naslednjem poglavju, s prvim pa v poglavju 2.7.

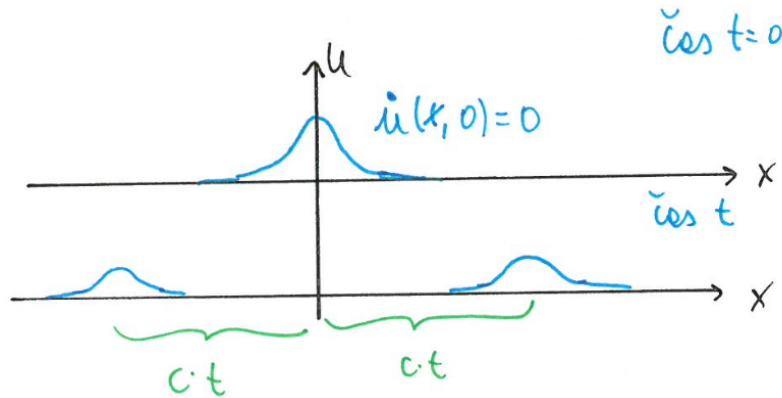
## 2.5 Val na neskončnem sredstvu ob danih začetnih pogojih

Zanimamo se za razvoj vala kjer poznamo njegovo obliko  $u(x, t = 0) = A(x)$  in hitrost delcev sredstva  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = B(x)$  na začetku. V mislih imamo, da sta  $A(x)$  in  $B(x)$  znani funkciji, zanima pa nas nadaljnji razvoj valovanja, torej  $u(x, t)$ . Iz začetnih pogojev ni še očitno ali se bo ta motnja poslej gibala v desno ali levo, ali pa bo linearna kombinacija obeh. Zato uporabimo splošno rešitev (2.16) in iz znanih dveh začetnih pogojev določimo dve neznani funkciji  $f$  in  $g$ :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \underline{f(x) + g(x) = A(x)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= [-cf'(x - ct) + cg'(x + ct)]_{t=0} = c[-f'(x) + g'(x)] = B(x) \\ &\rightarrow \underline{-f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x B(\tilde{x}) d\tilde{x}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Če odvajamo po  $x$  tretjo vrstico namreč res dobimo drugo vrstico zaradi splošne zveze  $\frac{d}{dx} \int^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} = F(x)$ , spodnja meja  $x_0$  pa je poljubna in ne bo nastopala v končni rešitvi za odmike. Podčrtani enačbi predstavljata dve enačbi za dve neznani funkciji  $f$  in  $g$ :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ A(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x B(\tilde{x}) d\tilde{x} \right] \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[ A(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x B(\tilde{x}) d\tilde{x} \right] \quad (2.18)$$



Slika 2.5: Razvoj vala, ki ima na začetku obliko Gavskovke z vrhom v izhodišču, delčki sredstva pa na začetku mirujejo.

Zdaj poznamo oblike funkcij  $f$  in  $g$ , ki ju podajata zgornji zvezi za katerokoli vrednost argumenta (argument je označen z  $x$  vendar nima nujno pomena lege). Z znanima oblikama funkcij ni težko zapisati (2.16), kjer  $f$  iz vrednotimo pri  $x - ct$  in  $g$  pri  $x + ct$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ A(x - ct) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x-ct} B(\tilde{x}) d\tilde{x} \right] + \frac{1}{2} \left[ A(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x+ct} B(\tilde{x}) d\tilde{x} \right]$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ A(x - ct) + A(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} B(\tilde{x}) d\tilde{x} \right] \quad (2.19)$$

To rešitev je prvi izpeljal Jean D'Alambert (1717-1783). Gre za splošen razvoj vala na razsežnem sredstvu za dane začetne pogoje. Še enkrat poudarimo, da je dobljena rešitev relevantna za zelo razsežno sredstvo na mestih kjer so vplivi zunanjih sil na robovih sredstva zanemarljivi.

Zgled: Vrv na začetku obremenimo tako, da ima obliko Gavsovke  $u(x, t = 0) = K e^{-x^2/\sigma^2} = A(x)$ , in hkrati poskrbimo da vsi delčki vrvi na začetku mirujejo  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = B(x) = 0$ . Po (2.19) je razvoj takega vala v času

$$u(x, t) = \frac{1}{2} K \left[ e^{-(x-ct)^2/\sigma^2} + e^{-(x+ct)^2/\sigma^2} \right]$$

Slika 2.5 prikazuje, da se tvorita dva vrhova, kjer eden potuje proti desni in drugi proti levi. Poudarimo, da potujoči Gavsovski val v desno na Sliki 2.4 ne predstavlja prave rešitve trenutnega problema, ker ne zadošča začetnemu pogoju  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = 0$ .

## 2.6 Potujoč harmoničen val

Poskus: Z nihanjem enega konca vrvi vzbudimo potujoč transverzalen harmoničen val. Opazujemo hribočke in doline, ki potujejo vzdolž vrvi.

**Poskus:** Z nihanjem enega krajišča viseče vodoravne vzmeti vzbudimo potujoče longitudinalno valovanje. Opazujemo zgoščine in razredčine, ki potujejo vzdolž vzmeti.

Spoznali smo bogastvo rešitev valovne enačbe. Ko pa razmišljamo o valovih, imamo zelo pogosto v mislih sinusne valove, ki potujejo po morski gladini, zvočne valove določene frekvence, stojna sinusna valovanja na vrvi ali struni, ... pa tudi elektro-magnetno valovanje z določeno valovno dolžino, kjer imata  $E$  in  $B$  sinusno obliko. Taka harmonična oblika valovanja je v praksi tudi daleč najpomembnejša<sup>5</sup>. Harmonično valovanje na vrvi vzbujamo z harmoničnim nihanjem krajišča vrvi v smeri gor-dol, harmonično zvočno valovanje vzbuja harmonično nihanje opne, harmonično elektro-magnetno valovanje pa nihanje nabitega delca ali prehod elektrona v atomu med dvema različnima orbitalama, ...

Harmonično potujoče valovanje v smeri  $+x$  je posebna oblika iz poljubnega nabora funkcij  $f$  (2.10), kjer ima  $f$  obliko sinusa ali kosinusa s poljubno amplitudo, frekvenco in fazo<sup>6</sup>. Potujoč harmoničen val nastane na primer, če primemo krajišče vrvi in ga nihamo z določeno krožno frekvenco  $\omega$  in amplitudo nihanja  $u_0$ , ali pa nihamo krajišče vzmeti sem ter tja

$$u(x=0, t) = u_0 \sin(-\omega t + \delta) \quad (2.20)$$

kjer smo na krajišču izbrali izhodišče  $x = 0$ . Razvoj takega potujočega vala po sredstvu podaja zveza (2.12b), kjer za čas v (2.20) vstavimo  $t - \frac{x}{c}$

$$u(x, t) = u(x=0, t - \frac{x}{c}) = u_0 \sin(-\omega(t - \frac{x}{c}) + \delta)$$

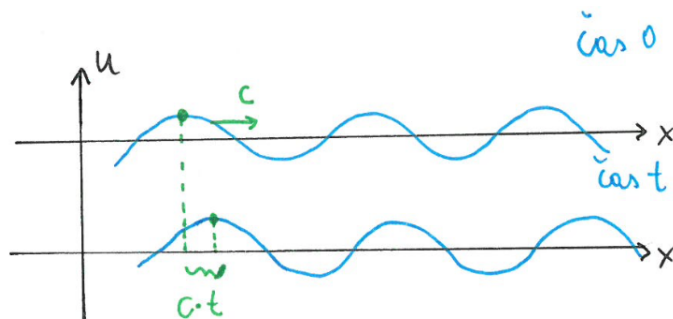
val proti  $(+x)$  :  $\boxed{u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta)}$   $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$  (2.21)

Definirali smo *valovni vektor*  $k$ , ki ima enote  $1/m$  (pri valovanju v 3D je to res vektor  $\vec{k}$  v smeri širjenja valovanja, v eni dimenziji  $x$  pa zadostuje ena komponenta  $\vec{k} = (k, 0, 0)$ ). Val (2.21) je potujoč harmoničen val v smeri  $+x$  ker ima obliko (2.10). Sinusna oblika motnje tega potuje s hitrostjo  $c$  in vrh vala se v času  $t$  premakne za  $ct$ , kot kaže slika Slika 2.6. Zopet poudarimo, da se koščki sredstva ne gibljejo s hitrostjo  $c$  temveč z hitrostjo  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ .

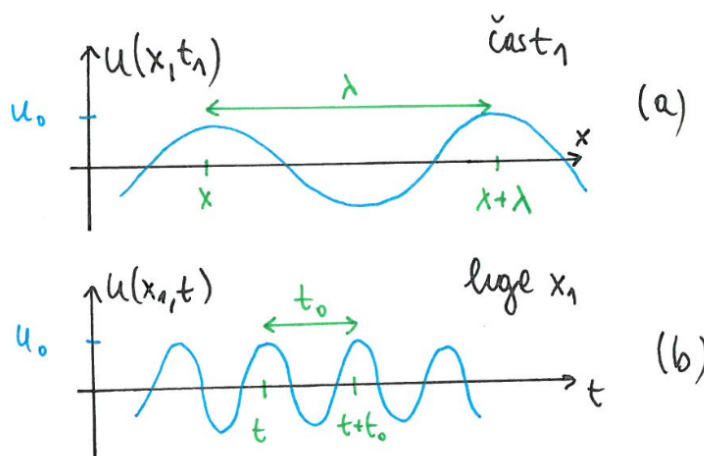
---

<sup>5</sup>To je povezano tudi z dejstvom, da vse oblike valovanja lahko zapišemo kot vsoto harmoničnih valovanj kot boste spoznali pri Fourierovi analizi pri matematiki.

<sup>6</sup>V našem primeru vzamemo  $f(\eta) = u_0 \sin(\frac{\omega}{c}\eta + \delta)$ , kjer je  $\omega$  krožna frekvenca nihanja koščkov sredstva,  $\omega/c$  pa skupaj z  $\eta = x - ct$  vodi do brez-dimenzijske količine. Vendar bomo to obliko  $f$  raje izpeljali iz nazornega zgleada.



Slika 2.6: "Fotografija" potujočega harmoničnega vala na vrvi (2.21) ob časih  $t = 0$  in  $t$ .



Slika 2.7: Pomen valovne dolžine in frekvence pri harmoničnem valovanju: (a) "Fotografija vala" ob času  $t_1$ . (b) Časovna odvisnost odmika na mestu  $x_1$ .

### Pomen $\lambda$ , $k$ , $t_0$ in $\omega$

Pomene teh količin najlažje razberemo iz valovanja po vrvi na Slikah 2.7.

- Pomen *valovne dolžine*  $\lambda$  in *valovnega vektorja*  $k$  razberemo, če fotografiramo vrv v poljubnem trenutku  $t_1$  in opazujemo njeno obliko na sliki (a). *Valovna dolžina valovanja*  $\lambda$  pri harmoničnem valu je definirana kot razdalja med sosednjima vrhovoma. Od tod sklepamo na pomen  $k$ , saj argument sinusa (2.21) med dvema sosednjima vrhovoma (pri  $x$  in  $x + \lambda$ ) naraste za  $2\pi$ , če naj imata odmika enake vrednosti

$$(x, t_1) = u(x + \lambda, t_1) \rightarrow u_0 \sin(kx - \omega t_1 + \delta) = u_0 \sin(k(x + \lambda) - \omega t_1 + \delta) \rightarrow k\lambda = 2\pi$$

Ugotovimo torej, da je valovni vektor  $k = 2\pi/\lambda$  tem večji, čim manjša je valovna dolžina vala.

- Nihajni čas  $t_0$  je nihajni čas s katerim niha katerikoli košček vrvi pri harmoničnem valovanju,  $\omega$  pa je krožna frekvenca nihanja koščkov. Časovni potek gibanja koščka  $u(x_1, t) = u_0 \sin(kx_1 - \omega t + \delta)$  pri dani legi  $x_1$  je prikazano na Sliki 2.7b. Vsi koščki (pri katerem koli legi  $x_1$ ) nihajo z enako amplitudo  $u_0$ , z enako krožno frekvenco in torej z enakim nihajnim časom. Le faze nihanj med sosednjimi koščki se razlikujejo za  $kx_1$ . Ko je en košček vrvi v skrajni legi, je drug košček v ravnovesni legi itd..

Iz harmoničnega nihanja vemo, da je  $\omega = 2\pi/t_0 = 2\pi\nu$  (1.6), pa izpeljimo to še za valovanje. Med dvema sosednjima trenutkoma, ko je vrv na mestu  $x_1$  v skrajni legi, poteče čas ravno en nihajni čas  $t_0$ . Ker sta oba odmika enaka, se mora spremeniti argument sinusa za  $2\pi$

$$u(x_1, t) = u(x_1, t+t_0) \rightarrow u_0 \sin(kx_1 - \omega t + \delta) = u_0 \sin(kx_1 - \omega(t+t_0) + \delta) \rightarrow \omega t_0 = 2\pi$$

Enaka zveza med  $t_0$  in  $\omega$  velja torej tudi za harmonično valovanje.

Povzemimo pomembne zgornje zveze ter (2.21) med količinami za harmonično valovanje

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k}} \quad \boxed{c = \lambda\nu} \quad \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi\nu} \quad (2.22)$$

Hitrost potovanja motnje  $c$  ima pomen pri vsakem potujočem valovanju, količine  $\lambda$ ,  $k$ ,  $t_0$  ter  $\omega$  pa se nanašajo prav na harmonično valovanje (saj pri splošnem valovanju delci sredstva nujno ne nihajo in slike valovanj nimajo oblike sinusne krivulje).

S pridobljenim znanjem zapišemo tudi potujoči harmoničen val, ki potuje v smeri  $-x$  kjer ima  $g$  (2.13) sinusno obliko

$$\text{val proti } (-x) : \boxed{u(x, t) = u_0 \sin(kx + \omega t + \delta)} \quad (2.23)$$

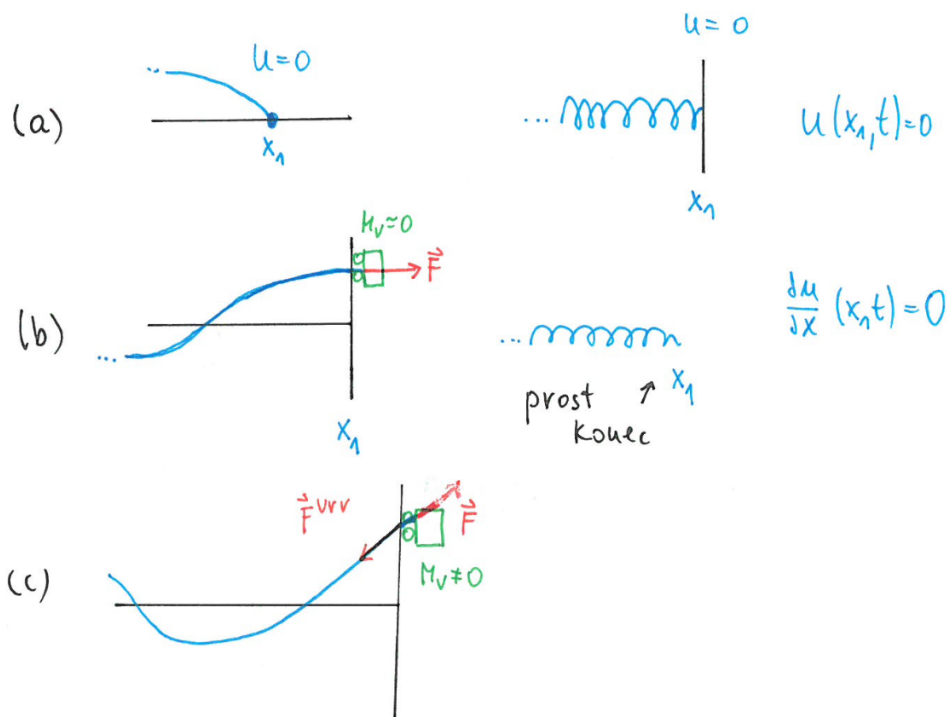
Potujoča valova v desno (2.21) in levo (2.23) predstavljata najpogostejšo različico valovanj v naravi. Sta pa relevantna le za razsežno sredstvo, kjer je vpliv zunanjih sil na robovih sredstva zanemarljiv. V naslednjem poglavju se bomo osredotočili prav na vplive robov sredstva, kjer se valovanje odbije.

## 2.7 Robni pogoji in stoječe valovanje

**Poskus:** Valovanje strune, ki je togo vpeta na obeh koncih.

**Poskus:** Valovanje na vrvi, ki je (i) togo vpeta na obeh koncih, (ii) togo vpeta na enem koncu in vpeta preko gibljivega vozička na drugem.

**Poskus:** Valovanje na vzmeti, ki je (i) prosta na obeh koncih, (ii) prosta na enem koncu in pripeta na trdno steno na drugem.



Slika 2.8: Različni primeri robnih pogojev za valovanje na vrvi ali vzmeti.

Na robu sredstva nanj vplivajo zunanje sile, ki jih pri zapisu valovne enačbe nismo upoštevali. Valovna enačba velja torej le na območjih med robovi sredstva, kjer ne delujejo dodatne sile in navori. Na robovih pa moramo te zunanje sile posebej upoštevati. To storimo z upoštevanjem robnih pogojev, ki so več vrst, zadoščeni morajo biti ob vsakem času  $t$  in so odvisni od situacije na robu sredstva (Slike 2.8 a,b,c)

- (a) *Togo vpetje v ravnovesno lego pri  $x_1$* : Primeri: vpeta vrv; vzmet vpeta na trdno steno; zvočno valovanje v plinu ob trdni steni. Odmik sredstva je na tem mestu ves čas enak nič:

$$\boxed{u(x_1, t) = 0} \quad (2.24)$$

- (b) *Odsotnost sile pri  $x_1$* : Primeri: (i) vrv je na krajišču  $x_1$  vpet na zalo lahek voziček, ki drsi brez trenja, zato na vrv pri  $x_1$  ni sile v transverzalni smeri oziroma  $F_y(x_1) = 0$ . Ta sila je povezana z naklonom vrvi  $F_y = F_0 \tan \varphi = F_0 \frac{\partial u}{\partial x}$  (2.4), zato je naklon vrvi pri  $x_1$  v odsotnosti sile enak nič

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) = 0} \quad (2.25)$$

Vpetje preko vozička še vedno poskrbi za vodoravno napetost  $F_x = F_0$  v vrvi. (ii) Na prostem koncu vzmeti pri  $x_1$  ni zunanje sile,  $F_x(x_1) = 0$ . Sila v vzmeti je sorazmerna



z raztežkom vzmeti pri  $x_1$ . Raztezek dela vzmeti med  $x_1$  in  $x_1 - \delta x$  je enak razliki odmikov  $u(x_1) - u(x_1 - \delta x) \simeq \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\delta x$ . Ob odsotnosti sile na robu vzmeti je tam vzmet ne-raztegnjena kar torej zopet vodi do robnega pogoja (2.25).

- (c) *Primer bolj zapletenega robnega pogoja:* Na rob vrvi pripnemo voziček mase  $M_v$ , ki ni zanemarljiva. Zaradi preprostosti si mislimo, da smo v breztežnem prostoru. Navpična komponenta sile vrvice na voziček ( $F_y^{vrv}$ ) pospešuje voziček in mora biti po 2. Newtonovem zakonu sorazmerna njegovemu pospešku

$$F_y^{vrv}(x_1) = M_v a_y^{voz} = M_v a_y(x_1, t) = M_v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t) \quad \rightarrow \quad \boxed{F_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) = M_v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t)}$$

Pospešek vozička pa je enak pospešku koščka vrvice pri  $x_1$  ker je vrv tu togo pripeta na voziček. Sila  $F_y^{voz}$  vrvice na voziček je po velikosti enaka sili  $F_y$  vozička na vrvico, slednja pa je povezana z naklonom vrvice pri  $x_1$  preko (2.4). Na mestu vpetja  $x_1$  mora biti ob vseh časih torej zadoščen bolj zapleten robni pogoj na desni strani zgornje enačbe. Naklon vrvice oziroma parcialni odvod odmika po  $x$  mora biti sorazmeren z pospeškom vozička oziroma drugim parcialnim odvodom odmika po času. Preverimo še limitne primere. Zelo težak voziček z  $M_v \rightarrow \infty$  se ne premika in predstavlja togo vpetje  $u(x_1, t) = 0$ , če je vpet v ravnovesni legi. Za zelo lahek voziček  $M_v \rightarrow 0$  sledi  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) = 0$  kot v (2.25).

Vsi našteti robni pogoji narekujejo možne valovne dolžine in frekvence pri harmoničnem valovanju.

### Stojno harmonično valovanje

**Poskus:** Zabrenkamo kitarsko struno, ki je na obeh koncih togo vpeti.

**Poskus:** Kratkotrajna potujoča motnja se na togo-vpetem ali prostem robu odbije in potem potuje v obratno smer.

Oglejmo si vpliv robov pri valovanju na struni dolžine  $L$ , ki je togo veta na obeh koncih. Odmikov na robovih ni, torej veljata robna pogoja (2.24) (i)  $u(x = 0, t) = 0$  in (ii)  $u(x = L, t) = 0$ . Potujoči val le v desno (2.21) ali le v levo (2.23) ne zadoščata tem pogojem, saj pri potujočih harmoničnih valovih vsi deli strune nihajo z enako amplitudo in noben ne miruje. Poskusimo robne pogoje zadostiti z vsoto obeh potujočih valov v obeh smereh (2.21, 2.23), saj iz izkušenj in poskusov vemo, da se valovna motnja na robu odbije

$$u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta_1) + u_0 \sin(kx + \omega t + \delta_2) = 2u_0 \sin\left(kx + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)\right) \cos\left(-\omega t + \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2)\right) \quad (2.26)$$

Valova v desno in levo imata lahko različno fazo, oba pa morata imeti enako amplitudo, valovno dolžino in frekvenco, da zadostimo robnima pogojema (i,ii). Desni izraz smo dobili z adicijskim izrekom. Robna pogoja vstavimo v zapisano obliko vala (2.26) in dobimo možne

rešitve za faze ter valovni vektor  $k_n$ , označene z indeksom  $n$

$$(i) u(x=0, t) = 0 \propto \sin(k \cdot 0 + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)) = \sin(\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)) \rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 0$$

$$(ii) u(x=L, t) = 0 \propto \sin(kL + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)) = \sin(kL) \rightarrow kL = n\pi, \quad n \in N$$

$$\boxed{k = k_n = \frac{n\pi}{L}} \quad \boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}} \quad \boxed{2\pi\nu_n = \omega_n = ck_n = c\frac{n\pi}{L}} \quad (2.27)$$

Vrednost valovnega vektorja preko  $c = \nu\lambda = \nu(2\pi/k)$  narekuje tudi frekvenco nihanja sredstva. Slika 2.9 potrjuje, da ničelni odmik na robu res narekuje, da je dolžina  $L = n\frac{\lambda_n}{2}$  mnogokratnik možnih valovnih dolžin. Najpreprostejša rešitev za odmike (2.26) je taka, ki vsebuje en sam način  $n$

$$u(x, t) = 2u_{0n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) = A_n(x) \cos(-\omega_n t + \delta_n), \quad A_n(x) = 2u_{0n} \sin(k_n x) \quad (2.28)$$

kjer smo z  $\delta_n$  označili  $(\delta_1 - \delta_2)/2$ . Takemu valovanju pravimo *stojno valovanje*. Amplituda nihanja koščkov sredstva  $A_n(x)$  je tu odvisna od lege  $x$ . Vsi koščki nihajo z enako frekvenco  $\nu_n$ . Na robovih  $x=0$  in  $x=L$  odmikov res ni in sredstvo miruje zaradi togega vpetja. Pri stojnem valovanju je torej mogoč le diskreten nabor  $k$ ,  $\lambda$  in  $\nu$ , pri potujočem valovanju pa so ti poljubni.

*Poskus:* Lastne frekvence nihanja strune na kitari, ki je napeta s silo  $F_0$ , ima presek  $S$  in gostoto  $\rho_0$  ( $\mu = M/L = \rho S$ ) so

$$2\pi\nu_n = c\frac{n\pi}{L} = \sqrt{\frac{F_0}{\rho S}} \frac{n\pi}{L}$$

Če struno bolj napnemo, se frekvenca zvoka res poveča, kot napoveduje zgornja zveza. Strune z večjim presekom ali gostoto so tiste, ki oddajajo nižje frekvence tonov. Če pritismo prst na prečko, skrajšamo dolžino strune in izvabimo višji ton.

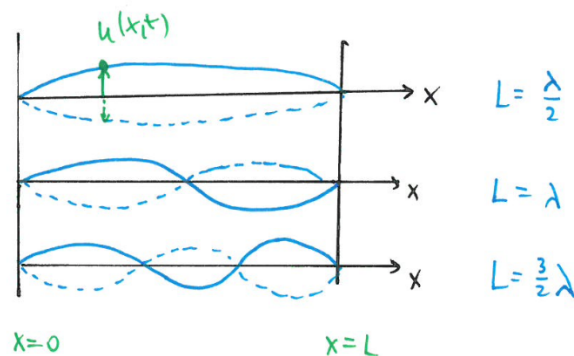
*Splošno valovanje* pri togem vpetju na obeh robovih je poljubna linearna kombinacija prej omenjenih stojnih valovanj z različnimi načini  $n$ .

$$u(x, t) = \sum_n 2u_{0n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (2.29)$$

Vsota rešitev je namreč tudi rešitev (2.15) valovne enačbe. Amplitude  $u_{n0}$  in faze  $\delta_n$  so poljubne in se jih lahko določi iz dane začetne oblike  $u(x, t=0)$  in hitrosti  $\dot{u}(x, t=0)$  s pomočjo Fourierove analize, vendar to presega snov tega predmeta.

## 2.8 Robni pogoji pri valovanju na meji med sredstvoma: odbiti in prepuščeni val

Zvok se pri pravokotnem vpadu na mejo med dvema sredstvoma (na primer med zrakom in vodo) deloma prepusti in deloma odbije. V zraku in vodi velja za odmike valovna enačba,



Slika 2.9: Več lastnih nihajnih načinov stojnega valovanja.

le hitrost valovanja je v obeh sredstvih drugačna. Razmisliti moramo tudi kaj se dogaja na meji med sredstvom, saj v tisti točki ne velja niti ena niti druga enačba. Podobno velja za svetlobo, ki se pri pravokotnem vpadu med zrakom in vodo deloma prepusti in deloma odbije; tedaj v zraku in vodi velja valovna enačba za električno in magnetno polje (in ne za odmike).

Podrobneje si oglejmo preprostejši primer odbitega in prepuščenega valovanja za valovanje v eni dimenziji. Po zelo dolgi vrvi naj iz leve proti desni pride vpadni val poljubne oblike  $F_{vp}$ . Želeli bi določiti prepuščeni in odbiti val, če se pri  $x = 0$  spremeni gostota vrvi kot kaže Slika 2.10.

$$\begin{aligned} x < 0 : c_1 &= \sqrt{F_0/(\rho_1 S)}, & \text{resitev } u_1(x, t) \\ x > 0 : c_2 &= \sqrt{F_0/(\rho_2 S)}, & \text{resitev } u_2(x, t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Na levi pričakujemo vpadni val (v desno) in odbiti val (v levo), na desni pa le prepuščeni val (v desno). Vse nastavimo kot splošne rešitve (2.16)

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= f_1(x - c_1 t) + g_1(x + c_1 t) = f_1(-c_1(t - \frac{x}{c_1})) + g_1(c_1(t + \frac{x}{c_1})) = F_{vp}(t - \frac{x}{c_1}) + F_{od}(t + \frac{x}{c_1}) \\ u_2(x, t) &= f_2(x - c_2 t) = f_2(-c_2(t - \frac{x}{c_2})) = F_{pr}(t - \frac{x}{c_2}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Zapis na desni, kjer smo uvedli le druge spremenljivke in zato preimenovali funkcije, bo poenostavil obravnavo robnih pogojev.

Na vsaki strani velja valovna enačba in ustrezni rešitvi  $u_{1,2}$ . Na meji med sredstvom pa moramo posebej razmisliti kaj velja za odmike vrvi - to so *robni pogoji na meji sredstva*

$$(a) \quad u_1(x = 0, t) = u_2(x = 0, t) \quad (b) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(x = 0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x = 0, t). \quad (2.32)$$

Levi robni pogoj mora biti izpolnjen ob vsakem času, ker tam vrv ni pretrgana in je torej  $u$  zvezen. Desni pogoj sledi iz tega, da morata biti prečni sili  $F_y$  na infinitezimalno lahek košček ( $dm \rightarrow 0$ ) pri  $x = 0$  enaki z leve in iz desne:  $F_{2y} - F_{1y} = dm a_y \rightarrow 0$ . Če temu ne bi

bilo tako, bi bil pospešek tega koščka neskončno velik. Prečni sili pa sta povezani z vzdolžno silo  $F_0$  preko naklonov vrvi  $F_y = F_0 \tan \varphi = F_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ . Enakost velikosti prečnih sil z leve in desne na meji sredstva torej privede do enakosti naklonov oziroma parcialnih odvodov.

Če v levi robni pogoj vstavimo srednji izraz v (2.31), dobimo  $f_1(-c_1 t) + g_1(c_1 t) = f_2(-c_2 t)$ , torej zveze med funkcijami  $f_{1,2}$  in  $g_1$  pri različnih vrednostih argumentov. Bolj prikladni so izrazi na desni (2.31), kjer robna pogoja vodita povezave med funkcijami  $F_{vp,od,pr}(t)$  pri istih vrednostih argumentov  $t$

$$\begin{aligned} (a) \quad F_{vp}(t) + F_{od}(t) &= F_{pr}(t) & (b1) \quad -\frac{1}{c_1} F'_{vp}(t) + \frac{1}{c_1} F'_{od}(t) &= \frac{1}{c_2} F'_{pr}(t) \\ (b2) \quad -\frac{1}{c_1} F_{vp}(t) + \frac{1}{c_1} F_{od}(t) &= \frac{1}{c_2} F_{pr}(t) + K \end{aligned} \quad (2.33)$$

Na desni smo določili parcialni odvod funkcije  $F_{vp}(\eta = t - \frac{x}{c_1})$  po  $x$  in ga naposled izvrednotili pri  $x = 0$ :  $\frac{\partial F_{vp}}{\partial x} = \frac{\partial F_{vp}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = F'_{vp}(t - \frac{x}{c_1})(-\frac{1}{c_1})$ . Črtica naznačuje odvod funkcije po svojem argumentu. Spodnja vrstica sledi z integracijo desne enačbe iz prve vrstice in zato vsebuje poljuben konstantni člen  $K = 0$ . Pri znani obliki  $F_{vp}$  vpadnega vala predstavljata zvezi (a) in (b2) dve enačbi za dve neznanji funkciji  $F_{pr}$  in  $F_{od}$

$$F_{od}(\eta) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} F_{vp}(\eta) + \frac{c_1 c_2}{c_2 + c_1} K \quad F_{pr}(\eta) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} F_{vp}(\eta) + \frac{c_1 c_2}{c_2 + c_1} K .$$

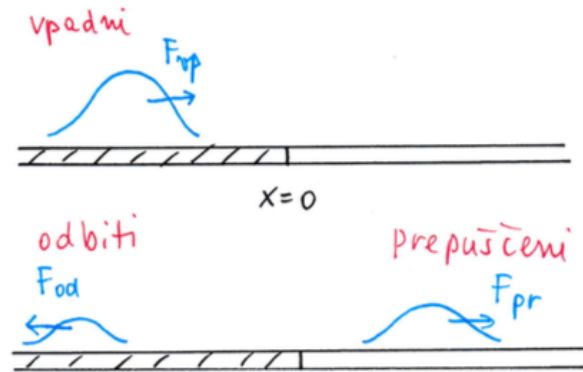
Te funkcije so funkcije ene same spremenljivke in zveze morajo biti izpolnjene za poljuben vrednost argumenta: to smo poudarili tako, da kot argument zapisali poljuben  $\eta$  namesto  $t$ . Uvidimo, da mora biti konstantni člen  $K = 0$ , če naj velja  $F_{pr} = F_{od} = 0$  za  $F_{vp} = 0$ . Določili smo obliko funkcij za prepuščeni in odbiti val, zato brez težav zapišemo končno rešitev valovanja (2.31) na levem in desnem koncu vrvi, ki je izražena z znano obliko vpadnega vala  $F_{vp}$ :

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= F_{vp}(t - \frac{x}{c_1}) + \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} F_{vp}(t + \frac{x}{c_1}) \\ u_2(x, t) &= \frac{2c_2}{c_2 + c_1} F_{vp}(t - \frac{x}{c_2}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

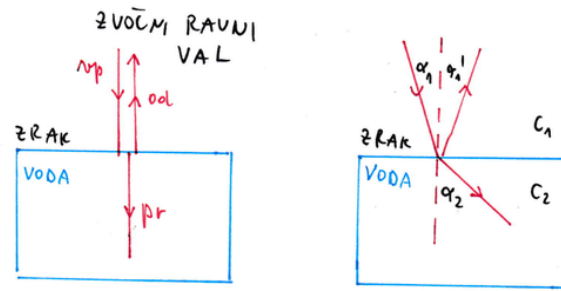
**Zgled:** za obliko vpadnega vala  $F_{vp}(\eta) = K \frac{\sin[\eta/\tau]}{\eta/\tau}$ , kjer je  $\eta = t - x/c_1$  in  $\tau$  neka konstanta z enotami sekunde, dobimo

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= K \frac{\sin[(t - \frac{x}{c_1})/\tau]}{(t - \frac{x}{c_1})/\tau} + \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} K \frac{\sin[(t + \frac{x}{c_1})/\tau]}{(t + \frac{x}{c_1})/\tau} \\ u_2(x, t) &= \frac{2c_2}{c_2 + c_1} K \frac{\sin[(t - \frac{x}{c_2})/\tau]}{(t - \frac{x}{c_2})/\tau} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Opisan pojav botruje delnemu odboju valovanja v eni dimenziji. Zvok potuje v treh dimenzijah in tudi tam opazimo delni odboj pri pravokotnem vpadu na mejo med sredstvoma, na primer med zrakom in vodo. Če vpad na mejo med sredstvoma ni pravokoten, pa opazimo



Slika 2.10: Struni se spremeni gostota in hitrost širjenja valovanja pri  $x = 0$ : odbiti in prepuščeni val na meji med sredstvoma.



Slika 2.11: Levo: Delen odboj zvoka pri pravokotnem vpadu na gladino vode. Desno: Odboj in lom zvoka pri vpadu na gladino vode.

odboj (odbitega vala) in lom (prepuščenega vala) kot prikazuje Slika 2.11. Tega na tem mestu ne bomo preučili preučili. Po analogiji s prejšnjo obravnavo omenimo le, da so odmiki zvočnega vala in krajevni odvodi odmikov na meji med sredstvoma zvezni, torej enaki v zraku in vodi po vsej vodni hladini. Od tod se da z analogno obravnavo kot zgoraj izpeljati odbojni zakon ( $\alpha_1' = \alpha_1$ ), lomni zakon ( $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = c_1 / c_2$ ) ter amplitudi odbitih in prepuščenih valov pri danem vpadnem valu. Hitrost zvočnega valovanja je v vodi večja kot v zraku ( $c_2 > c_1$ ) zato je  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Do odboja in loma pride tudi pri vpadu elektromagnetnega valovanja na mejo med sredstvoma, na primer na mejo med zraku in vodo. Ker pa je hitrost svetlobe v vodi manjša kot v zraku ( $c_2 < c_1$ ), je lomni kot v vodi manjši kot v zraku ( $\alpha_2 < \alpha_1$ ). Te pojave bomo podrobneje opisali pri obravnavi zvoka in svetlobe.

## 2.9 Energija pri valovanju

Življenje na Zemlji v največji meri omogoča energija, ki jo prejmemo preko energije elektromagnetnega valovanja iz Sonca. Energija valovanja, predvsem elektromagnetnega in tudi mehanskega, je v tej luči gotovo pomembna. Pri mehanskem valovanju je energija naložena v kinetični energiji sredstva in najpogosteje tudi v prožnostni energiji, ki nastopi zaradi odmikov sredstva od ravnovesja. Pri svetlobi je energija naložena v energiji električnega in magnetnega polja. Ker valovanje nosi energijo, je energija ali delo potrebno tudi, da ga ustvarimo: delo roke pri nihanju konca vrvi ali vzmeti; delo vloženo pri nihanju opne zvočnika; električno delo porabljeno, da nabijemo kondenzator elektromagnetnega kroga, ki bo naposled oddajal elektromagnetno valovanje.

Podrobneje preučimo energijo pri longitudinalnem valovanju na vzmeti z dano dolžino  $L_0$ , maso  $m_0$  in koeficientom vzmeti  $k_0$ . Tu je namreč obravnava prožnostne energije najbolj nazorna. Na Sliki 2.12 zgoraj je ne-raztegnjena vzmet v ravnovesju, spodaj pa je slika valujoče vzmeti v nekem trenutku  $t$ , kjer so odmiki  $u(x, t)$  v vodoravni smeri. Določimo energijo koščka vzmeti, ki se v ravnovesju nahaja med  $x$  in  $x + \Delta x$ . Kinetična energija koščka  $\Delta W_k$  je sorazmerna s kvadratom hitrosti koščka vzmeti

$$\Delta W_k(x, t) = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho S \Delta x \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]^2$$

$$w_k(x, t) = \frac{\Delta W_k(x, t)}{\Delta V} = \frac{\Delta W_k(x, t)}{S \Delta x} \quad \boxed{w_k(x, t) = \frac{1}{2} \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]^2} \quad (2.36)$$

Vpeljali smo gostoto energije  $w$  pri valovanju

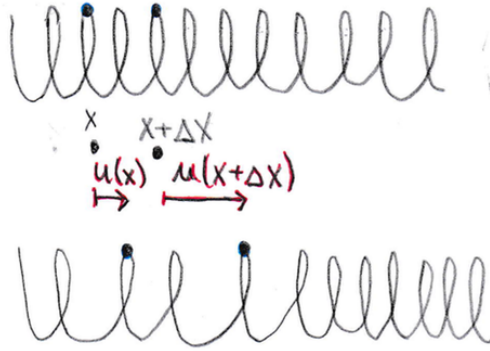
$$\boxed{w(x, t) \equiv \frac{\Delta W(x, t)}{\Delta V}},$$

ki je enaka razmerju energije valovanja na tem koščku in njegovega volumna - gostota energije je v splošnem odvisna od časa in lege.

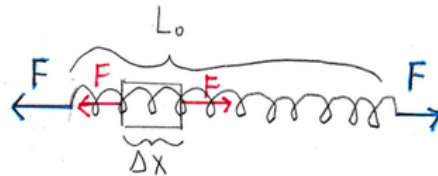
Prožnostna energija koščka  $\Delta W_{pr}$  je sorazmerna s kvadratom raztezka tega koščka vzmeti ter koeficientu vzmeti  $k$  za ta kratek košček  $W_{pr} = \frac{1}{2} k \cdot \text{raztezek}^2$ . Raztezek obravnavanega koščka je  $u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$  in je enak nič, če celotno vzmet togo premaknemo za  $u(x, t) = konst$ . Izpeljimo še koeficient  $k$  za košček vzmeti dolžine  $\Delta x$ , če ima celotna vzmet dolžine  $L_0$  koeficient  $k_0$ . Iz ravnovesja sil na Sliki 2.13 sklepamo, da je sila na celotno vzmet enaka sili na košček,

$$F = k \cdot \text{raztezek} = k_0 \cdot \text{raztezek}_0 \quad \rightarrow \quad k = k_0 \frac{\text{raztezek}_0}{\text{raztezek}} = k_0 \frac{L_0}{\Delta x}$$

razmerje raztezkov celotne vzmeti in koščka  $\frac{\text{raztezek}_0}{\text{raztezek}}$  pa je enako razmerju njunih dolžin.



Slika 2.12: Energija pri longitudinalnem valovanju na vzmeti: na zgornji sliki je vzmet ne-raztegnjena, na spodnji pa so odmiki  $u(x, t)$  odvisni od lege in časa.



Slika 2.13: K izpeljavi koeficienta vzmeti za košček vzmeti dolžine  $\Delta x$ .

Prožnostna energija koščka  $\Delta W_{pr}$  je torej sorazmerna s kvadratom odvoda odmika po kraju

$$\Delta W_{pr}(x, t) = \frac{1}{2}k \cdot \text{raztezek}^2 \simeq \frac{1}{2}k_0 \frac{L_0}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Delta x \right]^2 = \frac{1}{2}k_0 L_0 \Delta x \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]^2 = \frac{1}{2}c^2 \rho S \Delta x \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]^2$$

$$\boxed{w_{pr}(x, t) = \frac{1}{2}c^2 \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]^2} \quad (2.37)$$

V zadnjem izrazu smo prožnostno energijo izrazili s hitrostjo  $c$  valovanja na vzmeti  $c = L_0 \sqrt{k_0/m_0} = L_0 \sqrt{k_0/(\rho L_0 S)}$  - le-to lahko izpeljete sami za vajo podobno kot bomo izpeljali hitrost zvoka.

Izpeljana izraza za gostoto kinetične in prožnostne energije (2.36,2.37) veljata povsem splošno za katerokoli mehansko valovanje v eni dimenziji, čeprav sta bila izpeljana za vzmet. V njiju poleg odvodov po odmiku nastopata le snovni konstanti: gostata snovi in hitrost mehanskega valovanja v tej snovi. Gostota kinetične energije je sorazmerna kvadratu odvoda odmika po času, gostota prožnostne energije pa kvadratu odvoda odmika po kraju. Pri danih odmikih obe rasteta z gostoto snovi.

### Gostota energije in energijskega toka pri harmoničnem potujočem valovanju

Določimo energijo valovanja pri harmoničnem mehanskem valovanju  $u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$ , na primer zvoku. Gostoti energije sta sorazmerni s kvadratom amplitude nihanja

$$\begin{aligned} w_k(x, t) &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta) \\ w_{pr}(x, t) &= \frac{1}{2} \rho c^2 k^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta) = w_k(x, t) \\ w(x, t) &= w_k(x, t) + w_{pr}(x, t) = \rho \omega^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta) \end{aligned} \quad (2.38)$$

kjer smo upoštevali  $c = \omega/k$ . Gostota energije niha z veliko frekvenco v odvisnosti od časa zato je smiselno izračunati časovno povprečje po enem nihajnem času. To je na kateremkoli mestu  $x$  enako

$$\overline{w(x)} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} w(x, t) dt = \rho \omega^2 u_0^2 \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \cos^2(kx - \omega t + \delta) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 \quad \boxed{\overline{w(x)} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2}$$

saj je povprečje funkcije  $\cos^2(\omega t)$  enako  $1/2$ .

Pogosto nas zanima kolikšna energija valovanja preide na časovno in ploskovno enoto. To nam pove *gostota energijskega toka*

$$\boxed{j_W \equiv \frac{\overline{W}}{S t}}$$

ki je enaka količini (časovno povprečne) energije  $\overline{W}$ , ki preide skozi ploskev  $S$  v času  $t$ . To je še posebej relevantno za energijo sončne svetlobe, ki je na primer na Zemeljskem površju  $j_W \simeq 1.4 \text{ kW/m}^2$ , gostota jakosti komaj slišnega zvoka je  $j_W \simeq 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , gostota zvoka na robu bolečine pa  $j_W \simeq 1 \text{ W/m}^2$ . Iz Slike 2.14 je razvidno, da v času  $t$  skozi ploskev  $S$  preide energija  $\overline{W} = V \overline{w} = S(ct) \overline{w}$ , ki je vsebovana v valju dolžine  $ct$  in osnovne ploskve  $S$ , saj valovanje potuje s hitrostjo  $c$

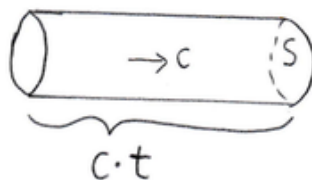
$$j_W = \frac{\overline{W}}{S t} = \frac{\overline{w} ct S}{S t} = c \overline{w} \quad \boxed{j_W = c \overline{w} = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 u_0^2}. \quad (2.39)$$

Gostota energijskega toka raste torej z amplitudo valovanja  $u_0$ , gostoto  $\rho$  in frekvenco valovanja  $\omega$ . Izraz velja za valovanje na vzmeti ali vrvi, pa tudi za zvok, ki ga bomo natančneje obravnavali v naslednjem poglavju.

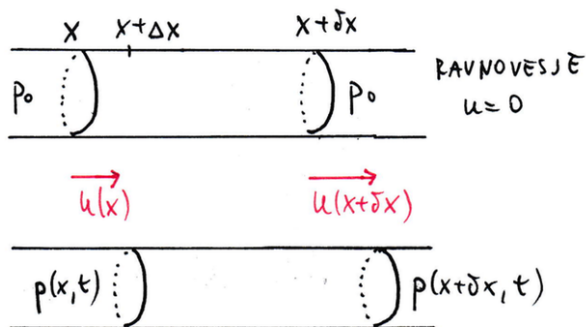
## 2.10 Zvok

Zvok je longitudinalno valovanje v kateremkoli sredstvu - v plinih, kapljevinah ali trdninah. Najlažje si je predstavljati zvok v trdnini, recimo v kovini. Če opazujemo majhen košček kovine s prostornino  $\delta V$  ugotovimo, da se njegova lega spreminja. Odmike koščka od ravnovesne lege označimo z  $u(x, t)$  in so pri longitudinalnem valovanju v smeri širjenja zvoka. Zaradi odmikov sredstva se pojavijo zgoščine in razredčine, torej je gostota sredstva





Slika 2.14: K izpeljavi gostote energijskega toka  $j$  za potujoče valovanje s hitrostjo  $c$ .



Slika 2.15: Izpeljava zvočne hitrosti v eni dimenziji.

$\rho(x, t) = \rho_0 + \delta\rho(x, t)$  odvisna od lege in časa in se spreminja okoli ravnovesne vrednosti gostote  $\rho_0$ . Posledično se spreminja tudi tlak  $p(x, t) = p_0 + \delta p(x, t)$  okoli ravnovesnega tlaka  $p_0$  (ki tu ne označuje nujno povprečnega zračnega tlaka na Zemeljskem površju).

Odmike sredstva pri zvoku v plinu in kapljevini si je nekoliko težje predstavljati zaradi Brownovega gibanja molekul. O mikroskopski sliki za ta primer spregovorimo kasneje.

### 2.10.1 Izpeljava zvočne hitrosti

Obravnavajmo zvočni val v eni dimenziji, ki potuje po trdnini - recimo potovanje zvoka po medeninasti palici. Če palico na levi udarimo, se poveča tlak na levem delu in ta povečan tlak premakne sosednji košček na desni; premik tega povzroči povečanje tlaka na tem mestu in zopet odrine sosedu na desni - tako se širi zvočni val na desno. Podobna je obravnava zvoka v plinu in kapljevini, le da moramo imeti za ta primer v mislih nekatere približke povezane z Brownovim gibanjem, ki jih omenimo na koncu.

Medeninasta palica v ravnovesju je prikazana na Sliki 2.15 zgoraj, kjer je tlak po vsej palici enak ravnovesnemu tlaku  $p_0$ . Spodaj je slika palice v nekem trenutku  $t$  med zvočnim valom, kjer so odmiki medenine od ravnovesne lege enaki  $u(x, t)$ , posledično pa se spremeni tudi tlak  $p(x, t) = p_0 + \delta p(x, t)$ . Podobno kot smo izpeljali hitrost valovanja na vrvi, tudi tu obravnavajmo majhen košček sredstva in zapišimo gibalne enačbe zanj v obliki 2. New-

tonovega zakona  $\sum F = \delta m a$ . Na košček medenine med  $x$  in  $x + \delta x$  delujejo le tlačne sile sosednjih koščkov iz desne in leve, te pa so odvisne od trenutnih tlakov na teh mestih (gravitacijsko silo zanemarimo)

$$\sum F_{ti} = -p(x + \delta x, t) S + p(x, t) S = \rho_0 \delta x S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad (2.40)$$

Masa koščka  $\delta m = \rho_0 \delta x S$  je enaka kar masi tega koščka v ravnovesju, pospešek pa drugemu odvodu odmikov po času.

Do valovanja pride v sredstvih kjer so sile odvisne od odmikov. Pri zvoku je gibanje posledica tlačnih sil in le te so povezane z odmiki. Zato bi želeli tlake v (2.40) izraziti z odmiki, kar nas bo vodilo do že znane valovne enačbe za odmike. Z naraščajočimi tlačnimi silami se volumen  $V$  (in dolžina  $L$ ) koščka zmanjša

$$dV = S dL \propto -dp \quad \boxed{\frac{dV}{V} = -\chi dp} \quad (2.41)$$

Sprememba volumna  $dV$  in dolžine  $dL$  koščka sta sorazmerna s spremembo tlaka  $dp$  podobno kot je raztezek pri vzmeti sorazmeren s silo vzmeti<sup>7</sup>. Sorazmernostni faktor smo označili z  $\chi$  in prestavlja *stisljivost* snovi. Gre za snovno konstanto, ki je odvisna od snovi in je velika za pline in zelo majhna za kapljevine in trdnine, saj se le-te komaj kaj skrčijo ob močnem povečanju tlaka. Vrednosti stisljivosti za različne snovi najdemo tabelirane, izpeljali pa bomo le za razredčene pline z uporabo plinske enačbe.

Tlačni sili  $p(x, t)$  in  $p(x + \delta x, t)$  na spodnji Sliki 2.15 sta po (2.41) nekoliko različni ker sta delčka obravnavanega koščka na levi in desni nekoliko različno raztegnjena. Levemu delčku, ki je v ravnovesju pri tlaku  $p_0$  med  $x$  in  $x + \Delta x$ , se spremeni dolžina za  $u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$  po zvezi (2.41) zaradi spremembe tlaka iz  $p_0$  na  $p(x, t) = p_0 + \delta p(x, t)$

$$\frac{dV}{V} = -\chi dp \quad \rightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, t) - u(x, t)]S}{\delta x S} = -\chi [p(x, t) - p_0] \quad \rightarrow \quad p(x, t) = p_0 - \frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (2.42)$$

Prišli smo do zveze med tlakom na mestu  $x$  in krajevnim odvodom odmika na tem mestu. Podobno je tlak na mestu  $x + \delta x$  odvisen od krajevnega odvoda odmika na tistem mestu. Oba tlaka vstavimo v gibalno enačbo (2.40)

$$\frac{1}{\chi} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = \rho_0 \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

in izrazimo spremembo prvega odvoda z drugim odvodom  $\frac{\partial u}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \delta x$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}}} \quad (2.43)$$

<sup>7</sup>Predznak je pri tlaku obraten saj povišanje tlaka povzroči krčenje, pozitivna sila vzmeti pa je po definiciji obrnjena tako da vzmet razteza.

Odvisnost odnikov s krajem in časom zopet podaja že znana valovna enačba, hitrost širjenja valovanja  $c$  pa je zopet odvisna le od snovnih lastnosti gostote in stisljivosti, ne pa tudi od oblike zvočnega vala. Izpeljana zveza za hitrost zvoka velika za trdnine, pa tudi pline in kapljevine (po pogojih omenjenih v naslednjem odstavku), le vrednosti gostote in stisljivosti snovi moramo poiskati v tabelah.

### Dodatek: Zvok in Brownovo gibanje

V plinu se molekule naključno gibljejo in prečijo v povprečju razdaljo  $\langle l \rangle$  preden trčijo v drugo molekulo. Ob trku se jim smer in velikost hitrost spremeni. Pri zraku v običajnih okoliščinah ( $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $T \simeq 0^\circ\text{C}$ ) je ta povprečna prosta po približno  $\langle l \rangle \simeq 0.3 \mu\text{m}$ . Tega Brownovega gibanja ne zajamemo pri opisu odnikov zgoraj, zato je pomembno, da v zgornji obravnavi obravnavamo "majhen" košček sredstva katerega prostornina  $\delta V = \delta x S \gg \langle l \rangle^3$  je kljub temu mnogo večja od skale na katerem je pomembno Brownovo gibanje. Pri zgornji obravnavi zvoka v zraku imamo torej v mislih košček zraka z volumnom okoli  $1 \mu\text{m}^3$ . Ti koščki pa morajo biti po drugi strani dovolj majhni tako da se znotraj njihovega volumna tlak in gostota ne spremenita občutno. Koščki s prostornino  $1 \mu\text{m}^3$  so gotovo dovolj majhni za obravnavo slišnega zvoka z valovno dolžino  $\lambda = 20 \text{ mm} - 20 \text{ m}$ , ki je mnogo večja od  $1 \mu\text{m}$ . Zvočno valovanje v zraku pri  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $T \simeq 0^\circ\text{C}$  lahko obravnavamo kot smo obravnavali zvok v medenini zgoraj, če le je dolžina valovnih motenj mnogo večja od  $1 \mu\text{m}$ . Za valovne dolžine primerljive ali manjše od  $1 \mu\text{m}$  pa tak opis odpove. Analogno velja za kapljevine, kjer se molekule tudi Brownovo gibljejo (konec dodatka).

## 2.10.2 Zvok v zraku in akustika

Določimo hitrost zvoka (2.43) v zraku. Gostoto  $\rho_0 = pM/(RT)$  in stisljivost  $\chi$  v zraku lahko izrazimo s termodinamskimi količinami, ker ta preprost sistem opisuje plinska enačba. Stisljivost pove za koliko se spremeni volumen zraka ob dani spremembi tlaka. Relevantna je adiabatna stisljivost, kjer pri spremembah ne pride do izmenjave toplote, ker so spremembe hitre. Za adiabatne spremembe velja

$$pV^\kappa = K = \text{konst.} \quad \rightarrow \quad p = K/V^\kappa \quad \rightarrow \quad dp/dV = -\kappa K/V^{\kappa+1} = -\kappa p/V$$

zato je adiabatna stisljivost (2.41)

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{p\kappa}.$$

Hitrost zvoka v zraku je torej

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p\kappa} \frac{pM}{RT}}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 293 \text{ K} \cdot 8300 \text{ J/(kmol K)}}{29 \text{ kg/kmol}}} \sqrt{\frac{T}{293 \text{ K}}} = 342 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{T}{293 \text{ K}}} \quad (2.44)$$

pri  $T = 20^\circ\text{C}$  enaka okoli  $340\text{ m/s}$  in rahlo narašča s temperaturo, kjer smo uporabili podatke za zrak  $M = 29\text{ kg/kmol}$  in  $\kappa = 1.4$ .

**Poskus:** Jakost zvoka, ki ga oddaja šolski zvonec, se manjša z manjšanjem gostote ( $\bar{j} = \frac{1}{2}c\rho\omega^2u_0^2$ ).

**Poskus:** V vakuumu ni zvoka, saj ni sredstva in njegovih odmikov: posodo z zvoncem vakuumiramo in zvonca ne slišimo več.

**Poskus:** Izvir zvoka: opna ali struna, s frekvencami nihanja na slušnem območju. Sprejemnik zvoka: uho, mikrofoni.

**Dodatek:** Zvok je seveda neprecenljivega pomena za človeka, zato omenimo nekaj informacij v povezavi z njim. Območje slišnih valovnih dolžin harmoničnega vala je  $\lambda = 20\text{ mm} - 20\text{ m}$ , kar po  $c = \lambda\nu$  ustreza frekvencam na območju  $\nu = 20\text{ Hz} - 20\text{ kHz}$ . Gostoti energijskega toka  $j_W$  pravimo tudi *jakost zvoka*. Najmanjša jakost, ki jo slišimo pri  $\nu \simeq 1\text{ kHz}$  je  $j_{min} = 10^{-12}\text{ W/m}^2$  kar po  $\bar{j} = \frac{1}{2}c\rho\omega^2u_0^2$  ustreza amplitudi nihanja zgolj  $u_0 = 10^{-11}\text{ m}$ . Uho je torej izredno občutljiv organ, da zazna odmike zraka te velikosti! Pri tem tlak (2.43) niha  $p(x, t) = p_0 - \frac{1}{\chi}\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = p_0 - \frac{1}{\chi}k\cos(kx - \omega t + \delta)$  z amplitudo zgolj  $k/\chi \simeq 30\text{ Pa}$  okoli mnogo večje ravnovesne vrednosti  $p_0 = 10^5\text{ Pa}$  in to naše uho zazna. Ultrazvok je zvok s frekvenco  $\nu > 20\text{ kHz}$  izven slišnega območja. (konec dodaka)

### 2.10.3 Zvok v kapljevini in trdnini

Primerjajmo tipične hitrosti zvoka (2.43) v plinih, kapljevinah in trdninah. Na podlagi tipičnih vrednosti snovnih konstant gostote  $\rho$  in stisljivosti  $\chi$  za tri agregatna stanja sledi

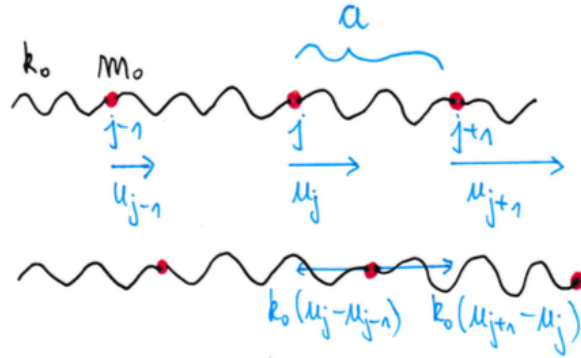
$$\rho_{kaplj,tr} \gg \rho_{pl}, \quad \chi_{kaplj,tr} \ll \chi_{pl} \quad \rightarrow \quad c_{kaplj,tr} > c_{pl}.$$

Hitrost zvoka v trdninah in kapljevinah je torej večja kot v plinih, predvsem zato ker je stisljivost kapljev in trdnin tako zelo majhna. Preglednica podaja hitrost zvoka v nekaterih snoveh

snov( $T=20^\circ\text{C}$ )	zrak	voda	led( $-4^\circ\text{C}$ )	zelezo
$c_{zv}$ [ $\text{m/s}$ ]	340	1500	3200	6000

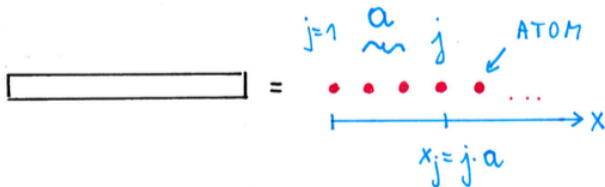
## 2.11 Valovanje po diskretnem sredstvu

Doslej smo uporabljali *zvezen opis* valovanja, kjer ima odmik  $u(x, t)$  vrednost za vsako vrednost lege  $x$ . Vendar je to zgolj približen opis na makroskopskem nivoju. Na mikroskopskem nivoju je vsa snov zgrajena iz gradnikov - atomov - in tu je ustrezen *diskreten opis*. Odmik  $u_j(t)$  opisuje odmik  $j$ -tega atoma ali molekule, ki se v ravnovesju nahaja pri  $x_j$ . Ravnovesne lege  $N$  atomov  $x_{j=1,\dots,N}$ , ki sodelujejo v valovanju predstavljajo diskretno množico točk. Odmik sredstva na "vmesnih" mestih  $x \neq x_j$  nima pomena, saj tam ni atoma ali molekule.



Slika 2.16: Diskreten opis zvočnega valovanja v trdnini na mikroskopskem nivoju. Kroglice predstavljajo atome, vzmeti pa sile med njimi. Zgornja slika prikazuje ravnovesno stanje, spodnja pa stanje med valovanjem.

Podrobneje si oglejmo poenostavljen eno-dimenzionalni primer zvočnega valovanja po trdnini, ki je na mikroskopski skali kubičen kristal. Atomi se nahajajo na razdaljah  $a$ , ki je reda velikosti 1 nm, njihove ravnovesne lege pa so  $x_j = j a$  :



Za obravnavo valovanja moramo razmisliti kakšne so sile na atome, ko se te premaknejo iz ravnovesnih leg. Poglobljeno izpeljavo bi nam dala le kvantna mehanika in poznavanje elektronske strukture kristala. Vendar bodo za opis dovolj le sledeča splošna spoznanja. Kristal je v ravnovesju, ko so atomi v točkah kristalne mreže  $x_j = j a$ , in tedaj sile na gradnike ni. Pri odmiku atomov iz ravnovesne lege morajo sile kazati proti ravnovesni legi, drugače bi kristal razpadel - stabilni kristali so v stabilnem ravnovesju. Pri odmiku enega samega atoma  $j$  temu zadošča  $F_j \propto -u_j(t)$ : sila nanj je v levo pri odmiku v desno (in obratno) in sile ni brez odmika. Temu bi zadoščale tudi druge lihe funkcije odmika  $F_j(u)$ . Odmiki atomov  $u$  v trdnini so res majhni  $u \ll a$ , zato je smiselno liho funkcijo  $F_j(u)$  razviti za male odmike  $u$ . Pri razvoju lihih funkcij je za male odmike vodilen linearni člen  $F_j \propto -k_0 u_j(t)$  z neznano konstanto  $k_0$ . Atom čuti silo kot bi bil povezan na sosede preko vzmeti s konstanto  $k_0$ . Vrednost  $k_0$  bi lahko izpeljali le s pomočjo kvantne mehanike in natančnega poznavanja lastnosti kristala. Ob odmiku več atomov je sila vzmeti enaka raztezk, torej razliki odmikov med sosedoma

$$F = \pm k_0 [u_{j+1}(t) - u_j(t)] .$$

Valovanje v trdnini na mikroskopskem nivoju torej poenostavljeno opišemo s sliko 2.16. Ko udarimo levi atom, se leva vzmet skrči in povzroči na desnega soseda silo v desno. Skrči se

naslednja vzmet kar zopet vpliva na desnega sosedu in valovanje v obliki zgoščine se bo širilo v desno. Izpeljimo še diferencialno enačbo za odmike  $u_j$ . Ob odmiku atomov od ravnovesja kaže na  $j$ -ti atom sila vzmeti z desne  $k_0[u_{j+1}(t) - u_j(t)]$  in leve  $k_0[u_j(t) - u_{j-1}(t)]$ , ustrezen Newtonov zakon pa je

$$F_{vz} = k_0[u_{j+1}(t) - u_j(t)] - k_0[u_j(t) - u_{j-1}(t)] = m_0 \ddot{u}_j(t)$$

$$\boxed{u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t) = \frac{m_0}{k_0} \ddot{u}_j(t)} \quad (2.45)$$

kjer  $m_0$  označuje maso atoma. Prišli smo do  $N$  sklopljenih navadnih diferencialnih enačb za odmike  $u_j$  in  $j = 1, \dots, N$ . Iskanja rešitve za odmike  $u_j(x, t)$  se lahko lotimo na tri načine

1. Točno reševanje kot  $N$  sklopljenih nihali
2. Približno reševanje s Taylorjevim razvojem za počasno spreminjanje odklikov vzdolž trdnine (za  $\lambda \gg a$ ): to bo vodilo do valovne enačbe za odmike, hitrost motnje pa bo neodvisna od njene oblike. To pot uberemo spodaj.
3. Točno reševanje z nastavkom za valovanje  $u_j(t) = u_0 \sin(kx_j - \omega t + \delta)$ . Tako bomo problem rešili pri **seminarju**, hitrost motnje pa v določenih primerih ne bo več neodvisna od njene oblike (disperzija).

Posvetimo se reševanju problema preko drugega pristopa. V mislih imejmo, da se odmiki od atoma do naslednjega atoma spreminjajo zlagoma, opisuje pa naj jih zvezna funkcija odklika  $u(x, t)$ , ki ima vrednosti  $u_j(t) = u(x_j, t)$  na mestih atomov  $x = x_j = j a$ . Odmik na sosednjih mestih  $u_{j\pm 1}$  lahko po Taylorjevem razvoju izrazimo z odklikom  $u_j(t) = u(x_j, t)$  na mestu  $j$  ter parcialnimi odvodi  $u(x, t)$  po kraju

$$u_{j\pm 1}(t) = u(x_j \pm a, t) = u(x_j, t) \pm \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t) a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t) a^2 + \dots \quad (2.46)$$

Napravili smo približek, ki je upravičen le, če so tretji in vsi višji redi v Taylorjevem razvoju zanemarljivi, torej če je spreminjanje odklika po kraju relativno zložno. Izrazimo 2. Newtonov zakon (2.45) z  $u(x, t)$  preko (2.46)

$$k_0[u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) a^2 + u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) a^2 - 2u(x, t)] = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

ki mora veljati za katerikoli  $x = x_j$ . Členi brez odvodov in s prvimi odvodi po legi se pokrajšajo in dobimo

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad c^2 = \frac{k_0 a^2}{m_0} \quad (2.47)$$

To je že dobro znana valovna enačba za zvezno funkcijo odklikov  $u(x, t)$ , ki v našem primerih podaja odmike atomov na mestih  $x = x_j$ . Izpeljali smo tudi hitrost motnje, ki je zopet

neodvisna od oblike motnje, temveč le od lastnosti snovi: konstante  $k_0$ , mase atomov  $m_0$  in njihove medsebojne razdalje  $a$ . Odmiki atomov so rešitve valovne enačbe

$$u_j(t) = f(j a - c t) + g(j a + c t)$$

kjer sta funkciji  $f$  in  $g$  poljubni.

Pomislimo kdaj velja uporabljen približek v Taylorjevem razvoju na primeru harmoničnega valovanja  $u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$ . Velja tedaj, ko so členi reda  $n \geq 3$  zanemarljivi proti drugemu redu

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} a^n = \frac{1}{n} u_0 k^n a^n \sin(kx - \omega t + \delta) \ll \frac{1}{2} u_0 k^2 a^2 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

kjer smo zaradi enostavnosti imeli v mislih sod  $n$ . Zgornja neenačba torej zahteva

$$ka = \frac{2\pi}{\lambda} a \ll 1 \quad \rightarrow \quad \lambda \gg a$$

kar pomeni, da v tem približku lahko obravnavamo valovne dolžine mnogo večje od razdalje med atomi, torej  $\lambda \gg nm$ . Zato smo že v začetku omenili, da obravnavamo primere, kjer se odmiki zložno spreminjajo s krajem.

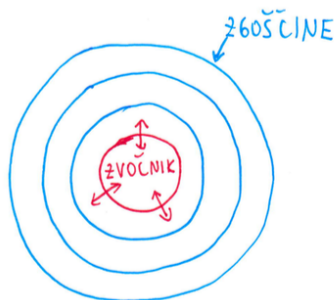
Še enkrat omenimo, da bomo točno rešitev enačbe (2.45) obravnavali pri seminarju. Za  $\lambda$  primerljive z  $a$  bomo ugotovili, da je hitrost valovanja odvisna od valovne dolžine, torej od oblike motnje. Temu pojavu pravimo disperzija.

## 2.12 Valovanje v treh dimenzijah

Valovanje na vrvi, struni ali vzmeti se res širi v eni dimenziji. V tem poglavju obravnavajmo zvok, ki se v splošnem širi v treh dimenzijah. Tedaj je odmik sredstva  $\vec{u}(x, y, z, t)$  v splošnem odvisen od vseh prostorskih koordinat, poleg tega pa ima smer. V poglavju 2.10 smo obravnavali poseben primer, ko so bili odmiki  $u(x, y, z, t) = u_x(x, t)\vec{e}_x$  odvisni le od  $x$  in imeli smer  $\vec{e}_x$ , za odmike pa je veljala valovna enačba (2.8). Brez izpeljave sklepamo, da je posplošena *valovna enačba za valovanje v treh dimenzijah*

$$\boxed{c^2 \left( \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}} \quad \vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t) . \quad (2.48)$$

Ta bi na primer pravilno opisala eno-dimenzionalno valovanje vzdolž palice, ki jo usmerimo vzdolž  $x$ : ker so odmiki  $u(x, t)$  odvisni le od  $x$ , člena z odvodi po  $y$  in  $z$  ne prispevata, kar vodi do prave eno-dimenzionalne enačbe (2.8). Podobno da (2.48) pravo eno-dimenzionalno valovno enačbo za primer če palico usmerimo vzdolž  $y$  ali  $z$ : taka valovna enačba je analogna (2.8), le vloga koordinate  $x$  je zamenjana z  $y$  ali  $z$ . Poleg tega (2.48) zadošča zahtevi po izotropnosti prostora, kjer vse koordinate nastopajo ekvivalentno in izidi fizikalnih poskusov niso odvisni od orientacije laboratorija.



Slika 2.17: Krožno harmonično valovanje, ki ga oddaja kroglen nihajoč zvočnik.

Poleg ravnih valov vzdolž ene dimenzije vsebuje (2.48) mnogo bolj bogato bero rešitev in valovnih pojavov. Obravnavajmo primer krogelnega valovanja, ki ga proizvaja zvočnik, katerega membrana niha radialno in krogelno simetrično. Tedaj je tudi odmik zraka krogelno simetričen in v radialni smeri  $\vec{u}(x, y, z, t) = u_r(r, t)\vec{e}_r$ , odvisen pa je le od razdalje od zvočnika  $r$ . Harmoničen val ima v tem primeru obliko

$$\boxed{\vec{u}(x, y, z, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \delta) \vec{e}_r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.49)$$

To pokažemo tako, da (2.49) vstavimo v (2.48) in ugotovimo, da oblika (2.49) res reši valovno enačbo v treh dimenzijah

$$c^2(-k^2)\frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \delta) = \frac{A}{r}(-\omega^2) \sin(kr - \omega t + \delta)$$

saj se krajevni in časovni del pokrajšata in ostane le  $c = \omega/k$ . Druge odvode kvocienta  $\sin(k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \omega t + \delta)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  po  $x$ ,  $y$  ali  $z$  najlažje poiščemo z Wolframovo Mathematico. Odmiki pri harmoničnem krožnem valu so v radialni smeri  $\vec{e}_r$ , v zraku pa se pojavijo zgoščine in razredčine kot jih prikazuje Slika 2.17.

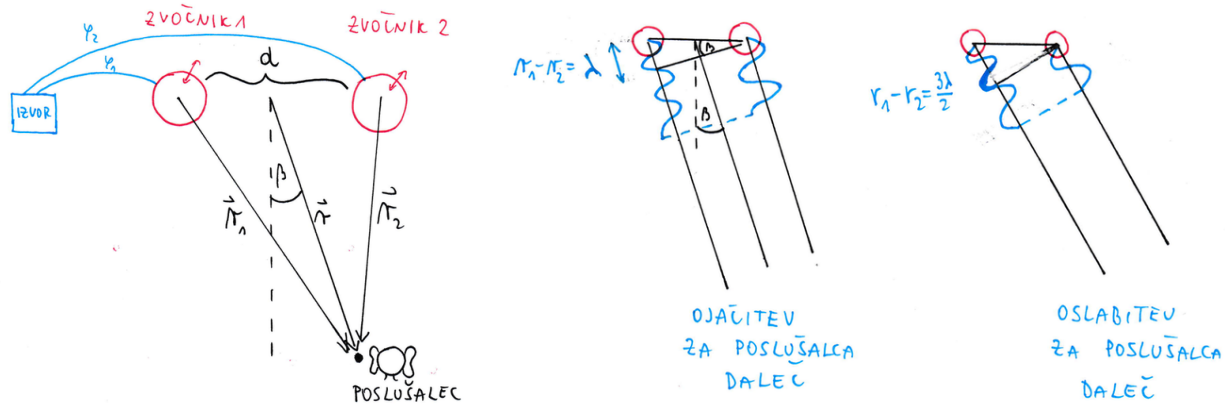
Zvočnik oddaja energijo in pričakujemo, da je energija valovanja, ki preide skozi krogelno ploskev s poljubnim polmerom  $r$  neodvisna od  $r$ . Pokažimo, da je res tako. Časovno povprečje energije, ki preide skozi krogelno lupino  $r$  v času  $t$  je

$$\bar{W} = \bar{j}_W S t = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 \frac{A^2}{r^2} 4\pi r^2 t \quad (\text{neodvisno od } r)$$

Energija je neodvisna od  $r$  saj površina  $S = 4\pi r^2$  raste z  $r^2$ , gostota energijskega toka  $j_W \equiv W/(S t) \propto u_0^2 \propto \frac{1}{r^2}$  (2.39) pa je sorazmerna s kvadratom amplitude odmikov, ti pa pri krogelnem valu (2.49) padajo kot  $\frac{1}{r}$ . Energija tako potuje radialno navzven in se nikjer ne kopiči ali ponika.

Natančneje smo obravnavali sferno simetrično rešitev. Sferno ne-simetrične rešitve niso tako očitne in pri njih je odmik odvisen od kotov  $\phi$ ,  $\theta$ . Izkaže se, da tedaj kotno odvisnost





Slika 2.18: Levo: Interferenca valovanja iz dveh zvočnikov, ki oddajata krožne harmonične valove z isto frekvenco in amplitudo ter različno fazo. Poslušalec je na mesu  $\vec{r}$ . Desni dve sliki: Interferenca valovanja iz dveh zvočnikov z istima fazama, kjer je poslušalec daleč  $|\vec{r}| \gg d$ ; ojačitev valovanja je prikazana na levi in oslabitev pa na desni.

odmikov opisujejo tako-imenovani sferni harmoniki  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ , radialno pa sferne Besslove funkcije  $j_l(r)$ , vendar opis tega pojava presega naš predmet.

## 2.13 Interferenca

Če imamo več različnih izvorov valovanja, na primer več zvočnikov, se odmiki posameznih valovanj vektorsko seštejejo

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_1(\vec{r}, t) + \vec{u}_2(\vec{r}, t) + \dots = \sum_i \vec{u}_i(\vec{r}, t)$$

in temu pojavu pravimo *interferenca*. Pojav je posledica tega, da je valovna enačba (2.48) linearna, kjer odmiki in njihovi odvodi nastopajo le v prvih potencah. Če sta  $\vec{u}_1$  in  $\vec{u}_2$  rešitvi valovne enačbe, je tudi njuna vsota rešitev, kar lahko zlahka preverite ko vsoto vstavite v (2.48).

Kot primer si oglejmo zvočno valovanje, ki ga oddajata dva zvočnika na oddaljenosti  $d$ , ki se napajata iz istega vira (Slika 2.18). Zato nihata z enako amplitudo in frekvenco, le njuni fazi sta lahko različni (na primer zaradi različne dolžine žic). Opazujemo odmik zraka pri legi  $\vec{r}$

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_1(\vec{r}, t) + \vec{u}_2(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_1} \sin(kr_1 - \omega t + \varphi_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{A}{r_2} \sin(kr_2 - \omega t + \varphi_2) \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

kjer sta  $\vec{r}_{1,2}$  odvisna od opazovane lege  $\vec{r}$ , torej od  $r$  in kota  $\beta$ .

Izraz lahko približno poenostavimo pri  $r \gg d$ , kjer sta  $\vec{r}_1$  in  $\vec{r}_2$  približno vzporedna in približno enako velika, kotni funkciji pa lahko seštejemo po adicijskih izrekih ker imata približno enaki amplitudi

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(\vec{r}, t) &= \frac{A}{r} [\sin(kr_1 - \omega t + \varphi_1) + \sin(kr_2 - \omega t + \varphi_1)] \frac{\vec{r}}{r} \\
 &= \frac{A}{r} 2 \sin\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \frac{\vec{r}}{r} \\
 &= u_0^{sk}(\beta, r) \sin\left(kr - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

V prvi vrstici smo pazili, da v argumentu kotne funkcije  $r_1$  in  $r_2$  ne izenačimo, saj vrednost kotne funkcije divje niha pri majhni spremembi  $r$ . Amplitudo nihanja odmkov zraka na mestu  $\vec{r}$  smo označili z  $u_0^{sk}$  in je odvisna od  $r$  ter kota  $\beta$

$$u_0^{sk}(\beta, r) \equiv \frac{A}{r} 2 \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad r_1 - r_2 \simeq d \sin \beta .$$

Kadar sta fazi nihanja obeh zvočnikov enaki ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ), je *amplituda ojačena*, ko je razlika  $r_1 - r_2$  enaka mnogokratniku valovnih dolžin (srednja Slika 2.18)

$$\cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) = \pm 1 \quad \rightarrow \quad k \frac{r_1 - r_2}{2} = n\pi \quad \rightarrow \quad r_1 - r_2 = n\lambda = d \sin \beta , \quad n \in N .$$

Amplituda pa je enaka nič, ko je izpolnjen pogoj

$$\cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad k \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{2n + 1}{2} \pi \quad \rightarrow \quad r_1 - r_2 = \frac{2n + 1}{2} \lambda = d \sin \beta , \quad n \in N$$

in temu pravimo *oslabljena amplituda* (desna Slika 2.18).

**Poskus:** Dva krogelna zvočnika v predavalnici. Namesto, da bi poslušalci otipali amplitude na različnih mestih s hojo po razredu, zvočnika počasi sukamo pri čemer ohranjamo njuno medsebojno razdaljo.

## 2.14 Dopplerjev pojav

## 3. Električno polje

### 3.1 Uvod

**Seminar:** Osnovne v štiri sile: elektro-magnetna, gravitacijska, močna in šibka. Pomembna vloga elektro-magnetizma.

Elektro-magnetna sila je najpomembnejša izmed osnovnih štiri sil v Naravi. Odgovorna je, da se pozitivno nabita jedra in negativno nabiti elektroni vežejo v atome. Zaradi nje se atomi vežejo v molekule, kar je najlažje razumeti pri ionski vezi, ki povezuje pozitiven in negativen ion, na primer  $Na^+$  in  $Cl^-$  v molekuli  $NaCl$ . Odgovorna je tudi za kovalentno vez, ki je najpogostejša vez med atomi v molekuli. Zaradi nje so atomi vezani v kristale, na primer  $Na^+$  in  $Cl^-$  kristal soli  $NaCl$ . Van der Waalsova, ki je posledica elektro-magnetne sile, povezuje molekule v kapljevino, na primer molekule  $H_2O$  v vodi. Tudi pri svetlobi gre za elektromagnetni pojav, kjer se spreminjata električno in magnetno polje.

Tudi velika večina najpomembnejših izpeljanih (torej ne-osnovnih) sil je posledica elektro-magnetne sile. Od teh poznamo sile podlage, vrvice, trenja, vzmeti,... Mnoge v svojih osnovah temeljijo na odboju med elektroni, ki se nahajajo v orbitalah atomov.

Zato elektro-magnetizem predstavlja pomemben del tega predmeta, razdelili pa ga bomo na električno polje, magnetno polje ter elektro-magnetno valovanje. Električno polje  $E$  in magnetno polje  $B$  sta povezani, saj se pri hitrih časovnih spremembah  $E$  ustvari  $B$ , pri hitrih spremembah  $B$  pa  $E$ . Zato bomo električno polje spoznali v treh pomembnih območjih

- A elektrostatiko, kjer se električno polje ne spreminja s časom in magnetnega polja ni
- B počasi-se spreminjajoče električno polje: tu je spreminjanje  $E$  tako počasno, da je pri tem ustvarjeno magnetno polje zanemarljivo

C hitro-se spreminjajoče električno polje

Režima A in B bomo obravnavali v Poglavju "Električno polje" (3), režim C pa pri "Magnetnem polju" (4) in "Elektro-magnetnem valovanju" (5).

### 3.2 Naboj

V 18. stoletju so odkrili (Fey, okoli 1734), da obstajajo dve vrsti električnega naboja: pozitivni in negativni. Istovrstni se odbijajo, nasprotni se privlačijo.

**Kvantizacija naboja:** Poskusi so pokazali, da se naboj pojavlja v diskretnih vrednostih

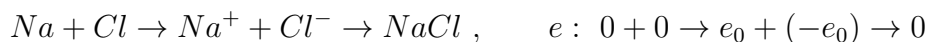
$$e = Ze_0, \quad Z = 0, 1, -1, 2, -2, \dots \quad e_0 \simeq 1.6 \times 10^{-19} \text{ As}$$

Običajna Narava je sestavljena iz elektronov z  $e_e = -e_0$ , protonov z  $e_p = +e_0$  ter nevtralnih nevtronov, kar naravno vodi do naboja  $e = Ze_0$  za snov. Kvantizacija  $e = Ze_0$  velja tudi za vse ostale opažene izolirane delce. To sledi iz nabojev osnovnih delcev

$$e_{e,\mu,\tau} = -e_0, \quad e_\nu = 0, \quad e_{u,c,t} = \frac{2}{3}e_0, \quad e_{d,s,b} = -\frac{1}{3}e_0, \quad e_{W^\pm} = \pm e_0, \quad e_{foton, gluon, Higgs, Z^0} = 0$$

ter iz dejstva, da kvarki ne nastopajo prosti, temveč so vezani v mezone  $\bar{q}_1q_2$  ali barione  $q_1q_2q_3$ . Naboj antikvarka  $\bar{q}$  je enak negativni vrednosti naboja kvarka  $q$ ,  $e_{\bar{q}} = -e_q$ . Izolirani kvarki, ki nosijo ne-celo številske naboje, niso opaženi in zanje obstajajo le posredni dokazi.

**Ohranitev naboja:** V električno izoliranem sistemu se celoten naboj ohranja. Električno izoliran sistem je tak, pri katerem ne obstajajo "poti" (žice) po katerih bi naboj v sistem prišel ali odšel. Naboj se ohranja pri vseh kemijskih reakcijah



in jedrskih reakcijah

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad e : 0 \rightarrow +e_0 + (-e_0) + 0$$

kjer je na desni zapisana bilanca nabojev. Pogosto je snov navzven električno nevtralna, saj je v njej enako število pozitivnih in negativnih nabojev: to najpogosteje velja za pline, trdnine, tekočine, nebesna telesa,...

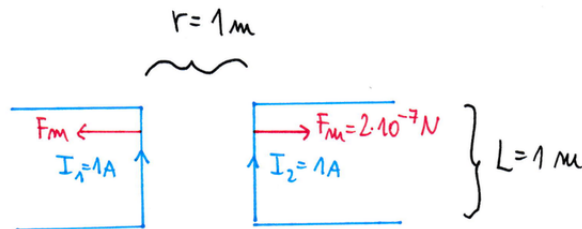
**Enoti A in As:** Enota za naboje je As: 1 As je naboj, ki preteče pri toku 1 A skozi žico v eni sekundi. To predstavlja zelo velik naboj v elektrostatiki (okoli enakomerno nabite krogle s polmerom 1 m se začne v zraku iskriti že pri mnogo manjšem naboju okoli  $10^{-4}$  As). Naj omenimo, da je tok  $I = 1A$  definiran kot tok pri katerem je magnetna sila med en meter dolgima vodnikoma na razdalji 1 m enaka  $F_m = 2 \cdot 10^{-7}$  A (Slika 3.1)<sup>1</sup>. To definicijo osnovne enote A bo kmalu zamenja druga definicija (z uporabo Hallovega učinka).

## A: Elektrostatika

Tu se bomo posvetili pojavom, kjer električni naboji mirujejo. Najpomembnejšo fizikalno količina tu predstavlja električno polje  $E$ , le-to pa se v tem poglavju ne bo spreminjalo s časom.

### Seminar: Film o elektrostatiki

<sup>1</sup>Definicija temelji na  $F_m = I_1I_2\mu_0/L/(2\pi r)$ , ki jo bomo spoznali v elektromagnetizmu in definiciji  $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .



Slika 3.1: Ob definiciji ampera.

Poskus: Sila med naelektrenima kroglama

Poskus: Sila med ploščama kondenzatorja: tehtnica obmiruje, ko je navor električne sile enak navoru teže

Poskus: Naelektritev palice z drgnjenjem s krpo; statični voltmeter

### 3.3 Coulombova električna sila

Poskus: Sila med naelektrenima kroglama

Mnogi poskusi so pripeljali do ugotovitve, da je električna sila med "točkastima" telesoma z nabojema  $e_1$  in  $e_2$  sorazmerna obema nabojema in obratno sorazmerna z njuno medsebojno razdaljo  $r$ :  $F \propto e_1 e_2 / r^2$ . Do te pomembne ugotovitve se je s poskusi prvi dokopal Charles Coulomb okoli leta 1790, sorazmernostnega pred-faktorja pa ni določil. Točkasta telesa so idealizacija, ki pomeni, da so telesa mnogo manjša od medsebojnih razdalj. V tem primeru imamo v mislih, da sta obe telesi mnogo manjši od razdalje  $r$ . Danes vemo, da elektrostatsko silo podaja *Coulombov zakon*

$$F_{el} = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad \epsilon_0 \simeq 8.9 \frac{(As)^2}{N m^2} \quad (3.1)$$

in deluje v smeri zveznice med nabojema: privlačna je za nasprotna naboja  $e_1 e_2 < 0$  in odbojna za istoznačna naboja  $e_1 e_2 > 0$



Sila prvega naboja na drugega je nasprotno enaka sili drugega naboja na prvega po 3. Newtonovem zakonu. Coulombov zakon je izrednega pomena in je eksperimentalno testiran na razdaljah vsaj od  $r \simeq 10^{-15}$  m do  $r \simeq 10^3$  m.

Predfaktor in osnovna konstanta  $\epsilon_0$  sta bila prvič določena konec 18. stoletja z uporabo torzijske tehtnice; v istem obdobju je leta 1797 Cavendish prav tako s pomočjo torzijske tehtnice določil gravitacijsko konstanto  $G \simeq 6.7 \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$  v gravitacijskem zakonu  $F = Gm_1m_2/r^2$ . Naj omenimo, da danes  $\epsilon_0$  ni merjena osnovna konstanta, temveč določena iz zveze za svetlobo hitrost  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , ki je bomo izpeljali v poglavju elektromagnetnega valovanja.

Primerjajmo velikosti dveh pomembnih osnovnih sil: električne in gravitacijske sile med osnovnimi gradniki snovi, na primer med parom protonov na razdalji  $r$

$$\frac{F_{el}^{pp}}{F_{gr}^{pp}} = \frac{\frac{e_0e_0}{4\pi\epsilon_0r^2}}{\frac{Gm_p m_p}{r^2}} \simeq 10^{36}$$

Za maso protona smo vstavili  $m_p = 1g/N_A$  saj  $N_A$  atomov vodika tehta 1 g. Obe sili sta obratno sorazmerni z razdaljo med delcema, zato je razmerje neodvisno od  $r$ . Električna sila med nabitimi osnovnimi gradniki je torej mnogo mnogo večja od gravitacijske; to velja še v večji meri za elektrone, ki nosijo enak naboj, a so mnogo lažji od protonov. To botruje dejstvu, da je obstoječa Narava v veliki meri posledica elektromagnetne sile in ne toliko gravitacijske sile: slednja je pomembna predvsem med električno-nevtralnimi, vendar masivnimi nebesnimi telesi.

Če je nek naboj obkrožen z več naboji, je električna sila nanj vektorska vsota posameznih električnih sil vseh nabojev.

**Zgled:** določimo električno silo na pozitiven naboj  $e > 0$ , ki se nahaja v izhodišču Slike 3.2 in ga obdajajo trije naboji  $e_{1,2,3}$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_1 = \frac{(3e)e}{4\pi\epsilon_0L^2}(1, 0), \quad \vec{F}_2 = \frac{ee}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}L)^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{F}_3 = \frac{(2e)e}{4\pi\epsilon_0L^2}(0, -1)$$

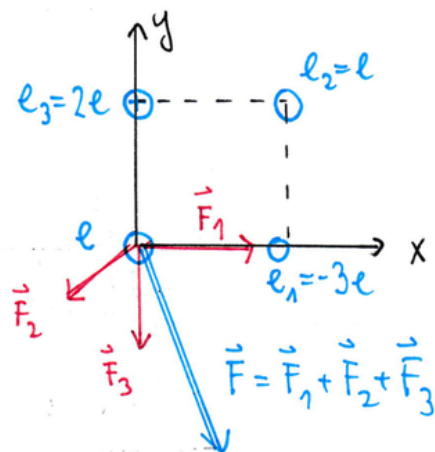
Pri vsaki od sil smo na levi zapisali velikost, na desni pa komponente  $(x, y)$  enotskega smernega vektorja sile, ki ga razberemo iz slike.

Zapišimo še v vektorski obliki električno silo  $\vec{F}_{el}^e$  na točkast naboj  $e$ , ki se nahaja v bližini naboja  $e_1$  (leva Slika 3.3)

$$\vec{F}_{el}^e = \frac{e e_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2 |\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (3.2)$$

## 3.4 Električno polje

Doslej smo stali na stališču, da deluje električna sila med nabitima telesoma na daljavo. V mislih smo imeli, da deluje en naboj po praznem prostoru z električno silo na druge naboje.



Slika 3.2: Električna sila na naboj  $e$  v izhodišču, ki ga obdajajo trije naboji  $e_{1,2,3}$ ;  $e > 0$ .

Mnogo prednosti prinese drugo stališče. Nabito telo (recimo z nabojem  $e_1$ ) spremeni lastnost prostora okoli sebe - v prostoru se pojavi električno polje  $\vec{E}$ . Polje  $\vec{E}(\vec{r})$  ima v vsaki točki prostora velikost in smer, le-ta pa se lahko od točke do točke spreminja - oblika  $\vec{E}(\vec{r})$  je seveda odvisna od porazdelitve naboja  $e_1$  na nabitem telesu. Električno polje povzroča električno silo na druge naboje. Postavimo naboj  $e$  v točko, kjer ima električno polje (ki ga daje nabito telo  $e_1$ ) vrednost  $\vec{E}$ : *električna sila  $\vec{F}_{el}^e$  na naboje  $e$*  naj bo pri obravnavanem stališču odvisna *električnega polja  $\vec{E}$*  v točki, kjer se naboj nahaja, in naboja  $e$

$$\boxed{\vec{F}_{el}^e = e \vec{E}} \quad \text{oziroma} \quad \vec{E} \equiv \frac{\vec{F}_{el}^e}{e} \quad (3.3)$$

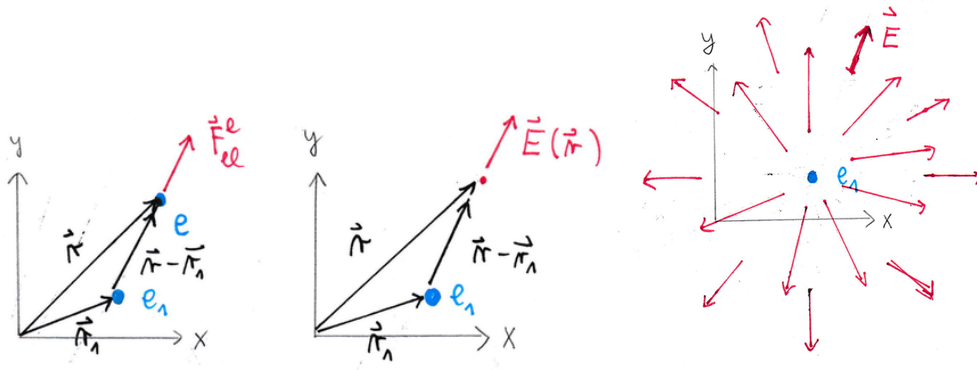
Z zgornjo zvezo smo pravzaprav definirali električno polje iz električne sile na naboj, ki jo že poznamo iz Coulombovega zakona. Testni naboj  $e$  torej lahko uporabimo, da otipljemo električno polje (ki ga dajejo vsi naboji razen  $e$ ) v prostoru. Testni naboj premikamo iz točke do točke in merimo električno silo nanj. Električno polje je kvocient med silo na naboj  $e$  in nabojem  $e$ . Ker naboj  $e$  z silo ne deluje sam na sebe, v električnem polju  $E$  ni prispevka, ki ga daje naboj  $e$ . Enota za električno polje je po definiciji

$$[E] = \frac{N}{As} = \frac{V}{m},$$

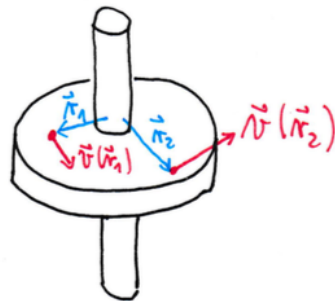
kjer se pogosteje uporablja  $V/m$  in sledi iz definicije enote za napetost ( $V = \text{Volt}$ ,  $VAs = J$ ), ki jo navedemo kasneje (3.26).

Določimo električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  v točki  $\vec{r}$  okoli točkastega naboja  $e_1$ , ki se nahaja pri  $\vec{r}_1$ . V ta namen postavimo v točko  $\vec{r}$  testni naboj  $e$  (leva Slika 3.3). Električno silo na  $e$  že poznamo iz (3.2), električno polje pa je kvocient te sile in naboja  $e$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{el}^e}{e} = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}} \quad (3.4)$$



Slika 3.3: Levo: sila  $\vec{F}^e$  na naboj  $e$  v točki  $\vec{r}$ , ki se nahaja ob naboju  $e_1$  v točki  $\vec{r}_1$ . Na sredini: Električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$ , ki ga daje naboj  $e_1$  na mestu  $\vec{r}$ , otipljemo z testnim nabojem (iz leve slike). Desno: Električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$ , ki ga daje naboj  $e_1$  na različnih mestih  $\vec{r}$ . Naboj  $e_1 > 0$  in  $e > 0$  sta točkasta.



Slika 3.4: Vektorsko polje  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ , ki ponazarja hitrost koščkov togega telesa pri vrtenju.

Vrednost in smer električnega polja v točki  $\vec{r}$  je prikazana na srednji Sliki 3.3, vrednost  $\vec{E}(\vec{r})$  v različnih legah  $\vec{r}$  pa na desni sliki.

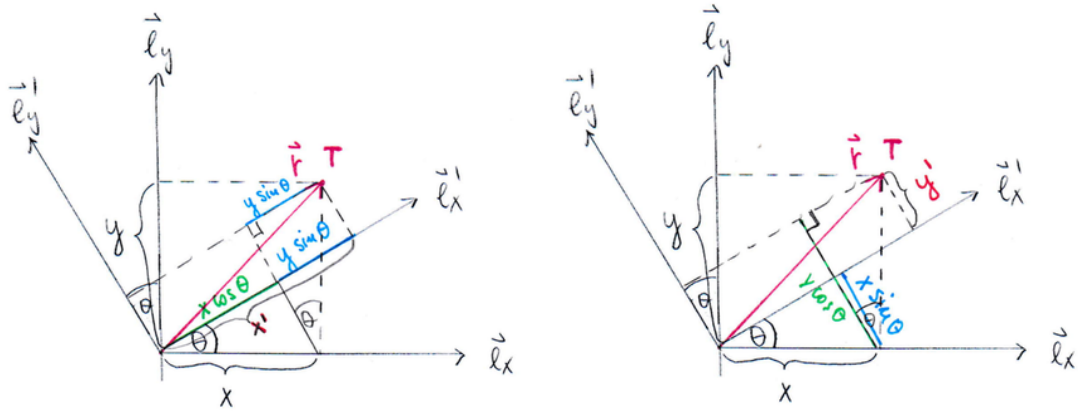
Električno polje je fizikalna količina, ki ima lastnosti *vektorskega polja*. V vsaki točki prostora  $\vec{r}$  ima smer in velikost

$$\vec{E}(\vec{r}) = (E_x(\vec{r}), E_y(\vec{r}), E_z(\vec{r}))$$

pri rotaciji koordinatnega sistema pa se transformira kot lege  $\vec{r}$ . Vektorska polja  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  v fiziki imajo pomembno vlogo in so pogosto tudi časovno odvisna - velikost in smer se lahko od točke do točke spreminjata in se poleg tega lahko spreminjata tudi s časom. Ostali primeri vektorskih polj so na primer hitrostno polje  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  tekočine pri toku reke, hitrostno polje  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  koščkov vrtečega se togega telesa na Sliki 3.4, ter magnetno polje  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

### Seminar : Transformacije vektorskih polj pri rotaciji koordinatnega sistema





Slika 3.5: Transformacija  $x'$  (levo) in  $y'$  (desno) pri vrtežu koordinatnega sistema za kot  $\theta$  okoli osi  $z$ .

Skalarne količine so tiste, ki ne spremenijo vrednosti pri vrtežu koordinatnega sistema. Vektorske količine pa so definirane kot tiste količine, ki se ob tem transformirajo na točno določen način (3.8) spodaj. Da bi prišli do transformacije vektorske količine, določimo transformacijo komponent količine  $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ , ki je prav gotovo vektor. Vektor  $\vec{r}$  ves čas kaže od izhodišča do točke  $T$  na Sliki 3.5, vrtimo le koordinatni sistem in to za kot  $\theta$  okoli osi  $z$ . Vektor  $\vec{r} = (x', y', z') = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z$  še vedno kaže od izhodišča do točke  $T$ , le koordinate  $(x', y', z')$  ima druge, ker so se spremenili bazni vektorji. Iz Slike 3.5 sklepamo

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{aligned} \quad (3.5)$$

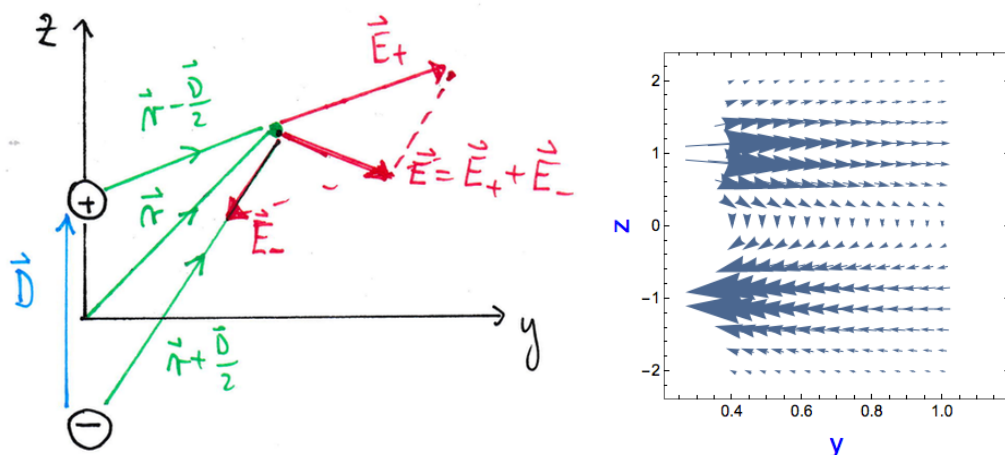
oziroma obratno

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ z &= z' \end{aligned} \quad (3.6)$$

ali z matrikami

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Kadarkoli se pri vrtežu koordinatnega sistema (za  $\theta$  okoli  $z$ ) tri količine transformirajo kot zgoraj, so te količine komponente vektorja. Komponente splošnega vektorja  $\vec{V} = V_x\vec{e}_x +$



Slika 3.6: Polje električnega dipola, ki se nahaja v izhodišču, razdalja med nabojema v dipolu pa je  $D = 2$ . Na desni sliki je prikazano električno polje v ravnini  $x = 0$  na desni strani od dipola.

$V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$  se torej transformirajo

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

pri vrtežu za  $\theta$  okoli osi  $z$  [konec Seminarja].

Kakšno je električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  v točki  $\vec{r}$ , ki ga daje razporeditev več nabojev  $i = 1, \dots, N$ ? Določimo ga po definiciji (3.3) in sile na naboj  $e$ , ki pa je vsota sil posameznih nabojev

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{el}^e}{e} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_{el,i}^e}{e} = \frac{e \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r})}{e} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r})}$$

Električno polje je torej vsota električnih polj, ki jih dajejo posamezni naboji. V splošnem je električno polje vektorska vsota vseh prisotnih električnih polj iz različnih virov.

**Električno polje, ki ga dajejo točkasti naboji**  $e_{1,\dots,N}$  na mestu  $\vec{r}$  (leva Slika 3.8) je enako vektorski vsoti posameznih polj (3.4)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (3.9)$$

**Zgled: Električno polje dipola**

Električni dipol predstavljata dva nasprotno nabita naboja  $+e$  in  $-e$  na oddaljenosti  $D$  (leva Slika 3.6). Mnoge molekule imajo stalen dipol, saj so v celoti nevtralne, težišči negativnega in pozitivnega pa ne sovpadata. Primer je ionska molekula  $Na^+ + Cl^-$  ali molekula vode, kjer je težišče pozitivnega naboja pri vodikih in težišče negativnega pri kisiku. Take molekule v svoji okolici povzročajo električno polje, ki posledično deluje na druge molekule. To na primer vodi do pomembnih Van-der Waalsovih sil, ki molekule vode povezujejo v tekočino. Električno pole okoli dipola je vsota električnih polj obeh nabojev (3.9)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} - \frac{\vec{D}}{2}}{|\vec{r} - \frac{\vec{D}}{2}|^3} - \frac{\vec{r} + \frac{\vec{D}}{2}}{|\vec{r} + \frac{\vec{D}}{2}|^3} \right] = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z - \frac{D}{2} \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z - \frac{D}{2})^2]^{3/2}} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z + \frac{D}{2} \end{pmatrix}}{[x^2 + y^2 + (z + \frac{D}{2})^2]^{3/2}} \right]$$

in ga v ravnini  $x = 0$  prikazuje desna Slika 3.6. Z oddaljenostjo od dipola pada električno hitreje kot z oddaljenostjo od samega naboja  $e$ . vzdolž osi  $y$

$$\vec{E}(x = 0, y, z = 0) = -\frac{eD}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[y^2 + (\frac{D}{2})^2]^{3/2}} \vec{e}_z \simeq -\frac{eD}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \vec{e}_z$$

pada polje približno s tretjo potenco oddaljenosti (pri  $y \gg D$ ). Električne sile tega polja na ostale dipole v okolici imenujemo Van der Waalsova sila. Ta je zaradi hitrega padanja majhna in ne more vezati sestavnih delcev v molekule, lahko pa vleče molekule v kapljevino.

**Zgled:** Določimo še **vpliv zunanega električnega polja  $\vec{E}$  na električni dipol**. Celotna električna sila nanj  $\vec{F}_{el} = e\vec{E} - e\vec{E} = 0$  je enaka nič, ne-ničelen pa je navor (Slika 3.7)

$$\vec{M}_{el} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- = \frac{\vec{D}}{2} \times e\vec{E} + (-\frac{\vec{D}}{2}) \times (-e\vec{E}) = e\vec{D} \times \vec{E}.$$

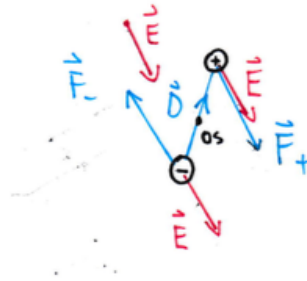
Električni dipol je v stabilnem ravnovesju, ko je vektor  $\vec{D}$  (ki povezuje naboja) vzporeden z  $\vec{E}$  - tedaj je navor enak nič.

**Poskus:** Semena v ricinusovem olju kažejo smer polja (primer polja dipola in polja točkastega naboja). V semenih se v polju inducira dipol: razmaknejo se naboji.

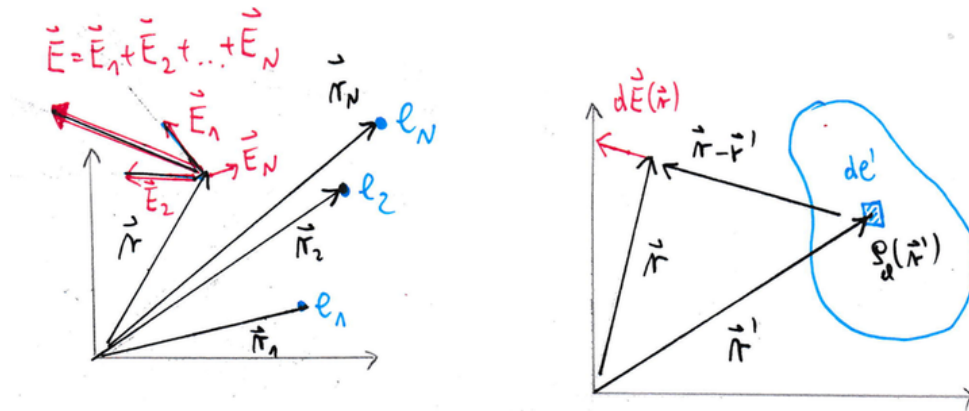
Določimo še **električno polje, ki ga daje večje splošno nabito telo** na desni Sliki 3.8. To samo ne predstavlja točkastega naboja, lahko pa ga razdelimo na zelo majhne (točkaste) naboje, za vsakega določimo prispevek  $dE(\vec{r})$  električnega polja na mestu  $r$  po (3.4). Majhen košček telesa z volumnom  $dV'$  nosi naboj  $de' = \rho_{el}(\vec{r}')dV'$ , ki je odvisen tudi od lege koščka  $\vec{r}'$ . Naposled vektorsko seštejemo vse prispevke  $d\vec{E}(\vec{r})$  na mestu  $\vec{r}$ , kar privede do integracije po prostornini  $dV' = d^3\vec{r}'$  nabitega telesa

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.10)$$

**Zgled: Električno polje enakomerno nabite palice** (Slika 3.9)



Slika 3.7: Navor na električni dipol v homogenem zunanjem polju  $\vec{E}$ .



Slika 3.8: Levo: Električno polje  $\vec{E}(\vec{r})$  na mestu  $\vec{r}$ , ki ga dajejo točkasti naboji  $e_{1,\dots,N}$ . Desno: Električno polje na mestu  $r$ , ki ga daje večje nabito telo, ki ga opišemo z zvezno porazdelitvijo naboja in ima gostoto nabojev  $\rho_{el}(\vec{r}')$  odvisno od kraja.

Električno polje večjega telesa določimo po (3.10) tako, da ga v mislih razdelimo na majhne točkaste naboje - v tem primeru odseke z majhno dolžino  $dx$ . Določimo polje v oddaljenosti  $r$  nad sredino palice. Polja  $dE$ , ki ga daje odsek pri  $x$  dolžine  $dx$  je

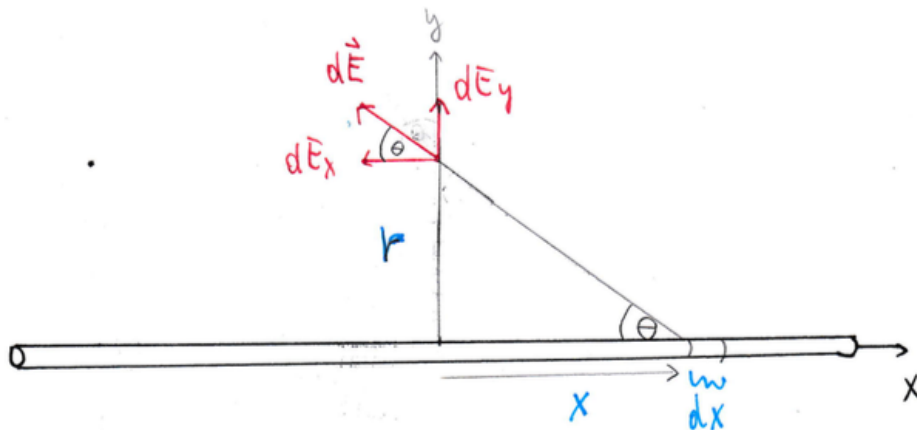
$$|d\vec{E}| = \rho_{el} S dx \frac{1}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)}, \quad d\vec{E} = (dE_x, dE_y) = |d\vec{E}|(-\cos\theta, \sin\theta) = |d\vec{E}|\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}, \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right)$$

saj je naboj tega odseka  $de = \rho_{el} S dx$  ( $\rho_{el}$  je enakomerna gostota naboja vzdolž vse palice). Vsota vseh prispevkov v  $x$  smeri se pokrajša

$$E_x = - \int_{x=-L/2}^L \frac{\rho_{el} S dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 0$$

ker je pod integralom liha funkcija  $x$ , v smeri  $y$  pa se prispevki seštevajo

$$E_y(r) = \int_{x=-L/2}^L \frac{\rho_{el} S dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\rho_{el} S}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + r^2}}, \quad E_y(r, L \gg r) \simeq \frac{\rho_{el} S}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (3.11)$$



Slika 3.9: Električno polje enakomerno nabite palice dolžine  $L$ . Pole opazujemo na oddaljenosti  $r$  nad sredino.

Električno polje tokrat pada z radaljo  $r$  od palice in ne s kvadratom razdalje  $r^2$  kot pri točkastem naboju.

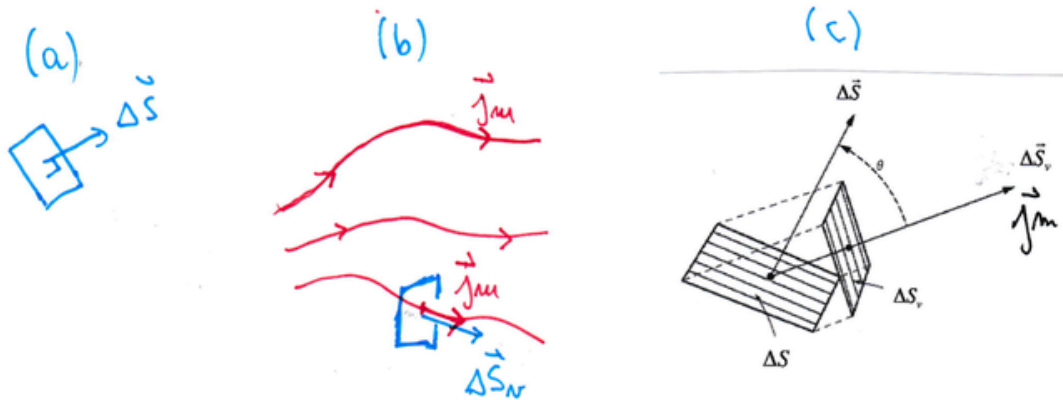
## 3.5 Električni pretok

Električno polje okoli nabojev določa Coulombov zakon (3.1), le-tega pa lahko preoblikujemo v drugačno obliko - zakon o električnem pretoku. Ta zakon podaja zvezo med porazdelitvijo nabojev in električnim poljem okoli njih, oziroma električnim pretokom, ki ga bomo definirali. Oblika tega zakona poda nov uvid v elektromagnetizem in predstavlja eno od štirih Maxwellovih enačb, ki v celoti opisujejo elektro-magnetizem. Mi ga bomo izpeljali iz Coulombovega zakona, pogosto pa se smatra štiri Maxwellove enačbe kot osnovne (ne-izpeljane) zakone iz katerih sledijo vse lastnosti elektromagnetizma.

### 3.5.1 Definicija pretoka

Pretok neke vektorske količine skozi neko ploskev je pomembna količina v tovrstnih zakonih. Pretok pogosto povezujemo s pretokom snovi, zato definirajmo pretok na primeru masnega pretoka tekočine - potem bomo analogno definicijo uporabili pri električnem pretoku, kjer ne gre za pretakanje snovi. Pretok se nanaša na (pogosto namišljeno) ploskev, skozi katero ga določamo. Ploskev definiramo za vektorjem  $\Delta\vec{S}$ : njena velikost je  $|\Delta\vec{S}|$  in leži v ravnini pravokotni na smer  $\Delta\vec{S}$  (Slika 3.10a).

**Masni pretok:** Masni pretok  $\phi_m = \Delta m / \Delta t$  pove koliko mase tekočine preteče na časovno enoto izbrano ploskev. Gostota masnega toka  $j_m$  podaja masni pretok na ploščinsko



Slika 3.10: Ob definiciji masnega pretoka.

enoto  $\Delta S_v$ , ko je ploskev  $\Delta \vec{S}_v$  vzporedna z smerjo toka  $\vec{e}_j$  (Slika 3.10b)

$$\vec{j}_m \equiv \frac{\Delta \phi_m}{\Delta S_v} \vec{e}_j, \quad \Delta \vec{S}_v \parallel \vec{e}_j. \quad (3.12)$$

Vprašajmo se še po masnem pretoku  $\Delta \phi_m$  skozi ploskev  $\Delta \vec{S}$  na Sliki 3.10c, ki ni vzporedna z smerjo  $\vec{j}_m$  temveč je nagnjena glede nanj za kot  $\theta$ . Masni pretok  $\Delta \phi_m$  skozi  $\Delta S$  je enak masnemu pretoku skozi  $\Delta S_v$  (saj skozi obe preteče v časovni enoti enako mase), slednjega pa določimo z uporabo definicije (3.12)

$$\Delta \phi_m = j_m \Delta S_v = j_m \Delta S \cos \theta = \vec{j}_m \cdot \Delta \vec{S}. \quad (3.13)$$

Pri drugem enačaju smo uporabili dejstvo, da sta velikosti površin povezani kot  $\Delta S_v = \Delta S \cos \theta$ , pri tretjem pa smo rezultat izrazili z skalarnim produktom. Masni pretok  $\Delta \phi_m$  skozi poljubno ploskev  $\Delta \vec{S}$  na Sliki 3.10c je torej enak skalarnemu produktu vektorja ploskve  $\Delta \vec{S}$  in vektorja gostote toplotnega toka  $\vec{j}_m$

$$\boxed{\Delta \phi_m = \vec{j}_m \cdot \Delta \vec{S}} \quad (3.14)$$

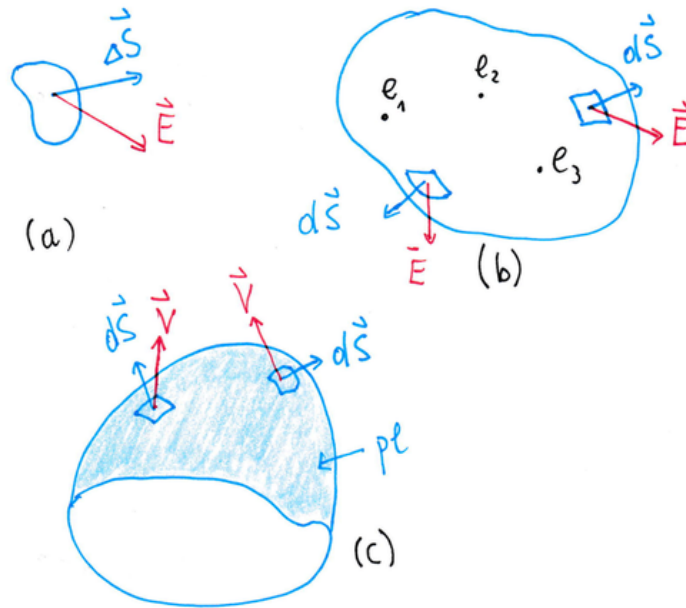
Pretok  $\Delta \phi_m$  pove koliko mase preteče skozi  $\Delta S$  preteče v časovni enoti in je nič za ploskev  $\vec{S} \perp \vec{j}_m$ , ter največji za ploskev  $\vec{S} \parallel \vec{j}_m$ .

### Električni pretok

V prostoru, kjer je električno polje, definiramo električni pretok  $\Delta \phi_{el}$  skozi ploskev s pravokotnico  $\Delta \vec{S}$  po analogiji z masnim pretokom (Slika 3.11)

$$\boxed{\Delta \phi_{el} \equiv \epsilon_0 \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}} \quad (3.15)$$

kjer imamo v mislih dovolj majhno ploskev, da je električno polje po njeni površini približno konstantno. Konstanta  $\epsilon_0$  nastopa v definiciji, da bo imel zakon o električnem pretoku lepšo



Slika 3.11: (a) Ob definiciji električnega pretoka. (b) Zakon o električnem pretoku. (c) Pretok vektorskega polja  $\vec{V}$  skozi poljubno ploskev  $pl$ .

obliko. Pretok je različen od nič, ko je na mestu ploskve električno polje in ima ne-ničelno komponento pravokotno nanjo.

Pretok poljubnega vektorskega polja  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  skozi poljubno ploskev na Sliki 3.11c dobimo tako, da površino ploskve razdelimo na majhne dele  $\Delta\vec{S}_i$  (kjer je  $\vec{V}$  približno konstanten) in pretoke skozi vse dele seštejmo. V limiti infinitezimalno majhnih ploskev  $d\vec{S}$  dobimo *ploskovna integrala* za pretok polja  $\vec{E}$

$$\phi_{el} = \epsilon_0 \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i, \quad \boxed{\phi_{el} = \epsilon_0 \int_{pl} \vec{E} \cdot d\vec{S}} \quad (3.16)$$

### 3.5.2 Zakon o električnem pretoku - Gaussov zakon

*Zakon o električnem pretoku* pove, da je električni pretok skozi *zaključeno ploskev* enak objemu naboju  $e^{objet}$  (Slika 3.11)

$$\boxed{\phi_{el}^z = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = e^{objet}} \quad (3.17)$$

Predstavlja eno izmed štirih osnovnih Maxwellovih enačb elektrodinamike. Krožec na simbolu za integral skupaj z integracijsko spremenljivko  $d\vec{S}$  pove, da gre za *zaključeno ploskev*. Smer  $d\vec{S}$  po definiciji kaže vedno ven iz zaključene ploskve. Enak pomen ima indeks  $z$  v

pretoku  $\phi^z$ . Zakon velja povsem splošno: v elektrostatiki, pa tudi za primere ko sta prisotna skupaj časovno odvisno električno in časovno odvisno magnetno polje. Tedaj zakon narekuje vrednost pretokov  $\epsilon_0 \oint \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} = e^{objet}(t)$  v vsakem trenutku  $t$ .

### 3.5.3 Dokaz zakona o električnem pretoku

Zakon o električnem pretoku bomo dokazali na podlagi Coulombovega zakona oziroma znanelega električnega polja okoli točkastega naboja.

**Za krogelno ploskev in točkast naboj  $e$  v njenem središču:** Električno polje okoli točkastega naboja v izhodišču ima radialno smer, pretok skozi krogelno ploskev z radijem  $r$  pa je

$$\phi_{el}^z = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oint E dS = \epsilon_0 E \oint dS = \epsilon_0 E S \quad (3.18)$$

Zgornje zveze veljajo za vsak primer, kjer je  $\vec{E}$  povsod vzporeden s ploskvijo (drugi enačaj) in kjer ima  $E$  po vsej ploskvi enako velikost (tretji enačaj) - kar bo prišlo prav tudi pri nekaterih zgledih. Vstavimo vrednost električnega polja  $E = e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$  in površino krogelne ploskve  $S = 4\pi r^2$  in dobimo

$$\phi_{el}^z = \epsilon_0 \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = e = e^{objet}$$

da je pretok skozi krogelno ploskev poljubnega radija res enak objetemu naboju.

**Seminar: Za poljubno obliko ploskve in poljubno porazdelitev naboja**

### 3.5.4 Uporaba zakona o električnem pretoku

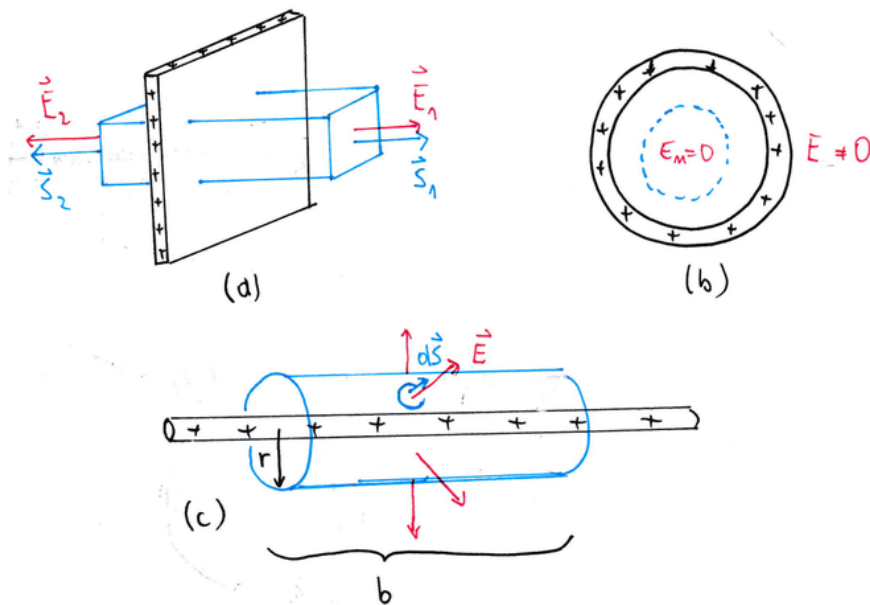
Za nekatera simetrična nabita telesa je lažje izračunati električno polje z uporabo Gaussovega zakona kot preko integrala (3.10). Tedaj izberemo ploskev v skladu z simetrijo telesa in v Gaussovem zakonu  $E$  obravnavamo kot neznanko. Pri obravnavi problema se sklicujemo na simetrije problema in v nekaterih primerih tedaj velja zveza (3.18).

**Zgled:  $E$  okoli (neskončno) velike enakomerno nabite plošče** z površinsko gostoto naboja  $\sigma = \Delta e / \Delta S$  (Slika 3.12a): V skladu z simetrijo problema zdaj obravnavamo ploskev v obliki kvadra, polje pa povsod kaže pravokotno na ploskev in je enako veliko. Pretok je enak nič na štirih prečnih stranicah, ker je polje pravokotno na ploskve. Pretok skozi ostali dve stranici z površino  $S$  je

$$\phi_{el}^z = 0 + \epsilon_0 (\vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2) = \epsilon_0 E 2S = e^{objet} = \sigma S \quad \rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}. \quad (3.19)$$

Polje okoli neskončno velike plošče je torej znotraj vsakega polprostoru *homogeno* - neodvisno od oddaljenosti od plošč in enako po smeri in velikosti:  $\vec{E} = konst.$  V naravi so seveda vse plošče končno velike in argumenti pri izpeljavi veljajo za zaključene ploskve  $\int d\vec{S}$ , ki so mnogo manjše od razsežnosti plošče. Posledično je polje približno enako (3.19) stran od robov in na razdaljah od plošče, ki so mnogo manjše od velikosti plošče.





Slika 3.12: Uporaba zakona o električnem pretoku za (a) neskončno in končno veliko enakomerno nabito ploščo, (b) votlino znotraj krogelno nabite lupine, (c) neskončno dolgo enakomerno nabito palico,

**Poskus:** Sila med ploščama ploščatega kondenzatorja pri tehtnici: Ploščat kondenzator ima plošči s površino  $S$  in nasprotnima naboje  $e$  in  $-e$ . Sila na zgornjo ploščo je enaka produktu naboja pozitivne plošče in polja  $E_-$ , ki ga na tem mestu daje negativna plošča,  $F_{el} = eE_- = e \frac{e/S}{2\epsilon_0} = e^2/(2\epsilon_0 S)$ . V ravnovesju velja  $\vec{M}_{el} + \vec{M}_g = 0$ .

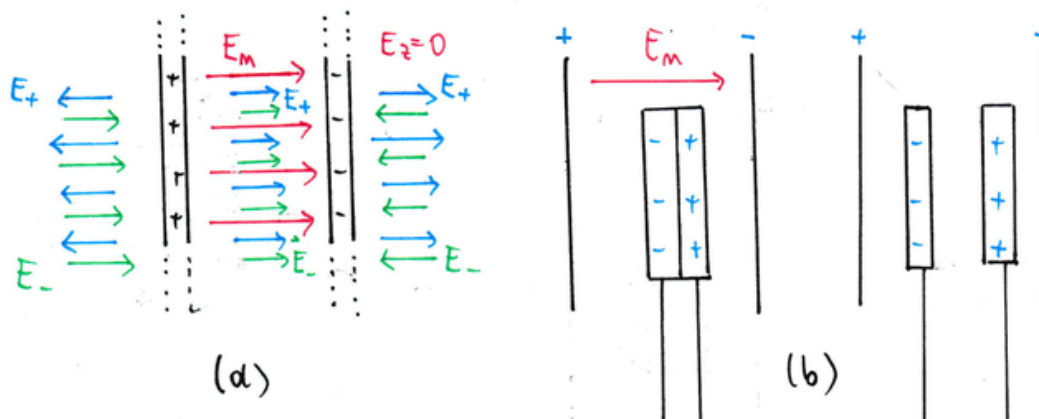
**Zgled: Polje v ploščatem kondenzatorju** (Slika 3.13a), kjer je razsežnost plošč s površino  $S$  mnogo večja od razdalje  $d$  med ploščama, plošči pa nosita naboja  $e$  in  $-e$ . Električno polje pozitivne plošče  $E_+$  in negativne plošče  $E_-$  se znotraj seštejeta

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \quad E_n = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0 S}, \quad E_z = 0$$

in vodita do (približno) homogenega električnega polja - to je polja, ki je znotraj kondenzatorja približno povsod enako veliko. Zunaj kondenzatorja se prispevka (približno) izničita in polja ni. Naj še enkrat poudarimo, da izračun na podlagi uporabljenih simetrijskih argumentov (3.19) velja stran od robov kondenzatorja.

**Poskus:** Influenca v ploščatem kondenzatorju.

**Influenca:** Prisotnost električnega lahko dokažemo z influenco. Če sta dve kovinski lopatki sklenjeni, se v električnem polju naboji zaradi električne sile  $F_{el} = eE$  razmaknejo. Na eni lopatki je pribitek pozitivnega naboja, na drugi pa negativnega, kar velja tudi po tem ko lopatke razmaknemo. Prisotnost nabojev lahko pokažemo na elektroskopu.



Slika 3.13: (a) Električno polje v ploščatem kondenzatorju; (b) influencia.

**Zgled:  $E$  znotraj enakomerno nabite krogelne lupine** (Slika 3.12b): Za krogelno ploskev znotraj lupine velja (3.18)  $E_n = e^{objet}/(\epsilon_0 S) = 0$  saj nismo objeli nič naboja, pri čemer smo se sklicevali na krogelno simetrijo problema. Polje je povsod znotraj lupine enako nič. Franklin in Priestly (okoli 1767) predlagata, da bi bilo to lahko posledica  $F_{el} \propto 1/r^2$ . Coulomb to potrdi z meritvami 1790. Če naboji ne bi bili enakomerno porazdeljeni, bi zakon o električnem pretoku še vedno veljal, argument s krogelno simetrijo pa ne in polje v splošnem ne bi bilo enako nič.

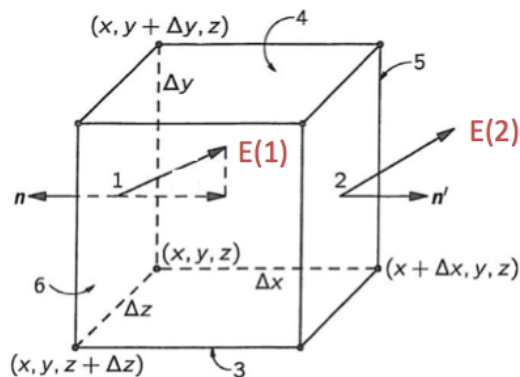
**Poskus:** Votla krogla na elektroskopu; z influenco pokažemo, da polja zunaj je, znotraj pa ne.

**DN:** Določite  $E$  znotraj in zunaj enakomerno nabite krogle s polmerom  $r$  in gostoto naboja  $\rho_{el}$ .

**Zgled:  $E$  okoli (neskončno) dolge enakomerno nabite palice** (Slika 3.12c): Za valjasto ploskev polmera  $r$  in dolžine  $b$  je pretok skozi robni plošči enak nič. Pretok skozi plašč pa je po zvezi (3.18) enak  $\epsilon_0 2\pi r b$ . Iz količine objetega naboja znotraj valja po zakonu o električnem pretoku določimo električno polje

$$E = \frac{e^{objet}}{\epsilon_0 S} = \frac{\rho_{el} S b}{\epsilon_0 2\pi r b} = \frac{\rho_{el} S}{\epsilon_0 2\pi r}$$

kar se sklada z direktnim izračunom za neskončno dolgo palico (3.11). Pri neskončno dolgi palici smo se sklicevali na to, da je polje po vseh površini ploskve enako veliko. Pri končni palici to ni več upravičeno in ga ne moremo več izluščiti po zakonu o električnem pretoku, čeprav ta še vedno velja. Za končno palico napravimo integral (3.10,3.11).



Slika 3.14: Dokaz Gaussovega zakona (3.20) za pretok skozi majhno kockasto ploskev

### 3.5.5 Zakon o električnem pretoku v diferencialni obliki

Zakon o električnem pretoku v integralni obliki (3.17) velja vedno, vendar je za izračun polja uporaben le za redke simetrične porazdelitve naboja. Te omejitve se znebimo pri zapisu zakona (3.17) za zelo majhno kockasto ploskev, iz česar sledi diferencialna oblika zakona o električnem pretoku

$$\epsilon_0 \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x}(\vec{r}, t) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\vec{r}, t) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(\vec{r}, t) \right] = \rho_{el}(\vec{r}, t) \quad (3.20)$$

Na levi nastopajo parcialni odvodi električnega polja po kraju v neki točki  $\vec{r}$ , na desni pa lokalna gostota električnega naboja v tej točki  $\vec{r}$ . Pri dani porazdelitvi naboja  $\rho_{el}(\vec{r})$  lahko določimo polje  $\vec{E}(\vec{r})$ , če znamo rešiti zgornjo parcialno diferencialno enačbo. Pri matematiki boste spoznali, da se izraz v (3.20) znotraj [...] ujema z definicijo *divergence* vektorskega polja - v tem primeru električnega polja  $div \vec{E}$ .

#### Seminar: dokaz zakona o električnem pretoku v diferencialni obliki za majhno kockasto ploskev

Dokažimo Gaussov zakon (3.17) za majhen kockast volumen na Sliki 3.14. Obravnavajmo primer, ko je v prostoru poljubno električno polje  $\vec{E}(x, y, z)$ , ki je lahko tudi časovno odvisno, vendar te odvisnosti ne bomo posebej zapisovali. Obravnavajmo polje v okolici poljubne točke  $(x, y, z)$  in pretok skozi majhno kockasto ploskev v okolici  $(x, y, z)$ :

$$\phi_{el}^z = \sum_{i=1}^6 \phi_{el}^i = \sum_{i=1}^6 \epsilon_0 \vec{E}(i) \cdot \Delta \vec{S}(i)$$

pri čemer vseh šest ploskev kaže ven iz kocke. Pretok skozi drugo ploskev je  $\phi_{el}^2 = \epsilon_0 \vec{E}(2) \cdot (\Delta y \Delta z \vec{e}_x) = \epsilon_0 E_x(2) \Delta y \Delta z$ , kjer imamo v mislih tako majhno ploskev, da se  $\vec{E}$  po površini

vsake ploskve zanemarljivo malo spremeni. Pretok skozi prvo ploskev je  $\phi_{el}^1 = \epsilon_0 \vec{E}(1) \cdot (-\Delta y \Delta z \vec{e}_x) = -\epsilon_0 E_x(1) \Delta y \Delta z$ . Vsota obeh pretokov

$$\phi^{1+2} = \epsilon_0 [E_x(2) - E_x(1)] \Delta y \Delta z = \epsilon_0 [E_x(x + \Delta x) - E_x(x)] \Delta y \Delta z \simeq \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

je odvisna od spremembe  $E_x$  vzdolž koordinate  $x$ : pretoka  $\phi^{1+2}$  ni, če se le-ta vzdolž  $x$  ne spreminja. Razliko  $E_x(2) - E_x(1) = E_x(x + \Delta x) - E_x(x)$  smo izrazili s parcialnim odvodom po  $x$  v prvem redu Taylorjevega razvoja<sup>2</sup>. Analogno velja za preostala dva para (to pokaži za **DN**)

$$\begin{aligned} \phi^{3+4} &= \epsilon_0 [E_y(4) - E_y(3)] \Delta x \Delta z \simeq \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial y}(x, y, z) \Delta y \Delta x \Delta z \\ \phi^{5+6} &= \epsilon_0 [E_z(6) - E_z(5)] \Delta x \Delta z \simeq \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z}(x, y, z) \Delta z \Delta x \Delta y . \end{aligned}$$

Skupen pretok skozi vseh šest je sorazmeren volumnu in izrazu v oglatih oklepajih (tako imenovala divergenca električnega polja)

$$\phi_{el}^z = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.21)$$

Rezultat velja za poljubno vektorsko polje, ne le električno polje - gre za matematično zvezo splošno poimenovano *Gauss-Ostrogradsky teorem*

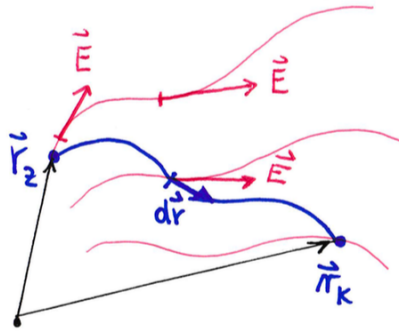
$$\int \vec{V} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \left[ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z . \quad (3.22)$$

Teorem je prvi zapisal Lagrange (okoli 1792), neodvisno pa še enkrat Gauss (okoli 1813) ter Ostrogradsky (1826), ki je predstavil prvi splošen dokaz za teorem.

Z uporabo tega teorema zakon o elektrirčnem pretoku prepisemo v diferencilano obliko. Maxwellova enačba za električni pretok skozi majhen kockast volumen  $\Delta V$  okoli  $(x, y, z)$  nam pove, da je pretok enak objemu naboju  $\rho_{el}(x, y, z) \Delta V$

$$\phi_{el}^z = \epsilon_0 \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \Delta V = \rho_{el}(x, y, z) \Delta V \quad (3.23)$$

kjer smo predpostavili, da je volumen dovolj majhen, da je  $\rho_{el}$  po njem približno konstanten in enak  $\rho_{el}(x, y, z)$ . Iz zgornje zveze sledi (3.20), kot smo želeli pokazati.



Slika 3.15: Premikanje naboja  $e$  po električnem polju od začetne lege  $\vec{r}_z$  do končne lege  $\vec{r}_k$  po izbrani modri poti.

## 3.6 Električna potencialna energija ( $W_{ep}$ ), električni potencial ( $\varphi$ ) in električna napetost ( $U$ )

### 3.6.1 Definicije energije, potenciala in napetosti

V mislih imejmo prostor, v katerem je električno polje. Po prostoru premikamo izbran električni naboj  $e$  iz začetne lege  $\vec{r}_z$  do končne lege  $\vec{r}_k$  po izbrani poti (npr. pot na Sliki 3.15). Taka situacija je pogosta, saj nas električna polja obdajajo vsepovsod in vplivajo na izbrane naboje. Premikamo ga relativno počasi, tako da je nastalo magnetno polje zaradi tega zanemarljivo kot v celotnem poglavju elektrostatike. Želimo zapisati energijski stavek in ga preoblikovati v bolj uporabno obliko. Vsota dela električne sile  $A_{el}$  in dela ostalih sil  $A'$  je enaka spremembi mehanske energije (kinetične  $W_k$ , potencialne  $W_p$ , ...)

$$A_{el} + A' = \Delta W_k + \Delta W_p \quad \rightarrow \quad A' = \Delta W_k + \Delta W_p - A_{el} ,$$

kjer so v delo ostalih sil  $A'$  štete vse sile razen sila teže in električne sile. Delo električne sile  $F_{el} = eE$  na naboj  $e$  v polju  $E$  prestavimo na desno stran med energije, zadnjemu členu  $-A_{el} = \Delta W_{ep}$  pa damo pomen spremembe *električne potencialne energije*. Podobno ste pri mehaniki prestavili na desno stran delo gravitacijske sile in preko  $-A_{gr} = \Delta W_p$  definirali spremembo potencialne energije. Preoblikovan energijski zakon ima obliko

$$A' = \Delta W_k + \Delta W_p + \Delta W_{ep} \quad \text{ali} \quad \boxed{A' = \Delta W, \quad W = W_k + W_p + W_{ep}} \quad (3.24)$$

<sup>2</sup>in  $\frac{\partial E_x}{\partial x}$  izvednotili v  $(x, y, z)$ : izvednotimo ga lahko v katerikoli točki znotraj kocke saj so razlike  $\frac{\partial E_x}{\partial x}(2) - \frac{\partial E_x}{\partial x}(1)$  sorazmerne z  $\Delta x$  in za majhne  $\Delta x$  zanemarljive. Taki popravki so reda  $\Delta x^2 \Delta y \Delta z$  in so zanemarljivi glede na vodilni red  $\Delta x \Delta y \Delta z$  v (??)

Sprememba električne potencialne energije naboja  $e$  pri premiku po električnem polju od začetne do končne lege je po zgornji definiciji enaka

$$\Delta W_{ep} \equiv -A_{el} = - \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} e\vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow \boxed{\Delta W_{ep} = W_{ep}^k - W_{ep}^z = -e \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} \vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (3.25)$$

kjer smo upoštevali električno silo  $\vec{F}_{el} = e\vec{E}$  na delec z nabojem  $e$ . Sprememba električne potencialne energije pri premiku naboja  $e$  je sorazmerna temu naboju in količini, ki je odvisna le od električnega polja v prostoru, zato ima za slednjo smisel vpeljati novo količino

$$\boxed{\Delta W_{ep} = e U(\vec{r}_k, \vec{r}_z)} \quad \boxed{U(\vec{r}_k, \vec{r}_z) \equiv - \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} \vec{E} \cdot d\vec{r} \equiv \varphi(\vec{r}_k) - \varphi(\vec{r}_z)}$$

$$\boxed{[U] = [\varphi] = V = \text{Volt} = \frac{J}{As}} \quad (3.26)$$

Definirali smo *električno napetost*  $U$  med točkama v prostoru  $\vec{r}_k$  in  $\vec{r}_z$ . Enota za napetost je Volt in je povezana z enoto Ampere po zgornji zvezi, ki sledi iz definicije napetosti. Po zgornji definiciji med točkama obstaja napetost, ko je v prostoru električno polje in ko je zgornji integral po poti med obema točkama različen od nič. Najbolj domač vam je primer, kjer nastopa električna napetost med krajiščema žice, kjer teče tok: tok teče, ker naboji čutijo vpliv električnega polja; vzdolž žice je torej električno polje in med krajiščema je zato električna napetost, ki jo lahko izmerimo z Voltmetrom (Slika 3.16a). Napetost je prisotna tudi med točkami, ki niso povezane z žico, če le je v prostoru električno polje: Slika 3.16b prikazuje napetost med ploščama kondenzatorja, Slika 3.16c pa napetost med točkama  $\vec{r}_k$  in  $\vec{r}_z$  znotraj kondenzatorja.

Napetost pada, ko se premikamo v smeri električnega polja:

$$dU = U(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{r}) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{za} \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} > 0 \quad (3.27)$$

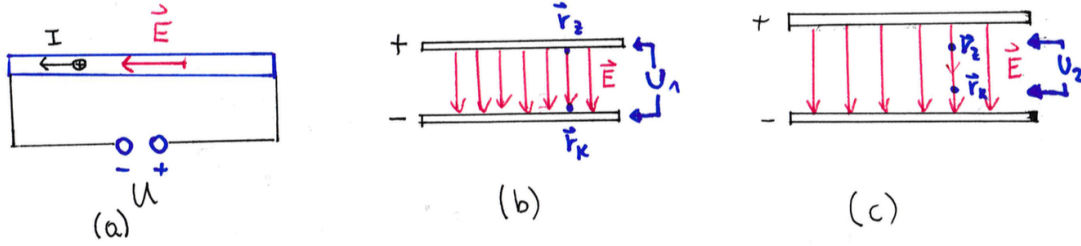
**Poskusi:** Električno napetost med krajiščema žice izmerimo z Voltmetrom; električna napetost med ploščama kondenzatorja,...

O napetosti v neki točki nima smisla govoriti. Vedno govorimo lahko le o napetosti med dvema točkama, na primer  $\vec{r}_k$  in  $\vec{r}_z$  v definiciji (3.26). Kasneje bomo ugotovili, da je v elektrostatiki integral za napetost (3.26) odvisen le od električnega polja in obeh skrajnih leg, ne pa tudi od izbora poti med njima. Zato lahko napetost zapišemo kot razliko dveh *električnih potencialov*  $\varphi$ , ki smo ju definirali skupaj z napetostjo v (3.26)

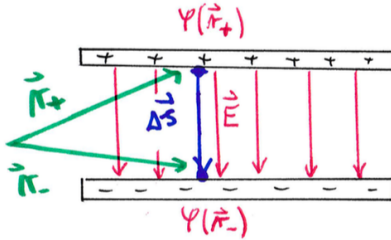
### 3.6.2 Uporaba električne energije in napetosti pri zgledih

#### Kondenzator

**Poskus:** Merjenje napetosti med ploščama kondenzatorja s statičnim voltmetrom ( $U \simeq 100kV$ )



Slika 3.16: Primeri, ko je med točkama  $\vec{r}_k$  in  $\vec{r}_z$  električna napetost.



Slika 3.17: Napetost, potencial in električno polje v ploščatem kondenzatorju.

Polje na Sliki 3.17 je konstantno  $\vec{E} = (E, 0, 0)$  in ga lahko izpostavimo pred integral. Določimo napetost med pozitivno nabito ploščo  $\vec{r}_+$  in negativno nabito ploščo  $\vec{r}_-$  kjer je premik  $\Delta\vec{s} = \vec{r}_- - \vec{r}_+$  v smeri  $\vec{E}$

$$-\int_{\vec{r}_+}^{\vec{r}_-} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_{\vec{r}_+}^{\vec{r}_-} d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = -EL = \varphi(\vec{r}_-) - \varphi(\vec{r}_+) \equiv U(\vec{r}_-, \vec{r}_+), \quad |U| = EL \quad (3.28)$$

Ugotovimo, da je napetost na negativni plošči za  $EL$  manjša kot na pozitivni plošči, kar je znano že iz srednje šole. Ob premiku v smeri  $\vec{E}$  električni potencial  $\varphi$  in napetost padata (3.27).

### Katodna cev in definicija eV

Poskus: Katodna cev

Napetost med ploščama vzdržuje generator z napetostjo  $U_0 = 1 \text{ V} = U_+ - U_-$  med pozitivno in negativno ploščo. Plošči sta zato nabiti in med njima je električno polje. Iz negativne vroče plošče izhlapevajo elektroni z zelo majhno maso  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  in nabojem  $e = -e_0$ , ki majo na začetku zanemarljivo hitrost  $v_z \simeq 0$ . Električno polje jih pospešuje proti pozitivni plošči. Tam imajo končno hitrost  $v_k$ , ki jo določimo z uporabo energijskega zakona (3.26)

$$A' = 0 = \Delta W_k + \Delta W_{ep} \rightarrow \Delta W_k = \frac{1}{2} m_e v_k^2 = -\Delta W_{ep} = -eU = e_0(U_+ - U_-) = e_0 U_0 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\boxed{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV} = 1 \text{ elektron volt}} \quad (3.29)$$

Ob tem smo definirali enoto za energijo 1 eV kot kinetično energijo, ki jo dobi elektron ob pospeševanju na napetosti 1 V. Ta enota za energijo se uporablja v fiziki na mikroskopski skali, torej na skali, ki obravnava osnovne delce, jedra, atome, molekule ali mikroskopsko naravo kristalov in tekočin. Hitrost elektrona z energijo 1 eV je velika zaradi majhne mase

$$v_k = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \cdot 10^{-19} J}{9.1 \cdot 10^{-31} kg}} \simeq 420 \text{ km/s} .$$

Ta hitrost pa je še vedno majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo  $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , zato je bila upravičena uporaba ne-relativističnega izraza za kinetično energijo. Pri večjih pospeševalnih napetostih bi dobili rezultate za hitrost lahko tudi večje od  $c$ , kar po današnjem znanju ni mogoče. Tedaj bi morali uporabiti relativistično mehaniko, ki jo bomo obravnavali ob koncu semestra in izračunali hitrost tudi za ta primer.

### Napetost in potencial v okolici točkastega naboja $e_1$

Ker je narava, vsaj na mikroskopski skali, sestavljena iz majhnih - skoraj točkastih - delcev z nabojem, je pomembno preučiti električni potencial okoli točkastega naboja ter napetost med točkami. Za naboj  $e_1$  v izhodišču je napetost (3.26) med točkama  $\vec{r}_k$  in  $\vec{r}_z$  enaka integralu polja  $\vec{E} = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$  (3.4) po poljubni poti na Sliki 3.18

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_k, \vec{r}_z) &= - \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\vec{r}_z}^{\vec{r}_k} \\ &= \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r_k} - \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r_z} = \varphi(\vec{r}_k) - \varphi(\vec{r}_z) \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r} \equiv U(r, \infty)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Upoštevali smo, da je skalarni produkt premika  $d\vec{r}$  po poti in vektorja  $\frac{\vec{r}}{r}$ , ki kaže v radialni smeri, enak spremembi oddaljenosti od izhodišča (Slika 3.18):  $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = dr$ . Nedoločeni integral  $e_1/(4\pi\epsilon_0 r)$  je odvisen le od oddaljenosti  $r = |\vec{r}|$  od izhodišča, ne pa tudi od smeri vektorja  $\vec{r}$ . Med točkami je torej napetost, ker je v prostoru električno polje. Napetost točke  $r_k = r$  glede na točko v neskončnosti  $r_z = \infty$  je enaka potencialu  $\varphi(\vec{r}) = e_1/(4\pi\epsilon_0 r)$ , oboje pa pada ko se premikamo v smeri  $\vec{E}$ , torej z naraščajočim  $r$  (3.27).

Vrednost napetosti (3.30) je odvisna le od oddaljenosti začetne in končne točke od izhodišča, ne pa tudi od njune orientacije. Ugotovili smo tudi, da napetost ni odvisna od izbire poti med točkama. Ob prisotnosti več nabojev to velja za prispevek vsakega naboja posebej, zato je tudi za skupno napetost.

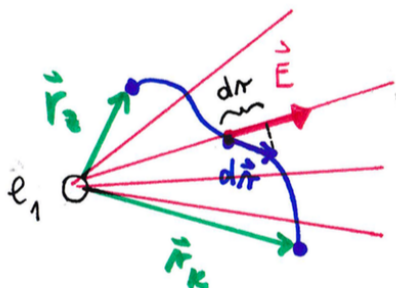
### Električna potencialna energija para točkastih električnih nabojev $e_1$ in $e_2$

Paru delcev z nabojema  $e_1$  in  $e_2$  se spremeni električna potencialna energija za (3.26,3.30)

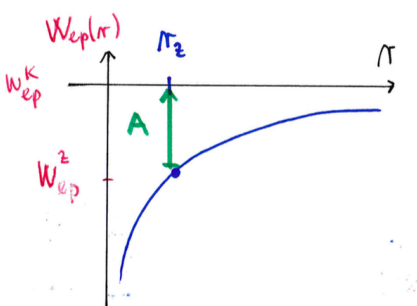
$$\Delta W_{ep} = W_{ep}^k - W_{ep}^z = e_2 U(\vec{r}_k, \vec{r}_z) = e_2 \left[ \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r_k} - \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r_z} \right] \quad \boxed{W_{ep}(r) = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (3.31)$$

ko naboj  $e_2$  premaknemo iz razdalje  $r_z$  na razdaljo  $r_k$  od naboja  $e_1$ . Sprememba  $W_{ep}$  (3.26) je namreč enaka produktu naboja  $e_2$ , ki ga premikamo po električnem polju ter napetosti  $U$





Slika 3.18: Napetost in potencial okoli pozitivnega točkastega naboja  $e_1$  v izhodišču.



Slika 3.19: Potencialna energija para nasprotno nabitih delcev v odvisnosti od razdalje. Označeno je tudi delo  $A$ , ki je potrebno, da par iz razdalje  $r_z$  razmaknemo na  $r_k \rightarrow \infty$ .

(3.30) med izhodiščno in končno točko v električnem polju točkastega naboja  $e_1$ . Ugotovili smo, da je potencialna energija para odvisna le od velikosti njune medsebojne razdalje, ničelno potencialno energijo pa smo izbrali pri veliki oddaljenosti,  $W_{ep}(r \rightarrow \infty) = 0$ .

Zgled: Določimo delo, ki je potrebno, da razmaknemo iona iz molekule  $NaCl$  (kjer sta na ravnovesni oddaljenosti  $r_0 = 0.24 \text{ nm}$ ) na veliko oddaljenost. Po energijskem zakonu je delo enako

$$A = W_{ep}^k - W_{ep}^z + \Delta W_{kin} = 0 - \frac{e_0(-e_0)}{4\pi\epsilon_0 r_0} + 0 \simeq 9.5 \cdot 10^{-19} \text{ J} \simeq 6 \text{ eV} ,$$

kjer imamo v mislih, da sta začetna in končna kinetična energija enaki nič. Temu delu pravimo *ionizacijska energija*. Potrebno delo je pozitivno, kar pomeni, da sistem dveh nasprotno nabitih ionov ostane vezan brez posredovanja okolice. Sistem brez zunanjih vplivov teži k znižanju potencialne energije, ta pa je za vezano molekulo negativna (Slika 3.19). Tipične spremembe energij pri tovrstnih kemijskih spremembah so reda velikosti  $eV$ .

### Električna potencialna energija več točkastih nabojev



Slika 3.20: Vtičnica: kovinska dela spodaj in zgoraj predstavljata ozemljitev, med luknjičastima priključkoma pa je napetost  $U(t) = U_0 \sin(2\pi\nu t)$ ,  $U_0 = \sqrt{2} \cdot 220$  V.

Potencialna energija  $n$  točkastih nabojev  $e_1, \dots, e_n$  je po analogiji z (3.31) vsota energij vseh parov  $(ij)$

$$W_{ep} = \sum_{\text{pari } (ij)} \frac{e_i e_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (3.32)$$

pri čemer  $r_{ij}$  označuje razdaljo med nabojema  $e_i$  in  $e_j$ .

To utemeljimo z naslednjim razmislekom. Naj bo  $n - 1$  nabitih delcev že v željenih legah s skupno potencialno energijo  $W_{ep}^{n-1}$ . Ko iz neskončne razdalje v željeno lego prestavimo še  $n$ -ti naboj  $e_n$  (v električnem polju  $n - 1$  nabojev), se potencialna energija spremeni na

$$\begin{aligned} W_{ep}^n &= W_{ep}^{n-1} + e_n U = W_{ep}^{n-1} - e_n \int \vec{E} d\vec{r} \\ &= W_{ep}^{n-1} - e_n \int (\vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_{n-1}) d\vec{r} = e_n \left[ \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0 r_{1n}} + \dots + \frac{e_{n-1}}{4\pi\epsilon_0 r_{n-1,n}} \right]. \end{aligned}$$

Sprememba potencialne energije, ki jo doprinese  $n$ -ti naboj, je torej enaka vsoti  $n - 1$  novo-nastalih parov. Celotna električna potencialna energija je torej enaka vsoti električnih potencialnih energij za vse pare.

**Seminar:** Določi delo, ki je potrebno da iz kristala  $NaCl$  ioniziramo (odmaknemo na veliko razdaljo) en ion. Ravnovesna razdalja  $r_0 = 2.8$  v kubičnem kristalu  $NaCl$  je nekoliko večja od ravnovesne razdalje v dvo-atomni molekuli.

**Napetosti pri vtičnici:** Omrežna napetost med vodomoma na vtičnici (Slika 3.20) izmenična in se spreminja s časom  $U(t) = U_0 \sin(2\pi\nu t)$ , kjer je frekvenca  $\nu = 50$  Hz in amplituda  $U_0 = \sqrt{2} \cdot 220$  V. Enemu priključku pravimo faza, drugemu pa ničla. Dodatna kovinska dela predstavljata ozemljitev, saj sta na istem električnem potencialu kot Zemlja. Z njima poskrbimo, da so električne naprave ozemljene in ne stečejo električni tokovi zaradi potencialne razlike med električno napravo in Zemljo.

**Seminar:** Splošne zveze med spremembo potencialne energije  $W_p$  in silo  $F$ , ki je odgo-

vorna za to potencialno energijo:

$$\begin{aligned} 1D : dW_p &= F(x)dx, & F(x) &= \frac{dW_p}{dx} \\ 3D : dW_p &= \vec{F}(x) \cdot d\vec{r} & \vec{F}(x) &= \left( \frac{\partial W_p}{\partial x}, \frac{\partial W_p}{\partial y}, \frac{\partial W_p}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$