

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Svetlobno in zvočno ogrinjalo

Izbrana poglavja iz uporabne fizike

Seminar

Ana Dergan
mentor: doc. dr. Primož Ziherl

maj 2009

Povzetek

Seminar obravnava načine, kako napraviti predmet neviden za določeno vrsto valovanja. Najprej obdelamo ogrinjanje za elektromagnetno valovanje. Osredotočimo se na način ogrinjanja s koordinatno transformacijo, saj je tak način ogrinjanja lahko uporaben tudi za zvok. Pri ogrinjanju za zvočne valove najprej obravnavamo dvodimenzionalni primer, nato pa še tridimenzionalnega. Poleg teoretičnih predlogov predstavimo tudi rezultate simulacij in eksperimentov.

Kazalo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Uvod | 2 |
| 2 | Načini elektromagnetnega ogrinjanja | 2 |
| 3 | Ogrinjanje s koordinatno transformacijo | 3 |
| 4 | Akustično ogrinjalo v 2D in 3D | 8 |
| 5 | Zaključek | 12 |

1 Uvod

Najprej moramo pojem nevidnosti in plašča nevidnosti prevesti v fizikalni jezik. Naše oko zazna elektromagnetno valovanje z valovno dolžino približno od 400 nm do 700 nm. Natančneje, zazna gostoto toka elektromagnetnega polja. Predmeti v naši okolici sipajo in odbijajo vpadno svetlobo. Na podlagi sipanega in odbitega valovanja ugotovimo, kje in kakšni predmeti so okoli nas. Predmet bo za naše oko neviden, če se vpadno elektromagnetno polje zaradi njegove prisotnosti ne spremeni. Nevidni plašč mora preprečiti sipanje in odboj [1]. Odtod izhaja kvantitativno merilo za vidnost predmeta: totalni sipalni presek (SCS — scattering cross section), ki je razmerje med močjo sipanega in vpadnega valovanja. Idealen plašč nevidnosti bi povzročil, da je totalni sipalni presek zanemarljivo majhen. Pojem nevidnosti lahko razširimo na elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami izven vidnega dela spektra in tudi na katero koli drugo valovanje. Soroden pojem kot ogrinjanje je prikrivanje (*stealth*), ki se uporablja v vojski. S tehnologijo prikrivanja želijo doseči, da bi izbrani predmet absorbiral vse valovanje, ki pride do njega, kar ni ekvivalentno pristopu pri ogrinjanju [1]. Letala, ladje in podmornice želijo narediti nevidne za radar, sonar in infrardečo detekcijo. Primer letala, oblikovanega v skladu s tehnologijo prikrivanja, je na sliki 1.



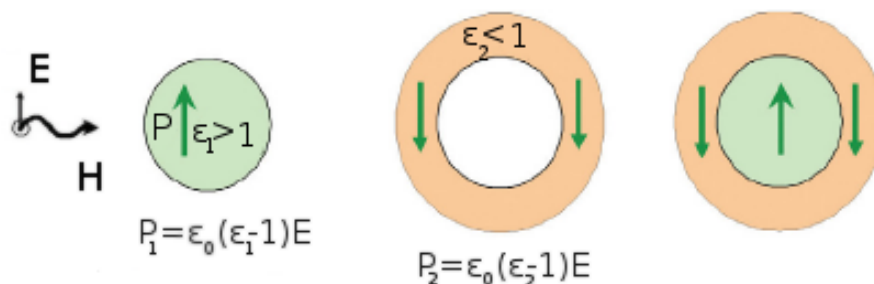
Slika 1: Letalo F-177 [2]. To je primer letala, narejenega s tehnologijo prikrivanja. Oblikovano je tako, da se absorbira čim večji delež vpadnega elektromagnetnega valovanja. Tako postane nevidno za radar.

2 Načini elektromagnetnega ogrinjanja

Ogrinjanje vključuje uporabo materialov z nenavadnimi lastnostmi, zato se je raziskovanje tega področja razmahnilo v zadnjem času, ko so taki materiali na voljo. Gre za metamateriale. To so po definiciji materiali, ki jih v naravi ni in imajo nenavadne lastnosti. Tehnike ogrinjanja za elektromagnetno valovanje, ki se trenutno najbolj raziskujejo, so [1]:

- **Ogrinjanje z zmanjšanjem dipolnega sipanja.** Sipano polje ravnega vala lahko razvijemo po sfernih harmonikah [3]. V dolgovalovni limiti je znaten le dipolni člen za transverzalno magnetno polarizacijo. Dipolni prispevek izhaja iz polarizacije, ki je linearno povezana z vpadnim električnim poljem [$P = \epsilon_0(\epsilon - 1)E$]. Če predpostavimo, da k sipanju prispeva le dipolni člen, lahko izdelamo plašč tako, da se polarizaciji v predmetu in plašču odštejeta med sabo (slika 2). Dielektričnost plašča

mora biti manjša od dielektričnosti okolice. Če je v okolici zrak, mora biti tako dielektričnost manjša kot 1. Ena izmed možnosti za majhno ali negativno dielektričnost so plazmonični materiali [3].



Slika 2: Shema ogrinjanja z zmanjšanjem dipolnega sipanja [1]. Predmet, ki ga želimo ogriniti, ima dielektričnost večjo od okoliške. Če je v okolici zrak, potem $\epsilon_1 > 1$. Vpadno elektromagnetno valovanje inducira polarizacijo v predmetu (P_1) in plašču (P_2). Da se dipolna člena valovanja, sipanega na predmetu in plašču, odštejeta, mora biti dielektričnost plašča manjša od dielektričnosti okolice ($\epsilon_2 < 1$).

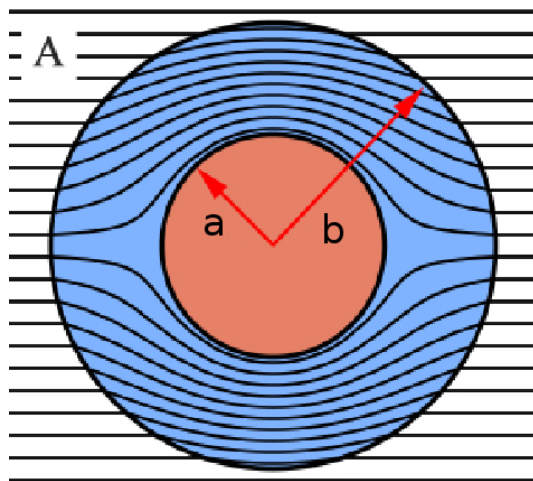
- S **koordinatno transformacijo** dosežemo, da 'žarki' zaobidejo predmet in se zunaj plašča propagirajo, kot da predmeta ne bi bilo tam [1]. Vsak predmet znotraj plašča postane neviden. Ker lahko to tehniko uporabimo tudi za zvok, si jo bomo natančneje pogledali.
- Za ogrinjanje uporabimo prostorsko strukturo iz **mrež iz transmisijskih linij**. Elektromagnetno polje se propagira samo znotraj linij, zato je prostor med linijami efektivno ogrinjen [1].

Poleg naštetih tehnik obstaja nekaj bolj eksotičnih - npr. z uporabo superleč [4]. Kot zanimivost povejmo še, da se v splošnem popolnega plašča nevidnosti ne da narediti [5]. Natančneje: popolno nevidnost lahko dosežemo samo v določenih smereh in za nekatere predmete, ki so majhni v primerjavi z valovno dolžino. Matematični razlog je skriva v tem, da podatki o sipanju (amplitude in smeri sipanih polj) posameznih Fourierovih komponent enolično določajo prostorsko odvisnost lomnega količnika. Valovanje se lahko propagira kot po praznem prostoru samo če se v resnici propagira po praznem prostoru. Za ogrinjanje s koordinatno transformacijo je bilo dokazano, da ne krši teorema o enoličnosti [6].

3 Ogrinjanje s koordinatno transformacijo

Teorija

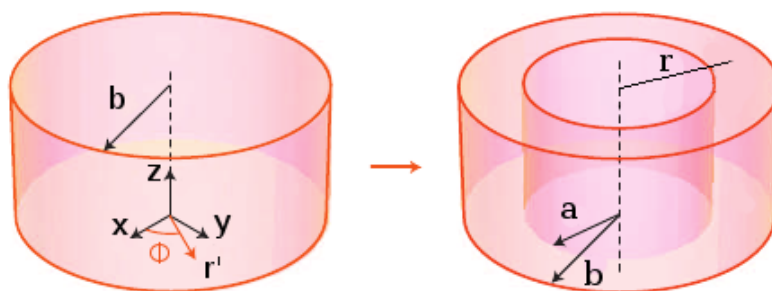
Ogrinjanje s koordinatno transformacijo lahko uporabimo za konstrukcijo plašča poljubne oblike. Da si bomo postopek lažje predstavljali, si izberimo konkretno geometrijo. Plašč naj bo neskončno dolg votel valj ($a \leq r \leq b$); predmet (oblika, velikost in vse lastnosti predmeta so poljubne!), ki ga želimo skriti, naj se nahaja na notranji strani plašča, v okolici ($r \geq b$) naj bo zrak. Lastnosti plašča naj bodo take, da bo vpadno valovanje zaobšlo notranji del plašča ($r \leq a$). Situacija, ki jo želimo doseči, je prikazana na sliki 3.



Slika 3: Simulacija delovanja plašča v geometrijski limiti ($b \gg \lambda$) [7]. Plašč je modri del, predmet lahko postavimo v rdeče pobarvano območje. Žarki (trajektorije Poyntingovega vektorja), ki jih označujejo črte, gladko obidejo plašč. V notranji del plašča žarki ne sežejo.

Predmet, ki ga skrivamo, ne more vplivati na potek polja, ker se ga valovanje izogne. Zunaj plašča je valovanje tako, kot bi bilo, če bi se ves čas razširjalo po enakem mediju (torej zraku); nevidnost je dosežena. Naša naloga je določiti lastnosti plašča, ki omogočajo realizacijo zgoraj opisanega.

Uvedemo dva različna cilindrična koordinatna sistema (slika 4). V prvem ima plašč notranji radij 0, zunanjšega pa b . Drug koordinatni sistem naj bo laboratorijski sistem. Plašč ima notranji polmer a in zunanjšega b . Do drugega koordinatnega sistema pridemo tako, da napravimo transformacijo prvega v radialni smeri. Iz leve strani vpada valovanje. Če bo vpadno polje v koordinatnem sistemu 1 potovalo naravnost, bo v koordinatnem sistemu 2 potovalo ravno tako, kot smo si zamisli: izognilo se bo osrednjega dela in bo nemoteno zunaj plašča. Plašč mora imeti v koordinatnem sistemu 1 lastnosti praznega prostora. Iz teh lastnosti bomo izračunali lastnosti, ki jih ima v koordinatnem sistemu 2.



Slika 4: Uvedba dveh koordinatnih sistemov [8]. V koordinatnem sistemu 1 (KS 1) je presek našega plašča krog z radijem b , v koordinatnem sistemu 2 (KS 2) pa kolobar z radijema a in b . Radialni koordinati sta r' (KS 1) in r (KS 2). Transformacijo izvedemo samo za $r' \leq b$.

Maxwellove enačbe se v obeh koordinatnih sistemih enake oblike. Izražava polj, gostot

izvorov polj in tenzorjev dielektričnosti ter permeabilnosti se spremeni. Te izražave nam omogočajo izračunati lastnosti plašča. Poglejmo si natančneje, kako je s transformacijo Maxwellovih enačb. V kartezičnem koordinatnem sistemu se Maxwellove enačbe zapišejo takole:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Zraven sodita še konstitutivni relaciji:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \underline{\mu} \mathbf{H}. \quad (6)$$

V transformiranem koordinatnem sistemu imajo povsem enako obliko. Količine, ki nastopajo v njih (označimo jih s strešicami), se transformirajo [9]. Električna poljska jakost in gostota magnetnega polja se transformirata kot vektorja; gostota naboja in gostota toka kot skalarja in permeabilnost ter dielektričnost kot tenzorja:

$$\hat{\mathbf{E}} = g \mathbf{E}, \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = g \mathbf{B}, \quad (8)$$

$$\hat{\rho} = \det(g)(g^T)^{-1} \rho, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \det(g)(g^T)^{-1} \mathbf{j}, \quad (10)$$

$$\hat{\underline{\varepsilon}} = \det(g)(g^T)^{-1} \underline{\varepsilon} g^{-1}, \quad (11)$$

$$\hat{\underline{\mu}} = \det(g)(g^T)^{-1} \underline{\mu} g^{-1}. \quad (12)$$

V zgornjih enačbah nastopa g , ki je definiran takole: če so koordinate starega kartezičnega koordinatnega sistema (x, y, z) od novih koordinat (q_1, q_2, q_3) odvisne

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3), \quad (13)$$

potem je g :

$$g = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial q_1 & \partial f_2 / \partial q_1 & \partial f_3 / \partial q_1 \\ \partial f_1 / \partial q_2 & \partial f_2 / \partial q_2 & \partial f_3 / \partial q_2 \\ \partial f_1 / \partial q_3 & \partial f_2 / \partial q_3 & \partial f_3 / \partial q_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Za konstrukcijo plašča nas zanimata predvsem $\hat{\underline{\varepsilon}}$ in $\hat{\underline{\mu}}$. V KS 1 sta $\underline{\mu}$ in $\underline{\varepsilon}$ kar identiteti, saj naj se valovanje širi kot v zraku. Ker transformiramo iz enega cilindričnega koordinatnega sistema v drugega, gornje enačbe niso zadosti. Upoštevati moramo še transformacijo iz kartezičnega koordinatnega sistema v cilindričnega [9]. Ker je izpeljava dokaj komplicirana, si pogledjmo le rezultat. Če izvedemo transformacijo $r' = f(r)$ (r' je radialna koordinata v KS 1, r pa v KS 2), za katero mora veljati $f(a) = 0$ in $f(b) = b$, potem so komponente tenzorjev permeabilnosti in dielektričnosti v laboratorijskem sistemu takole odvisne od radija:

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{f(r)}{r f'(r)}, \quad \varepsilon_\Phi = \mu_\Phi = \frac{r f'(r)}{f(r)}, \quad \varepsilon_z = \mu_z = \frac{f(r) f'(r)}{r}, \quad (15)$$

kjer je $f'(r)$ odvod funkcije $f(r)$ po r . Če napravimo plašč, ki se mu permeabilnost in dielektričnost spreminjata v skladu z zgornjimi lastnostmi [za neko izbiro $f(r)$, ki ustreza robnim pogojem], se bodo žarki izognili osrednjemu delu in zunaj plašča ne bo sipanega polja. Dobili smo ‘plašč nevidnosti’. Seveda tu še ni konec zgodbe. Potrebno je zares izračunati, kako se v resnici propagira valovanje skozi plašč. Izkaže se, da je pomembno, da material, iz katerega naredimo plašč, ne absorbira valovanja (da nimamo izgub, torej) [10]. Ker realni materiali nikoli niso povsem brez izgub, izvedba takega plašča ne more biti popolna. Posledica neničelne absorpcije je, da v praksi plašč deluje za sorazmerno ozek pas frekvenc. Kako dobri ali slabi so rezultati realizacije takega plašča, si bomo pogledali v nadaljevanju.

Eksperimentalni rezultati

Ogrinjanje s koordinatno transformacijo (za cilinder) je prvi uspel eksperimentalno potrditi D. Schurig s sodelavci [10]. Izbira transformacije je bila:

$$f(r) = \frac{b}{b-a}(r-a).$$

Tako transformacijo dosežemo z dielektričnostjo in permeabilnostjo, ki se spreminjata takole:

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{r-a}{r}, \quad \varepsilon_\Phi = \mu_\Phi = \frac{r}{r-a}, \quad \varepsilon_z = \mu_z = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r-a}{r}. \quad (16)$$

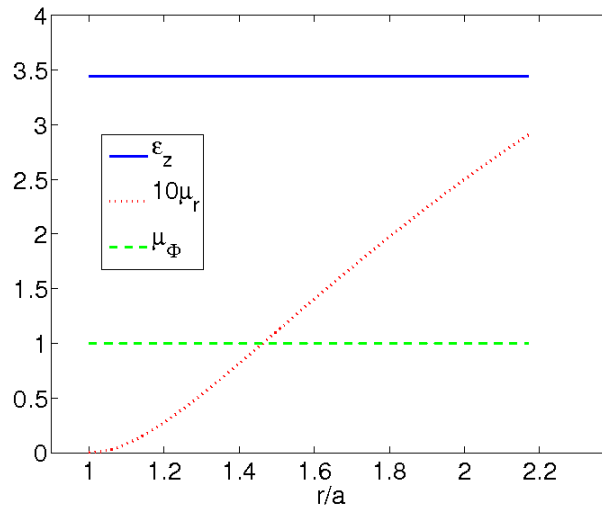
Tako odvisnost bi bilo težko doseči. Ugotovili so, da lahko delajo s preprostejšo konfiguracijo, če ima vpadno valovanje električno poljsko jakost polarizirano v smeri osi valja. V tem primeru ε_ρ , ε_Φ in μ_z niso relevantni. Poleg tega so se odločili, da jih zanima samo oblika žarkov. V tem primeru sta pomembna lomna količnika v azimutalni in radialni smeri. Uvedli so take nove parametre, da sta ostala produkta $\mu_r \varepsilon_z$ in $\mu_\Phi \varepsilon_z$ enaka kot pri originalnem setu enačb. Lastnosti plašča (prikazane na sliki 5) so bile torej:

$$\varepsilon_z = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2, \quad \mu_r = \left(\frac{r-a}{r}\right)^2, \quad \mu_\Phi = 1. \quad (17)$$

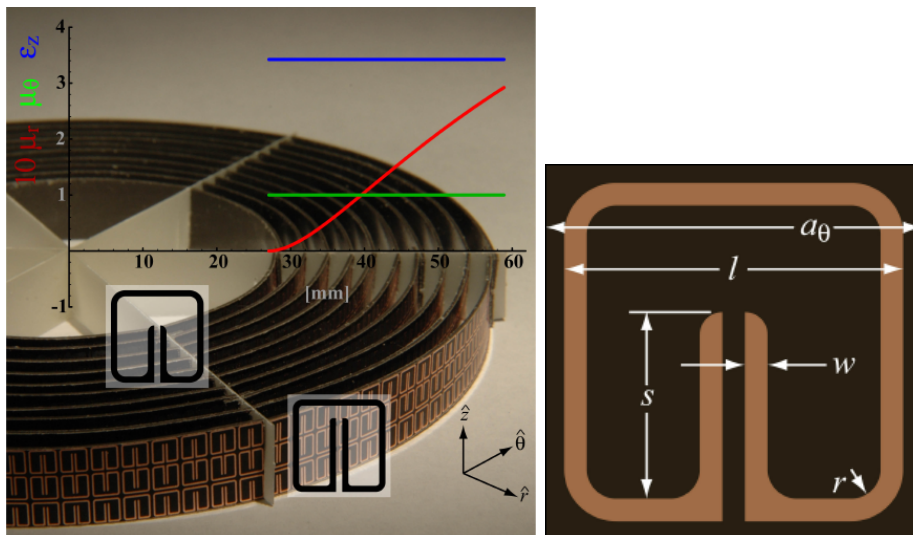
Prvoten set parametrov (enačba 16) da zvezen prehod valovne impedance $Z = \sqrt{\mu_\Phi/\varepsilon_z}$ na meji zrak-plašč, zato ni odbitega valovanja. Pri poenostavljenem setu parametrov (enačba 17) pride do skoka v valovni impedanci in do odboja, kar se bo pokazalo pri simulaciji.

Shema plašča, znotraj katerega so uspeli implementirati zgoraj opisane lastnosti je na sliki 6 levo. Sestavlja ga deset koncentrično razporejenih obročev iz steklene volne, na katerih so natisnjene osnovne celice — bakreni ‘*split-ring*’ resonatorji¹. Ena sama osnovna celica je prikazana na sliki 6 desno. Efektivna permeabilnost osnovnih celic je odvisna od njihove velikosti in oblike. Na vsakem izmed trakov imajo osnovne celice drugačne geometrijske parametre (spreminjata se samo s in r), da se permeabilnost z radijem spreminja, kot je potrebno. Plašč pravilno deluje le v dolgovalovnem režimu, ko valovanje ‘vidi’ strukturiran plašč kot zvezno sredstvo. Frekvenca vpadnega ravnega

¹‘*Split-ring*’ resonator(SRR) je naprava, katere magnetne lastnosti se spreminjajo z dimenzijo. Pojem SRR so uvedli Pendry in sodelavci [11].

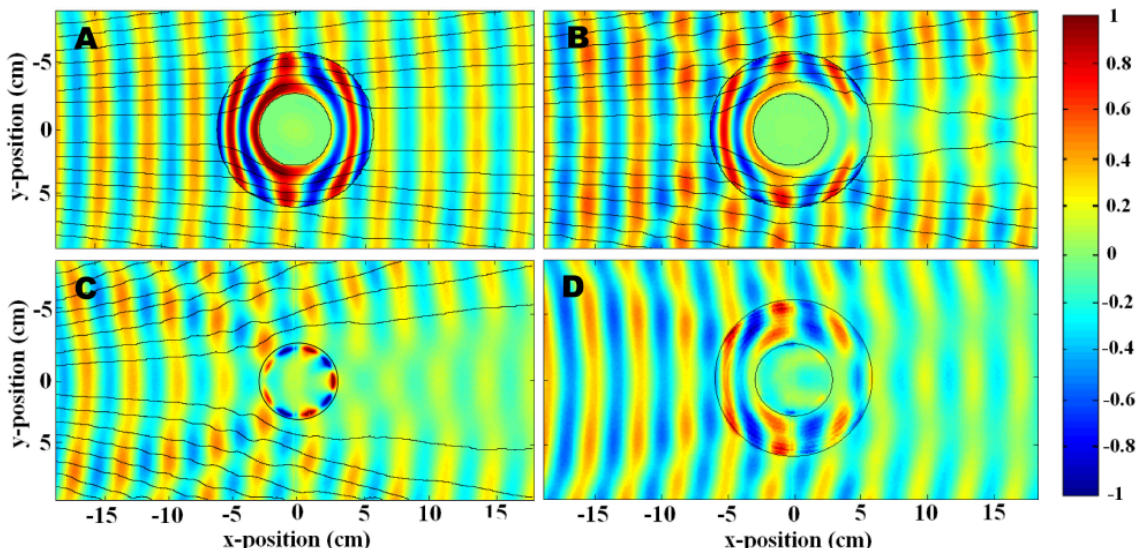


Slika 5: Odvisnost parametrov valjastega plašča od radija pri eksperimentu D. Schuriga in sodelavcev [10]. Zaradi preglednosti je μ_r pomnožen z 10. Permeabilnost je manjša od 1 ($0 \leq \mu_r \leq 0.3$)! Za notranji in zunanji polmer plašča so izbrali $a = 27.1$ mm, $b = 58.9$ mm.



Slika 6: Na levi je slika celotnega plašča, na desni pa shema posamezne osnovne celice [10]. Efektivno permeabilnost osnovne celice določajo njeni geometrijski parametri: s, w, r, l in a_θ .

vala, ki so ga uporabili, je bila 8.5 GHz (mikrovalovno območje). Valovna dolžina tega valovanja je 35.3 mm, kar je približno desetkrat več, kot je velikost osnovne celice ($a_\theta = 3.3$ mm). Tako je bil izpolnjen pogoj za dolgovalovno limito. Na sliki 7 so prikazani rezultati simulacij in meritve. Predmet, ki so ga 'skrivali', je bil bakren valj. Zaradi poenostavljenih lastnosti plašča se je nekaj valovanja odbilo (primerjava slik A in B). S primerjavo slik C in D ugotovimo, da plašč zmanjša tako sipanje v smeri naprej (senco) in sipanje v smeri nazaj. Amplituda valovanja, ki ga je generiral izvor pri eksperimentu, je pojemala z oddaljenostjo že sama po sebi (brez valja ali plašča). To so upoštevali tudi pri simulaciji. Ujemanje eksperimenta s simulacijo je zadovoljivo.



Slika 7: Rezultati dveh simulacij in dveh meritev za plašč v mikrovalovnem območju [10]. Z leve prihaja ravni val in se siplje na plašču in bakrenemu valju znotraj njega. Z barvo je prikazana amplituda nihanja električne poljske jakosti (E_z). A: simulacija plašča z idealnimi lastnostmi (enačba 16), B: simulacija za plašč s poenostavljenimi lastnostmi (enačba 17), C: eksperiment — meritev polja brez plašča, D: eksperiment — meritev s plaščem. Črte so v smeri Poyntingovega vektorja. Pri idealni realizaciji plašča (A) se valovanje propagira skoraj nemoteno, zaradi poenostavitve (B) se pojavita odbito valovanje in senca. Meritev plašča (D) da podobne rezultate kot simulacija (B).

4 Akustično ogrinjalo v 2D in 3D

V dvodimenzionalni geometriji (2D) sta akustični (tekočini podoben) in elektromagneten medij enakovredna — tako v izotropnem mediju kot tudi v anizotropnem [12] (v 3D ni tako!). Drugače povedano: Maxwellove enačbe so enake oblike kot nabor enačb (Navier-Stokesova za nevskožno tekočino in kontinuitetna), ki opisuje gibanje tekočine. Analogni so tudi robni pogoji. Sklepamo lahko, da lahko napravimo plašč tudi za zvočne valove, če ga je bilo možno narediti za elektromagnetne. Pogledali si bomo, katere količine iz gibalnih enačb za tekočino ustrezajo količinam v Maxwellovih enačbah in sklepali, kakšne lastnosti mora imeti plašč. Zaradi anizotropnosti, ki smo jo potrebovali za plašč za elektromagnetno valovanje, predpostavimo, da je tudi naš akustični medij anizotropen — efektivna dinamična gostota ni enaka v vseh smereh (hitrost potovanja zvoka ni enaka v vseh smereh). Poudarjamo, da gre za gostoto, ki nastopa v gibalnih enačbah in je povezana s hitrostjo zvoka skozi medij ter ne ustreza nujno pravi, fizični gostoti. Navier-Stokesova enačba za nevskožno tekočino je:

$$\underline{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (18)$$

kontinuitetna pa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (19)$$

Uporabljamo standardne oznake: p je tlak, \mathbf{v} hitrost, χ stisljivost in $\underline{\rho}$ tenzor gostote tekočine. Predpostavimo, da je slednji diagonalen v cilindričnih koordinatah. Enačbe

razpišemo po komponentah in že upoštevamo časovno odvisnost $\exp(i\omega t)$:

$$i\omega\rho_\Phi v_\Phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Phi}, \quad (20)$$

$$i\omega\rho_r v_r = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (21)$$

$$i\omega\chi p = -\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\Phi}{\partial \Phi}. \quad (22)$$

Na drugi strani imamo Maxwelllove enačbe v cilindrični geometriji in s časovno odvisnostjo $\exp(i\omega t)$:

$$i\omega\mu_r(-H_r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial(-E_z)}{\partial \Phi}, \quad (23)$$

$$i\omega\mu_\Phi H_\Phi = \frac{\partial(-E_z)}{\partial r}, \quad (24)$$

$$i\omega\varepsilon_z(-E_z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\Phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(-H_r)}{\partial \Phi}. \quad (25)$$

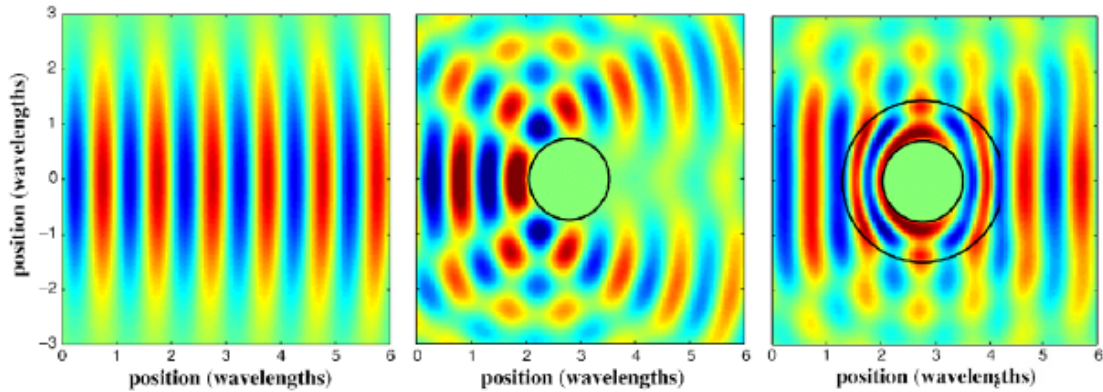
Vidimo, da pridemo od prvega seta enačb do drugega, če napravimo naslednje zamenjave spremenljivk:

$$p, v_r, v_\Phi, \rho_r, \rho_\Phi, \chi \rightarrow -E_z, H_\Phi, -H_r, \mu_\Phi, \mu_r, \varepsilon_z. \quad (26)$$

Permeabilnosti v radialni smeri ustreza gostota v azimutalni in obratno. Dielektričnosti v smeri \mathbf{z} ustreza stisljivost. Lastnosti plašča za zvok so:

$$\rho_r = \frac{r}{r-a} \rho_0; \quad \rho_\Phi = \frac{r-a}{r} \rho_0; \quad \chi = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r-a}{r} \chi_0. \quad (27)$$

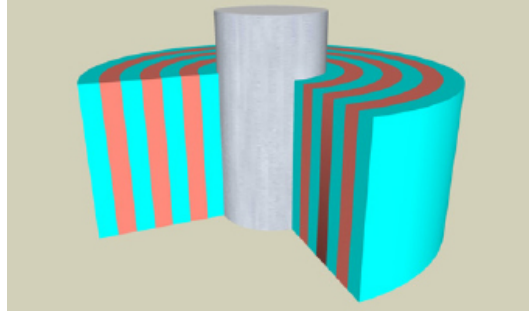
χ_0 in ρ_0 sta (izotropna) stisljivost in gostota tekočine zunaj plašča. Cummer in Schurig [12] sta napravila še simulacijo (slika 8), neodvisno od tiste za elektromagnetno valovanje.



Slika 8: Rezultati simulacij za akustično ogrinjalo v 2D — tlačno polje v treh različnih primerih. Na levi sliki je tlačno polje brez sipalca, na sredinski je sipalec brez plašča, na desni pa je sipalec obdan s plaščem [12]. Plašč ima lastnosti iz enačbe 27. Ko je sipalec obdan s plaščem, se zvok v veliki meri propagira kot da ne bi bilo sipalca; ni sence, ni sipanja nazaj.

Vprašanje je seveda, kako napraviti material, ki ima anizotropno gostoto. D. Torrent in J. Sanches-Desha sta predlagala večplasten kompozit iz dveh tipov izotropnega soničnega

kristala² [13]. Osnovna enota kompozita sta dve plasti iz različnih soničnih kristalov (slika 9). Poglejmo si, kako izračunamo akustične lastnosti te osnovne enote. Debelini



Slika 9: Predlog plašča za zvok [13]. Plašč sestavlja več plasti; osnovna enota sta dve plasti enake debeline iz različnih soničnih kristalov (par modre in rdeče plasti). Lastnosti plasti se morajo spreminjati z radijem. Izkaže se, da so lahko vse plasti tipa 1 (modre plasti) iz kristala z enakimi osnovnimi gradniki, le polnitveno razmerje se mora spreminjati z radijem. Podobno velja tudi za plasti tipa 2.

plasti sta d_1 in d_2 , kristala imata različni gostoti in stisljivostna modula. Stisljivost je:

$$\chi = \frac{1}{d_1 + d_2} (d_1\chi_1 + d_2\chi_2). \quad (28)$$

Ker je gostota povezana s hitrostjo širjenja zvoka v mediju moramo izračunati disperzijsko relacijo. Linearen člen v razvoju disperzijske relacije je hitrost zvoka v dolgovalovni limiti. Dobimo:

$$c_{\perp}^2 = \frac{1}{\chi\rho_{\perp}}, \quad c_{\parallel}^2 = \frac{1}{\chi\rho_{\parallel}}, \quad (29)$$

kjer sta

$$\rho_{\perp} = \frac{1}{d_1 + d_2} (d_1\rho_1 + d_2\rho_2), \quad \frac{1}{\rho_{\parallel}} = \frac{1}{d_1 + d_2} (d_1/\rho_1 + d_2/\rho_2). \quad (30)$$

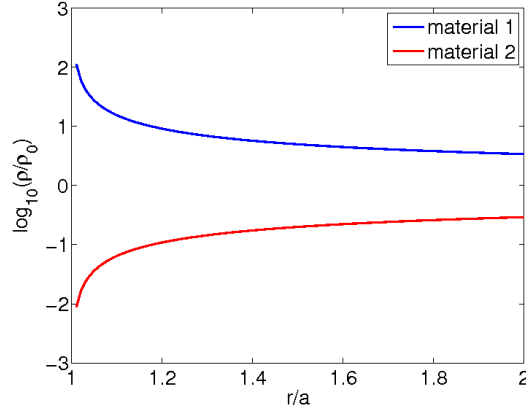
Prva hitrost je za valovanje v smeri pravokotno na plasti, druga pa vzporedno z njima. V cilindrični geometriji je c_{\perp} tako c_r in c_{\parallel} pravzaprav c_{Φ} . Izberimo si $d_1 = d_2$:

$$\rho_r = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad \frac{1}{\rho_{\Phi}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (31)$$

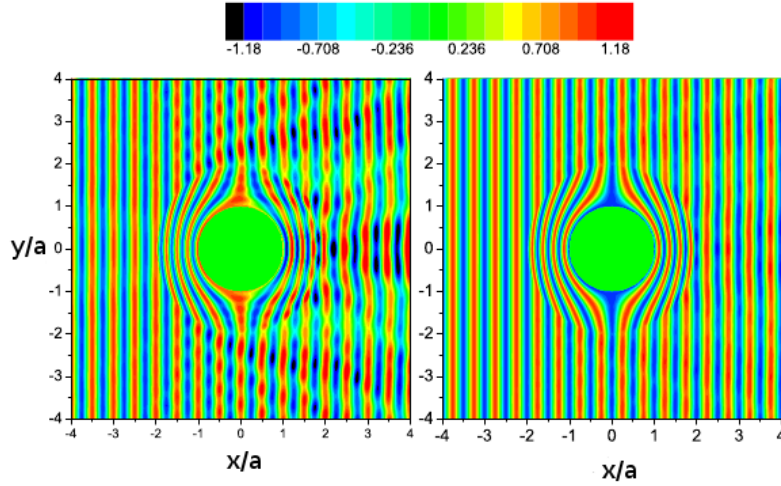
Izračunali smo lastnosti osnovne enote plašča. Celoten plašč sestavlja veliko (v simulacijah od 50 do 200) takih dvojnih plasti [13]. Njihove lastnosti se morajo z radijem spreminjati, kot smo izračunali prej [enačba (27)]. Iz enačb 27 in 31 izračunamo potek ρ_1 in ρ_2 v odvisnosti od radija. Rezultat je na sliki 10. Na sliki 11 so prikazani rezultati simulacije plastovitega plašča, opisanega zgoraj, za dve različni števili plasti.

D. Torrent in J. Sanches-Desha sta ugotovila, da je efektivna gostota v kvadratno mrežo postavljenih valjev za majhne in srednje velika polnitvena razmerja odvisna od snovi, iz katere je valj, in od polnitvenega razmerja [13]. Zato lahko eno od komponent plašča načeloma izdelamo iz valjev iz enake snovi, le polnitveno razmerje mreže se mora spreminjati z radijem. Ukvarjala pa sta se tudi s primerom, ko kristal zgradimo iz valjev iz

²Soničen kristal je periodična, urejena struktura sipalcev. V dolgovalovni limiti se sonični kristali obnašajo kot tekočini podobno sredstvo. Lahko imajo anizotropno efektivno gostoto.



Slika 10: Odvisnost gostote obeh komponent plašča od radija za $d_1 = d_2$ in $b = 2a$. Prvi material mora na notranji strani plašča doseči velike relativne gostote, drugi pa majhne.

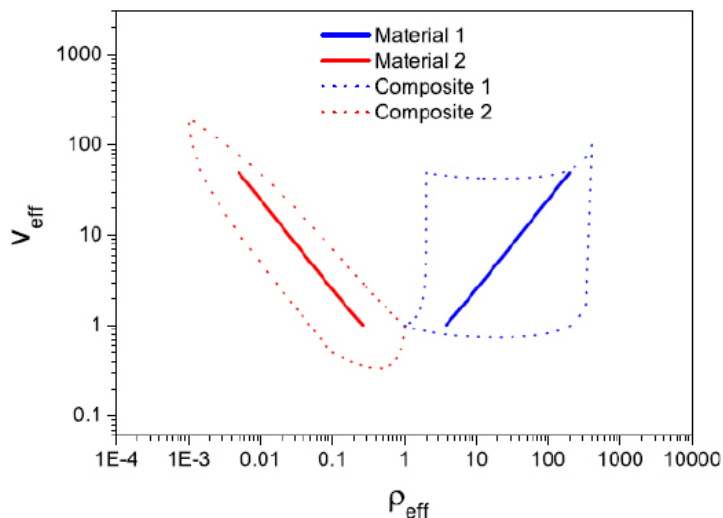


Slika 11: Rezultati simulacij — tlačno polje [13]. $b = 2a$ in $\lambda = a/2$. Plašč na levi je iz petdesetih dvojnih plasti, plašč na desni pa iz dvestotih. Pri plašču iz dvesto plasti je sipanje komaj opazno.

dveh različnih snovi. Izbrala sta si po dve snovi za izdelavo valjev za vsakega od kristalov. Samo s spreminjanjem polnitvenega razmerja mreže lahko s tako izbiro (parametri so zbrani v tabeli 1) pokrijemo vse vrednosti gostot in hitrosti, ki jih potrebujemo za plašč, opisan zgoraj. Slika, ki prikazuje območje parametrov, ki jih lahko dosežemo z izbranimi snovmi, je na sliki 12.

| | ρ/ρ_0 | c/c_0 |
|-----------|---------------|---------|
| 1α | 400 | 100 |
| 1β | 2 | 50 |
| 2α | 0.1 | 0.5 |
| 2β | 0.001 | 200 |

Tabela 1: Parametri materialov, izbranih za izdelavo valjev [13]. c je okrajšava za $\sqrt{c_l^2 - c_t^2}$, kjer sta c_l longitudinalna hitrost in c_t transverzalna hitrost zvoka v materialu. Materiali s takimi lastnostmi še niso bili najdeni.



Slika 12: Fazni diagram dveh soničnih kristalov [13]. Oba kristala sta narejena iz dveh različnih vrst valjev. Območji, ki ju omejujeta črtkani črti, sta območji parametrov, ki ju lahko doseže posamezen kristal, če spreminjamo polnitveno razmerje valjev. Gostote in hitrosti zvoka materialov so zbrane v tabeli. Polni črti predstavljata obseg parametrov, ki ju potrebujemo za izdelavo plašča.

Poleg dvodimenzionalnega primera je v praksi vsekakor zanimiv tudi tridimenzionalni. Približno dve leti po prvih člankih o ogrinjanju s koordinatno transformacijo so Cummer, Schurig in sodelavci dokazali, da je možno narediti tudi zvočno ogrinjalo v 3D [14]. Ukvarjali so se ogrinjanjem krogle — plašč je bil tako krogelna lupina. Lotili so se reševanja amplitudne enačbe

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla p) + \frac{\omega^2}{K} p = 0. \quad (32)$$

Iz simetrije problema so sklepali, da je so komponente tenzorja gostote in stisljivost odvisni samo od radija. Do rešitve so prišli s separacijo spremenljivk. Polarni del rešijo pridružene Legendrove funkcije, azimutalni del pa sinusi in kosinusi. Radialni del je trši oreh, ki pa so ga uspešno rešili. Končna rešitev — $\rho_\Phi(r)$, $\rho_r(r)$ in $\chi(r)$ — je dokaj podobna rešitvam v 2D:

$$\rho_\Phi = \rho_\vartheta = \frac{b-a}{b}, \quad \rho_r = \frac{b-a}{b} \frac{r^2}{(r-a)^2}, \quad \chi^{-1} = \frac{(b-a)^3}{b^3} \frac{r^2}{(r-a)^2}. \quad (33)$$

5 Zaključek

Elektromagnetna in akustična ogrinjala so v zadnjih letih predmet veliko raziskav in v seminarju ni bilo mogoče predstaviti vsega. Ogledali smo si način s koordinatno transformacijo, ker ga je možno uporabiti tako za elektromagnetne valove kot za zvok. Ugodno pri tem načinu je, da plašč ni odvisen od tega, kakšen predmet želimo skriti. Slabost pa je, da zaradi absorpcije deluje na ozkem območju frekvenc. Z metodo s koordinatno transformacijo so uspeli realizirati ogrinjalo za vidni del elektromagnetnega spektra [8]. Akustična ogrinjala se zdijo zelo uporabna — lahko bi se uporabljala za zaščito pred hrupom. Razvoj tehnologije ogrinjanja je šele v povojih in je trenutno najbrž težko reči, kaj vse bo v prihodnosti možno.

Literatura

- [1] P. Alitalo in S. Tretyakov, *Materials Today* **12/3**, 22 (2009)
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/F-117_Nighthawk (28. 4. 2009).
- [3] A. Alu in N. Engheta, *Phys. Rev. E* **72**, 016623 (2005).
- [4] G.W. Milton in N.A. Nicorovici, *Proc. R. Soc. A* **462**, 3027 (2006).
- [5] U. Leonhardt, *Science* **312**, 1777 (2006).
- [6] M. Farhat, S. Enoch, S. Guenneau in A. B. Movchan, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 134501 (2008).
- [7] J.B. Pendry, D. Schurig in D.R. Smith, *Science* **312**, 1780 (2006).
- [8] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev in V. M. Shalaev, *Nat. Photonics* **1**, 224 (2007).
- [9] W. Yan, M. Yan, Z. Ruan in M. Qiu, *New J. Phys.* **10**, 043040 (2008).
- [10] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr in D. R. Smith, *Science* **314**, 977 (2006).
- [11] *IEEE Trans. Micr. Theory Techniques* **47**, 2075 (1999).
- [12] S.A. Cummer in D. Schurig, *New J. Phys.* **9**, 45 (2006).
- [13] D. Cummer in J. Sanchez-Dehesa, *New J. Phys* **10**, 063015 (2008).
- [14] S. A. Cummer, B. I. Popa, D. Schurig, D. R. Smith, J. Pendry, M. Rahm in A. Starr, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 024301 (2008).