

# Proseminar A

---

zapiski

P. Ziherl

*Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani  
Institut Jožef Stefan*

9. junij 2016



# Kazalo

<b>Predgovor</b>	<b>7</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>9</b>
<b>2 Vektorji</b>	<b>11</b>
2.1 Osnovne operacije . . . . .	11
2.2 Vrtež koordinatnega sistema . . . . .	12
2.3 Skalarni produkt . . . . .	15
2.4 Vektorski produkt . . . . .	17
2.5 Psevdoskalarji in psevdovektorji . . . . .	24
<b>3 Odvod</b>	<b>27</b>
3.1 Odvod in diferencial . . . . .	28
3.2 Parcialni odvod in totalni diferencial . . . . .	32
3.3 Nabla in gradient . . . . .	36
3.4 Divergenca . . . . .	38
3.5 Rotor . . . . .	41
<b>4 Koordinatni sistemi</b>	<b>45</b>
4.1 Inercialni in neinercialni sistemi . . . . .	45
4.2 Krivočrtni koordinatni sistemi . . . . .	53
4.3 Odvod v krivočrtnih koordinatah . . . . .	55
<b>5 Integral</b>	<b>63</b>
5.1 Integral v geometriji, mehaniki in termodinamiki . . . . .	68
5.2 Nepravi integrali . . . . .	74
5.3 Odvod po zgornji ali spodnji meji . . . . .	76
5.4 Odvod po parametru . . . . .	77
5.5 Linijski integrali . . . . .	78

<b>6</b>	<b>Diferencialne enačbe</b>	<b>81</b>
6.1	Navadne diferencialne enačbe 1. reda . . . . .	82
6.2	Navadne diferencialne enačbe višjega reda . . . . .	89
	<b>Literatura</b>	<b>102</b>





# Pregovor

Tole gradivo je groba in nepopolna inačica zapiskov za 1. semester Proseminarja A. Namen predmeta je pregled in utrjevanj matematičnega opisa fizikalnih pojavov, s čimer želimo študentom olajšati razumevanje Klasične fizike kot temeljnega fizikalnega predmeta v 1. letniku in jih pripraviti na nadaljnji študij. Vsebine, ki jih obravnavamo v zimskem semestru, so vektorski račun, diferencialni račun, krivočrtni koordinatni sistemi, integrali, diferencialne enačbe. . . Večina zgledov, s katerimi ilustriramo izbrano temo ali pristop, je iz mehanike in ne zahteva poglobljenega fizikalnega znanja.

Potrudil se bom dodati manjkajoče uvodno poglavje in vključiti skice. Vseeno upam, da bo tudi nepopolna inačica zapiskov tu in tam dobrodošla. Bralce, ki bodo v zapiskih našli kako napako ali nejasnost, prosim, da me na to opozorijo. Opozorim naj, da ti zapiski ne vključujejo vsebin, obravnavanih v spomladanskem semestru.

Primož Ziherl





# Poglavje 1

## Uvod

Fermi back-of-the-envelope problems [1]



## Poglavje 2

# Vektorji

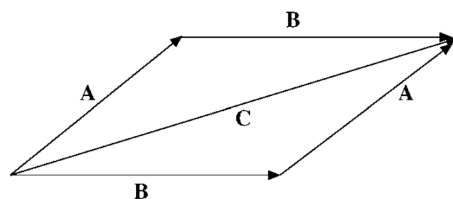
Znaten del fizikalnih pojavov poteka v 3D prostoru in za mnoge je dimenzija prostora pomembna ali celo ključna. Tudi številne fizikalne količine so vektorji, torej geometrijski objekti z velikostjo in smerjo v prostoru — lega  $\mathbf{r}$ , hitrost  $\mathbf{v}$ , sila  $\mathbf{F}$ , jakost električnega polja  $\mathbf{E}$ . . . Zato je dobro obnoviti osnove vektorskega računa. Ob tem bomo tudi boljše spoznali razliko med vektorji in skalarji, to je količinami, ki imajo le velikost (masa, električni naboj, energija, temperatura. . .).

### 2.1 Osnovne operacije

Vsoto vektorjev  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  dobimo tako, da postavimo vektorja v sosedno lego. Vsota je tedaj vektor, ki kaže od začetka prvega vektorja do konca drugega. Vsota je komutativna

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad (2.1)$$

kar hitro uvidimo s konstrukcijo (sl. 2.1). Podobno pokažemo, da je sešte-



Slika 2.1: Seštevanje vektorjev: paralelogramsko pravilo ([AW 1.2](#)).

vanje asociativno  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ . Fizikalna zgleda za oba primer sta npr. premik (če naredimo po sobi najprej 3 korake v desno in nato 2 naprej, pridemo na isto mesto kot če najprej stopimo 2 koraka naprej in potem 3 v desno) ali seštevanje sil. Tu je posebej zanimiv primer ravnovesje sil (sl. AW 1.4): prvi Newtonov zakon pravi, da telo miruje, če je vsota sil 0 — na telo, obešeno na vrvici, delujeta 2 sili vzdolž vrvic in sila teže, pa se vse seštejejo v 0.

Vektorje predstavimo v izbranem koordinatnem sistemu; začnimo s kartezičnim, napetem na med seboj pravokotne enotske vektorje  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  in  $\mathbf{e}_z$ , ki tvorijo bazo sistema in so v vseh točkah prostora enaki:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

kjer so  $A_x, A_y, A_z$  vsi odvisni od kraja. Dolžina tega vektorja je po Pitagorovem izreku

$$|\mathbf{A}(\mathbf{r})| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (2.3)$$

Vsota dveh vektorjev je tedaj kar vsota komponent:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$ .

Osnovna gibalna enačba v fiziki, drugi Newtonov zakon, je vektorska enačba

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.4)$$

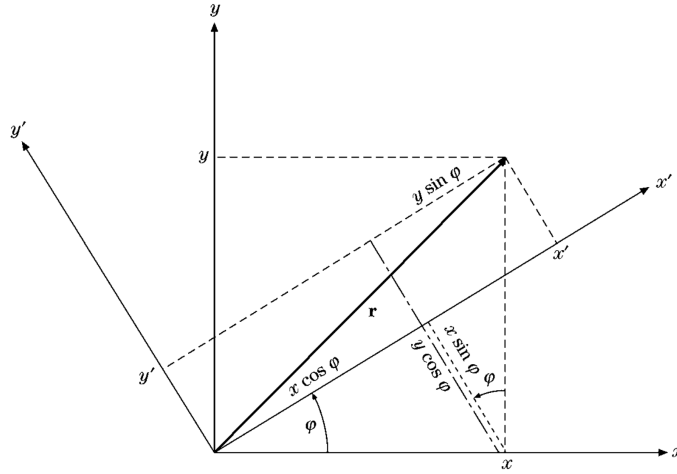
kar lahko razpišemo po komponentah (in še obrnemo, da imamo na levi pospeške, na desni sile)

$$a_x = \frac{F_x}{m}, a_y = \frac{F_y}{m} \quad \text{in} \quad a_z = \frac{F_z}{m}. \quad (2.5)$$

Vidimo, da je gibanje vzdolž vsake od osi neodvisno od gibanja vzdolž druge. To upoštevamo npr. pri metu s stolpa, kjer je gibanje v vodoravni smeri enakomerno, če le ni upora, gibanje vzdolž navpične osi pa pospešeno. (Tu smo že nakazali še eno operacijo nad vektorji in sicer množenje s skalarjem, v tem primeru z maso.)

## 2.2 Vrtež koordinatnega sistema

Često je prikladno kak vektor prikazati v zavrtenem koordinatnem sistemu. Na sl. 2.2 sta dva koordinatna sistema, vodoravno-navpični  $S$  z osema  $x$  in  $y$  ter zavrteni  $S'$  z osema  $x'$  in  $y'$ . Najprej pogledamo projekciji koordinat  $x$  in  $y$  na os  $x'$ , pri čemer si pomagamo s pravokotnima trikotnikoma, ki imata hipotenuzi vzdolž osi  $x$  in  $y$ : uvidimo, da znašata ti projekciji  $x \cos \phi$

Slika 2.2: Vrtež koordinatnega sistema okoli osi  $z$  AW 1.6.

oziroma  $y \sin \phi$  ter da je koordinata  $x'$  je vsota teh prispevkov. Podobno velja za projekciji na os  $y'$ , ki sta enaki  $-x \sin \phi$  oziroma  $y \cos \phi$ . Tako ugotovimo, da se pri vrtežu za kot  $\phi$  okoli osi  $\mathbf{e}_z$  koordinati  $x$  in  $y$  preslikata v

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad (2.6)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi. \quad (2.7)$$

Enako kot koordinati krajevnega vektorja  $\mathbf{r} = (x, y)$  se transformirata tudi komponenti poljubnega vektorja  $\mathbf{A}$ :

$$A'_x = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi, \quad (2.8)$$

$$A'_y = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi. \quad (2.9)$$

(Kasneje se bomo to naučili zapisati z matriko.) Primer za rabo take transformacije je gibanje po klanecu. V izvornem koordinatnem sistemu, vezanem na vodoravnico in navpičnico, se ob gibanju telesa po klanecu hkrati spreminjata obe koordinati  $x$  in  $y$ . Prednost tega sistema je, da ima sila teže le komponento vzdolž osi  $y$ , a poleg te imamo še silo podlage, ki ima obe:  $\mathbf{F}_p = -mg \sin \phi \mathbf{e}_x + mg \cos \phi \mathbf{e}_y$ . V drugem Newtonovem zakonu je zato tudi pospešek vzdolž osi  $x$  različen od 0.

Če koordinatni sistem zasukamo, da kaže os  $x'$  vzdolž klanca, se spremeni dvoje. Najprej ima sila teže v tem sistemu komponenti vzdolž osi  $x'$  in  $y'$ ,

saj se  $\mathbf{F}_g = (0, -mg) = mg(0, -1)$  preslika v

$$\mathbf{F}'_g = mg(-\sin \phi, -\cos \phi). \quad (2.10)$$

Poleg tega zavrti tudi sila podlage. Od prej vemo, da je velikost sile podlage  $mg \cos \phi$ , po komponentah pa

$$\mathbf{F}_p = mg \cos \phi(-\sin \phi, \cos \phi). \quad (2.11)$$

Uvidimo, da da preslikava z enačbama (2.8) in (2.9)

$$\mathbf{F}'_p = mg \cos \phi(0, 1), \quad (2.12)$$

tako da se komponenta vzdolž osi  $y$  izniči s statično komponento sile teže, kot je seveda prav. — Zdaj lahko zapišemo 2. Newtonov zakon v zavrnem koordinatnem sistemu:

$$ma'_x = -mg \sin \phi, \quad (2.13)$$

$$ma'_y = 0. \quad (2.14)$$

Od prej vemo, da bi se v prvotnem sistemu glasil takole:

$$ma_x = -mg \cos \phi \sin \phi, \quad (2.15)$$

$$ma_y = -mg + mg \cos^2 \phi. \quad (2.16)$$

Poiščimo velikost pospeška v tem sistemu! Dolžino vektorja izračunamo z enačbo (2.3), ki da

$$\begin{aligned} ma &= mg \sqrt{(-\cos \phi \sin \phi)^2 + (-1 + \cos^2 \phi)^2} \\ &= mg \sqrt{\sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^4 \phi} \\ &= mg \sin \phi \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \\ &= mg \sin \phi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

kar je očitno enako velikosti pospeška v zavrnem sistemu. Hitro vidimo, da se pri vrtežu ohranja dolžina poljubnega vektorja (komponento  $z$  zaradi preglednosti izpustimo, ker je tako ali tako enaka):

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sqrt{A_x'^2 + A_y'^2} \\ &= \sqrt{(A_x \cos \phi + A_y \sin \phi)^2 + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi)^2} \\ &= \left( A_x^2 \cos^2 \phi + 2A_x A_y \cos \phi \sin \phi + A_y^2 \sin^2 \phi + A_x^2 \sin^2 \phi \right. \\ &\quad \left. - 2A_x A_y \sin \phi \cos \phi + A_y^2 \cos^2 \phi \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

To spoznanje lahko takoj uporabimo: naj bo vektor  $\mathbf{A}$  hitrost telesa na klancu, pa sklepamo, da je kinetična energija  $mv^2/2$  v prvotnem sistemu in v zavrnem enaka, kot je tudi prav.

## 2.3 Skalarni produkt

Skalarni produkt vektorjev definiramo z

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad (2.19)$$

kjer je  $\theta$  kot med vektorjema. Poseben primer skalarnega produkta so komponente vektorja  $\mathbf{A}$  vzdolž osi koordinatnega sistema:

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x, A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_y, \quad \text{in} \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (2.20)$$

Skalarni produkt je distributiven in asociativen

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{B}) = (\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \lambda \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.22)$$

V kartezičnih koordinatah ga izračunamo z

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \cdot (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i, \end{aligned} \quad (2.23)$$

kjer smo upoštevali, da je  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1$  ter  $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$  itd., saj so bazni vektorji enotski in med seboj pravokotni.

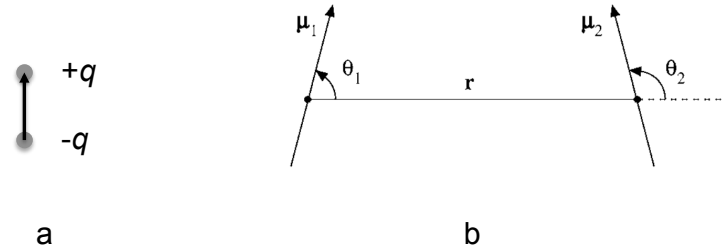
Eden osnovnih primerov skalarnega produkta v mehaniki je delo  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ , ki je enako  $Fs$ , če se prijemališče sile premakne v smeri sile, in 0, če je premik pravokoten na silo.

Pomembna lastnost skalarnega produkta je invariantnost na vrtež koordinatnega sistema. To pokažemo z lastnostjo (2.18), ki pove, da se dolžini obeh vektorjev pri vrtežu ohranjata, obenem pa je jasno, da se ohranja tudi kot med vektorjema. Zato je

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = A'B' \cos \theta' = AB \cos \theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.24)$$

Podobno ugotovimo tudi za vzporedni premik (translacijo) koordinatnega sistema. Tu je

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{a}, \quad (2.25)$$



Slika 2.3: Električni dipol (a) in dva bližnja dipola  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$ , razmaknjena za  $\mathbf{r}$  (b) [AW str. 18](#).

kjer je  $\mathbf{a}$  fiksni vektor. Vzporedni premik ohranja dolžino obeh vektorjev in kot med njima ter s tem tudi njun skalarni produkt.

Invarianca pomeni, da je tudi delo  $W'$ , zapisano v zavrnem ali premaknjem koordinatnem sistemu, enako delu  $W$ ; če bi kinetično energijo zapisali kot  $m\mathbf{v}^2/2$ , pa bi znova povedala, da se ohranja tudi ta. Ti dve spoznanji sta primera splošne resnice, da je vrednost skalarnih količin v vseh koordinatnih sistemih, ki jih iz prvotnega dobimo z rotacijo in translacijo, enaka.

Če vektor  $\mathbf{C}$  dobimo s seštevanjem  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$ , je

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.26)$$

odkoder sledi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} (C^2 - A^2 - B^2), \quad (2.27)$$

kar je kosinusni izrek. Te zveze se boste spomnili pri kvantni mehaniki pri obravnavi sklopitve spin-tir.

Za zgled uporabe skalarnega produkta prepisimo interakcijsko energijo dveh električnih dipolov. Električni dipol tvorita dva bližnja nasprotno enaka naboja  $q$  in  $-q$ , razmaknjena za  $d$ . Vektor dipolnega momenta  $\mathbf{p}$  kaže od negativnega proti pozitivnemu naboju (sl. 2.3a), velikost momenta pa je  $qd$ . Taka dipola delujeta drug na drugega in interakcijska energija znaša

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right], \quad (2.28)$$

kjer je  $\mathbf{r}$  vektor od središča prvega do središča drugega dipola. Zapišimo ta izraz s koti med  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{r}$  ( $\theta_1$ ),  $\mathbf{p}_2$  in  $\mathbf{r}$  ( $\theta_2$ ) ter azimutalnim kotom  $\mathbf{p}_2$  glede na ravnino, ki jo tvorita  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{r}$  ( $\phi$ ), kot kaže sl. 2.3b! Postavimo  $\mathbf{r}$  tako, da



kaže vzdolž osi  $x$ :

$$\mathbf{r} = (r, 0, 0), \quad (2.29)$$

$\mathbf{p}_1$  pa naj leži v ravnini  $xz$ :

$$\mathbf{p}_1 = p_1(\cos \theta_1, 0, \sin \theta_1). \quad (2.30)$$

Vektor  $\mathbf{p}_2$  bo podoben  $\mathbf{p}_1$ , le da ga moramo zasukati okoli osi  $x$  za kot  $\phi$ . Pred tem vrtežem je  $\mathbf{p}'_2 = p_2(\cos \theta_2, 0, \sin \theta_2)$ , vrtež pa premeša komponenti  $p_{2y}$  in  $p_{2z}$ , kakor narekujeja enačbi (2.8) in (2.9), le da se pač nanašata na osi  $y$  in  $z$  in ne na  $x$  in  $y$ . To da

$$\mathbf{p}_2 = p_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2 \sin \phi, \sin \theta_2 \cos \phi). \quad (2.31)$$

Zdaj imamo vse tri vektorje in skalarni produkti so na dlani:  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} = p_1 r \cos \theta_1$ ,  $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} = p_2 r \cos \theta_2$  in  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi$ . Končni rezultat je

$$V = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi). \quad (2.32)$$

## 2.4 Vektorski produkt

V mehaniki nastopajo tudi vektorske količine, ki jih dobimo z množenjem drugih vektorjev. Najpreprostejši primer je navor, pri katerem moramo upoštevati poleg velikosti ročice  $\mathbf{r}$  in sile  $\mathbf{F}$  tudi njuno medsebojno orientacijo — če npr. kaže sila vzdolž ročice, je navor 0. Navor je definiran z vektorskim produktom

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.33)$$

Še en primer vektorskega produkta iz mehanike je vrtilna količina  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , v elektromagnetizmu pa imamo Lorentzovo silo  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .

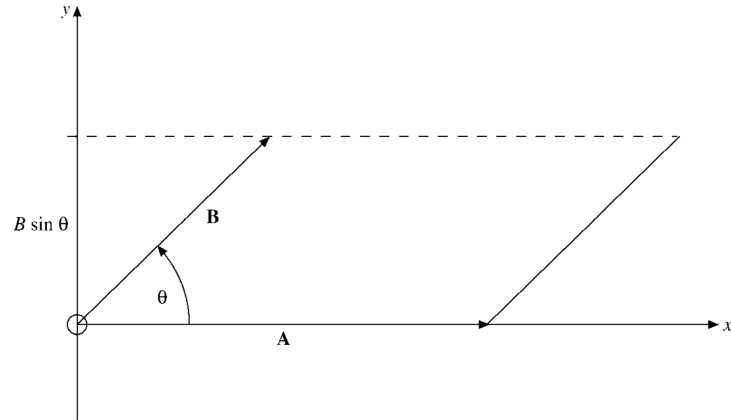
Velikost vektorskega produkta  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  je  $AB \sin \phi$ , kjer je  $\phi$  kot med obema vektorjema. Geometrijski pomen velikosti vektorskega produkta je površina paralelograma, ki ga napenjata oba vektorja (sl. 2.4). Smer  $\mathbf{C}$  pa določa smer desnega vijaka pri zasuku  $\mathbf{A}$  proti  $\mathbf{B}$  po najkrajši poti. Odtod takoj vidimo, da je vektorski produkt antikomutativen:  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ .

Z vektorskim produktom lahko zapišemo bazne vektorje kartezičnega sistema:

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x. \quad (2.36)$$



Slika 2.4: Velikost vektorskega produkta je enaka ploščini paralelograma, napetega na oba vektorja.

Seveda je  $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0$ . S temi zvezami lahko izračunamo  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  v kartezičnem sistemu:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Vektorski produkt prikladno izračunamo tudi kot determinanto

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

Za vajo preverimo, ali je definicija (2.37) skladna s tem, da je  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  pravokoten na  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \\ &= (A_x, A_y, A_z) \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\ &= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

(Podobno za  $\mathbf{B}$ .) Zapis po komponentah nas pouči tudi, da je

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\
 &\quad \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\
 &= A_y^2 B_z^2 - 2A_y A_z B_y B_z + A_z^2 B_y^2 \\
 &\quad + A_z^2 B_x^2 - 2A_x A_z B_x B_z + A_x^2 B_z^2 \\
 &\quad + A_x^2 B_y^2 - 2A_x A_y B_x B_y + A_y^2 B_x^2. \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

V šestih členih vrste  $A_y^2 B_z^2$  prepoznamo produkte  $(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$ ; vidimo pa, da manjkajo produkti vrste  $A_x^2 B_x^2$ , ki jih dodamo, da dopolnimo te člene do popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \\
 &= (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \\
 &\quad - A_x^2 B_x^2 - A_y^2 B_y^2 - A_z^2 B_z^2 \\
 &\quad - 2A_x B_x A_y B_y - 2A_x B_x A_z B_z - 2A_y B_y A_z B_z. \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Naposled smo člene v zadnji vrstici zapisali v drugačnem vrstnem redu, da lažje sprevidimo, da dajo skupaj s tistimi v drugi vrstici ravno  $(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2$ , tako da je

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2. \tag{2.42}$$

Odtod takoj sledi  $C = AB\sqrt{1 - \cos^2 \phi} = AB \sin \phi$ .

Zvezo (2.42) uporabimo za nekoliko drugačen zapis kinetične energije krožečega telesa. Kroženje je prikladneje zapisati z vektorjem kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}$ , ki kaže vzdolž osi, okoli katere telo kroži. Tedaj je (sl. 2.5)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \tag{2.43}$$

Slika 2.5: Zveza med kotno hitrostjo  $\boldsymbol{\omega}$ , krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}$  in obodno hitrostjo  $\mathbf{v}$ .

kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor telesa. Na prvi pogled se zdi, da je sedaj obodna hitrost odvisna od izbire koordinatnega izhodišča, saj se  $\mathbf{r}$  spreminja, če npr. izhodišče premikamo vzdolž osi. Vendar komponenta  $\mathbf{r}$  vzdolž osi, torej vzdolž  $\boldsymbol{\omega}$ , ne prispeva k vektorskemu produktu, ker je vektorski produkt vzporednih vektorjev 0. Zdaj zapišimo kinetično energijo  $E_{kin} = m\mathbf{v}^2/2 = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2/2$ : zveza (2.42) da

$$E_{kin} = \frac{m}{2} [r^2\omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2]. \quad (2.44)$$

Odtod prav tako vidimo, da je kinetična energija neodvisna od izbire izhodišča in da je očitno najbolj prikladno izbrati izhodišče v ravnini, v kateri kroži telo, da sta  $\mathbf{r}$  in  $\boldsymbol{\omega}$  pravoktna ter  $E_{kin} = mr^2\omega^2/2$ .

Često bomo srečali tudi skalarni produkt vektorja z vektorskim produktom  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ . Pomembna lastnost tega produkta je, da lahko faktorje ciklično permutiramo:

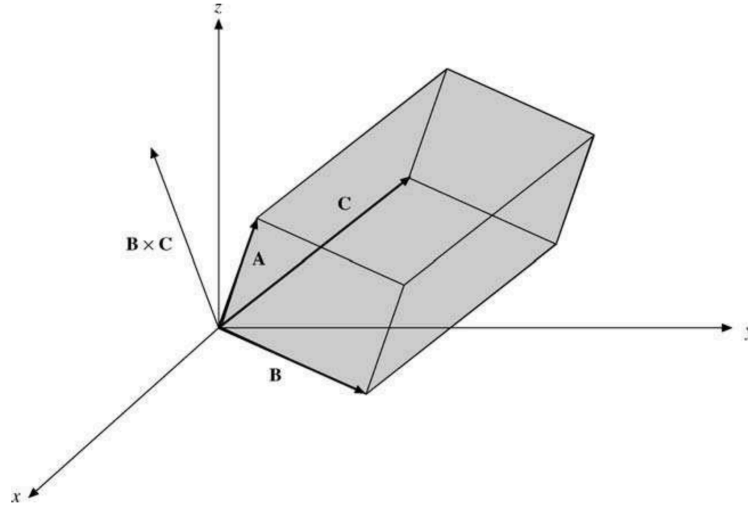
$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \\ &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\ &= B_x(C_yA_z - C_zA_x) + B_y(C_zA_x - C_xA_z) + B_z(C_xA_y - C_yA_x) \\ &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pri anticiklični permutaciji se znak spremeni, saj je npr.  $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times \mathbf{B}$  in tako  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B})$ . Kompakten zapis produkta je tudi z determinanto

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (2.46)$$

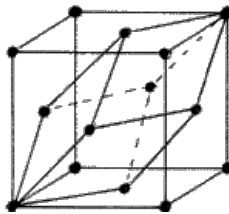
Produkt  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  ima geometrijsko interpretacijo.  $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  je pravokoten na  $\mathbf{B}$  in  $\mathbf{C}$ , njegova velikost pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata ta vektorja. Skalarni produkt  $\mathbf{A}$  s tem produktom je torej produkt ploščine paralelograma s projekcijo  $\mathbf{A}$  na normalo na paralelogram, to je prostornina paralelepipeda, ki ga tvorijo trije vektorji (sl. 2.6). To lahko uporabimo npr. pri izračunu prostornine primitivne celice v kakem kristalu — primitivna celica je paralelepiped, ki vsebuje natanko 1 atom. V ploskovno centrirani kubični mreži ležijo atomi v ogliščih kocke in na središčih stranic, primitivno celico pa napenjajo vektorji iz oglišča do bližnjih središč (sl. 2.7). Koordinate teh vektorjev so

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a/2, a/2, 0), \\ \mathbf{a}_2 &= (0, a/2, a/2), \\ \mathbf{a}_3 &= (a/2, 0, a/2). \end{aligned} \quad (2.47)$$



Slika 2.6: Geometrijski pomen produkta  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  je prostornina paralelepipeda, ki ga napejajo vektorji (AW 1.16).

Tedaj je  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = (a^2/4, -a^2/4, a^2/4)$ , tako da je prostornina primitivne celice, v tem primeru romboida,  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = a^4/4$ . Kockasta osnovna celica tega kristala ima prostornino  $a^3$ , zato sklepamo, da vsebuje 4 atome; kar bi sicer lahko ugotovili tudi bolj preprosto.



Slika 2.7: Primitivna celica ploskovno centriranega kubičnega kristala.

Uporaben je tudi trojni vektorski produkt  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , ki ga bomo

izračunali kar na silo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_x, A_y, A_z) \times (B_y C_z - B_z C_y, B_z C_x - B_x C_z, B_x C_y - B_y C_x) \\
&= (A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z), \\
&\quad A_z(B_y C_z - B_z C_y) - A_x(B_x C_y - B_y C_x), \\
&\quad A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y)) \quad (2.48)
\end{aligned}$$

V prvi komponenti opazimo člena  $-A_y B_y C_x - A_z B_z C_x$ , ki predstavljata del  $x$  komponente izraza  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ ; dopolniti ju moramo z  $-A_x B_x C_x$ . Potem je celotna  $x$  komponenta enaka

$$\begin{aligned}
&A_x B_x C_x + A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)C_x \\
&= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)C_x, \quad (2.49)
\end{aligned}$$

tako da prvi člen predstavlja  $x$  komponento izraza  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}$ . Podobno opazimo pri ostalih dveh komponentah  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  in sklenemo, da je

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (2.50)$$

S tem rezultatom in definicijo (2.43) lahko zdaj izrazimo vrtilno količino  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  z vektorjem kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}$ :  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  in tako je

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \\
&= m[r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] = mr^2[\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{e}_r]. \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Tu je  $\mathbf{e}_r$  enotski vektor vzdolž  $\mathbf{r}$ , torej  $\mathbf{r}/r$ . Če izberemo koordinatno izhodišče v ravnini, v kateri kroži telo, tako da sta  $\mathbf{e}_r$  in  $\boldsymbol{\omega}$  pravokotna, je

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega} \quad (2.52)$$

in sta vektorja vrtilne količine in kotne hitrosti vzporedna; faktor  $mr^2$  predstavlja vztrajnostni moment točkastega telesa.

Poglejmo, kako lahko s translacijo koordinatnega sistema zapišemo vrtilno količino sistema  $N$  točkastih teles z masami  $m_i$  (indeks  $i$  preteče vrednosti od 1 do  $N$ ). Lege in hitrosti teles v laboratorijskem sistemu označimo z  $\mathbf{r}_i$  in tedaj je lega težišča  $\mathbf{R}$  določena z

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (2.53)$$

kjer je

$$M = \sum_i m_i \quad (2.54)$$

skupna masa vseh teles. Hitrost težišča je tedaj

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (2.55)$$

Zdaj lahko zapišemo lege teles kot vsoto lege težišča  $\mathbf{R}$  in lege  $\mathbf{v}$  v težiščnem koordinatnem sistemu  $\mathbf{r}'_i$ :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \quad (2.56)$$

tako da je

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \sum_i m_i \mathbf{R} = 0, \quad (2.57)$$

kjer smo upoštevali enačbo (2.53). Podobno velja za hitrosti:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_i \quad (2.58)$$

ter

$$\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0. \quad (2.59)$$

Skupna vrtilna količina je tedaj enaka

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\mathbf{V} + \mathbf{v}'_i) \\ &= \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{V} \sum_i m_i + \mathbf{R} \times \sum_i m_i \mathbf{v}'_i + \left( \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{V} \\ &\quad + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Drugi in tretji člen sta zaradi enačb (2.59) oziroma (2.57) enaka 0, tako da je

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i. \quad (2.61)$$

Tu prvi člen predstavlja vrtilno količino, kakršno bi imela telesa, če bi bila njihova masa zbrana v težišču, drugi pa vrtilno količino gibanja glede na težišče.

## 2.5 Pseudoskalarji in psevdovektorji

Omenili smo že, da se skalarni produkt vektorjev  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ne spremeni pri vrtežu. Prav tako ostane enak pri inverziji prostora, kjer koordinatni sistem obrnemo s temle predpisom:

$$\begin{aligned}x' &= -x \\y' &= -y \\z' &= -z\end{aligned}\tag{2.62}$$

ali na kratko  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ . Ker pri inverziji tako  $\mathbf{A}$  kot  $\mathbf{B}$  prevržeta znak, ostane znak skalarnega produkta nespremenjen.

Skalarni produkt vektorja in vektorskega produkta  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  se obnaša drugače. Pri inverziji vsi trije faktorji spremenijo znak ( $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$  in  $\mathbf{C} \rightarrow -\mathbf{C}$ ), zato ga tudi skalarni produkt. Pravimo, da je  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  pseudoskalar. Ker lahko zrcaljenje preko ravnine razdelimo na inverzijo in na vrtež za  $180^\circ$ , se skalarji in pseudoskalarji različno vedejo tudi pri zrcaljenju. Pri vrtežu pa se ne skalar ne pseudoskalar ne spremenita.

Podobno ločimo vektorje (t.j. prave ali polarne vektorje) od psevdovektorjev (tudi nepravih ali aksialnih vektorjev). Hitrost  $\mathbf{v}$  je npr. pravi vektor, saj se pri inverziji prostora preslika v  $-\mathbf{v}$  in se ji pri tem znak spremeni; enako seveda gibalna količina  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Vrtilna količina pa pri inverziji ne spremeni znaka, ker je definirana kot vektorski produkt dveh pravih vektorjev  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , ki oba prevržeta znak:  $\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}' = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$ . Zato rečemo, da je psevdovektor. Opozorimo, da se pri vrtežu pravi vektorji in psevdovektorji obnašajo enako, pri zrcaljenju ne.

V skladu s tem je trojni vektorski produkt  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  pravi vektor, če so posamezni faktorji pravi vektorji. Vektorski produkt dveh psevdovektorjev je psevdovektor, vektorski produkt pravega vektorja in psevdovektorja pa pravi vektor.

Psevdovektorja sta še navor  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  in gostota magnetnega polja okoli vodnika s tokom, ki ga določa Biot-Savartov zakon

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.\tag{2.63}$$

Tu je  $I$  jakost toka,  $\mu_0$  je induksijska konstanta,  $d\mathbf{l}$  je infinitezimalni odsek vodnika v smeri toka,  $\mathbf{r}$  je vektor, ki kaže od tega odseka do točke, v kateri računamo gostoto polja. Zato je pretok magnetnega polja

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},\tag{2.64}$$



kjer je  $\mathbf{A}$  površina ploskve, skozi katero računamo pretok, psevdoskalar;  $\mathbf{A}$  je namreč pravi vektor.



## Poglavje 3

# Odvod

Precej funkcij, s katerimi imamo opravka v fiziki, je pohlevnih in se zlagoma spreminjajo v odvisnosti od ene ali več neodvisnih spremenljivk. Pri prostem padu sta hitrost in lega telesa linearna oziroma kvadratna funkcija časa; šele ob trku ob tla je teh odvisnosti dramatično konec. Če majhna sprememba neodvisne spremenljivke privede le do končne spremembe funkcije, pravimo, da je slednja zvezna; natančneje, da je zvezna v izbrani točki.

Matematično točneje zveznost funkcije  $f$  v točki  $x = a$  vpeljemo z zahtevo, da obstaja limita  $f$  [ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ], da je  $f$  pri  $x = a$  definirana in da je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Ob tem se spomnimo pravil za računanje limit:

- limita vsote je vsota limit

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad (3.1)$$

- limita produkta je produkt limit

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (3.2)$$

in

- limita kvocienta je kvocient limit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}. \quad (3.3)$$

Limito včasih uspemo najti tako, da poiščemo zgornjo in spodnjo mejo iskane funkcije. Lep primer za to je  $\sin x/x$ . S sl. 3.1 razberemo, da je ploščina enakokrakega trikotnika z vrhom v kotu  $\alpha$  enaka  $r^2 \sin \alpha/2$  in manjša od

ploščine krožnega izseka z istim kotom in polmerom, ki znaša  $r^2\alpha/2$ , ta pa je zopet manjša od ploščine pravokotnega trikotnika z višino  $r \tan \alpha$ , ki je  $r^2 \tan \alpha/2$ . Ti dve neenakosti dasta  $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$ . Delimo s  $\sin \alpha$  in imamo

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (3.4)$$

Ko gre  $\alpha$  proti 0, se  $1/\cos \alpha$  od zgoraj bliža 1, tako da se mora tej vrednosti približati tudi razmerje  $\alpha/\sin \alpha$ . Ugotovili smo, da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (3.5)$$

Ta rezultat pride zelo prav pri obravnavi majhnih nihanj, npr. nihanja matematičnega ali vzmetnega nihala.

Slika 3.1: K izpeljavi limite  $\sin x/x$ . [Stephenson 15](#)

### 3.1 Odvod in diferencial

Mnoge fizikalne količine so odvodi drugih: hitrost je odvod lege po času, pospešek odvod hitrosti po času. . . Razumevanje teh povezav nudi globlje razumevanje fizike in je danes pravzaprav potrebno — diferencialni račun je Newton razvil tudi zato, ker je potreboval matematično orodje za obravnavo problemov v mehaniki, ki so se jih dotlej lotevali geometrijsko. (To izročilo smo večinoma pozabili in branje *Principov*, ki uporabljajo geometrijski pristop, je danes pravi izziv.)

Z odvodom se često nezavedno srečamo že v vsakdanjem življenju, tipično pri oceni spremembe kake količine v odvisnosti od kake druge. Vprašajmo se, za koliko odstotkov se spremeni prostornina krogle, če polmer povečamo za 5 %. Potrebujemo izraz za prostornino krogle  $V = 4\pi R^3/3$ , kamor vstavimo namesto  $R \rightarrow R + \Delta R$ , kjer je  $\Delta R = 0.05R$ . Zdaj izračunamo prostornino povečane krogle

$$V + \Delta V = \frac{4\pi}{3}(R + \Delta R)^3 = \frac{4\pi R^3}{3} \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^3, \quad (3.6)$$

tako da je

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^3 - 1 = 3\frac{\Delta R}{R} + 3\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^3. \quad (3.7)$$

Členi na desni znašajo po vrsti 0.15, 0.0075 oziroma 0.000125 in očitno ne napravimo hude napake, če upoštevamo le prvega in druga dva zanemarimo. Tedaj je

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 3\frac{\Delta R}{R} = 0.15 = 15\%. \quad (3.8)$$

Rezultat lahko zapišemo tudi tako, da diferencial prostornine  $\Delta V$  izrazimo z diferencialom polmera  $\Delta R$ :

$$\Delta V = \frac{3V}{R}\Delta R. \quad (3.9)$$

Ta izraz je poseben primer diferenciala funkcije ene spremenljivke  $y(x)$ , ki je enak produktu odvoda  $dy/dx = y'$  in diferenciala neodvisne spremenljivke  $\Delta x$ :

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x = y'\Delta x. \quad (3.10)$$

Če v izraz (3.9) vstavimo  $V = 4\pi R^3/3$ , uvidimo, da je  $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$ , tako da sklepamo, da je odvod  $f(x) = x^3$  enak  $f'(x) = 3x^2$  ter v splošnem  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .

Odvod funkcije  $f$  formalno definiramo z

$$\frac{df}{dx} \equiv f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.11)$$

in grafični pomen tega izraza je tangens kota med osjo  $x$  in tangento na krivuljo v točki  $x$  (sl. 3.2).

Slika 3.2: Grafični pomen odvoda skalarne funkcije  $f(x)$ . [Stephenson 26](#)

**Odvodi na kratko**

Uporabno je poznati odvode nekaterih elementarnih funkcij, npr.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1}, \\ \frac{d}{dx}\exp(x) &= \exp(x), \\ \frac{d}{dx}\sin x &= \cos(x), \\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin(x), \\ \frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x}\end{aligned}\tag{3.12}$$

ter osnovna pravila za odvajanje

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \\ \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) \\ \frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} &= -\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Posebej važno je še pravilo za verižno odvajanje

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.\tag{3.14}$$

Za vajo poiščimo odvod  $\sin x$ . Definicija [enačba (3.11)] pove

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Prva limita znaša 0: najprej izrazimo  $\cos \Delta x$  s polovičnim kotom, torej  $\cos \Delta x = \cos^2(\Delta x/2) - \sin^2(\Delta x/2) = 1 - 2\sin^2(\Delta x/2)$ , in ugotovimo, da

Slika 3.3: Maksimum in minimum funkcije  $f(x)$  ustrezata pogoju  $f'(x) = 0$ .

lahko to limito zapišemo kot produkt faktorjev  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)$  in  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(\Delta x/2)$ , ki sta oba enaka 0. Drugi člen pa je enak  $\cos x$ , saj je  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \Delta x/\Delta x = 1$ . Res je  $(\sin x)' = \cos x$ .

Z odvodom lahko določimo ekstrem kake funkcije. Pogosto nas zanima, kdaj kaka funkcija doseže bodisi minimum bodisi maksimum, in oba poiščemo prav z odvodom (sl. 3.3).

Denimo, da želimo iz dane mase pločevine izdelati valjast lonec brez pokrova in da je debelina sten predpisana; to dvoje pomeni, da je površina sten in plašča določena. Zanima nas, kako naj lonec oblikujemo, da bo imel največjo prostornino: iščemo maksimum funkcije

$$V(r, h) = \pi r^2 h, \quad (3.16)$$

kjer sta  $r$  in  $h$  polmer in višina lonca. Oba parametra povezuje pogoj, da je površina konstantna:

$$A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h. \quad (3.17)$$

Odtod lahko izrazimo  $h = A/2\pi r - r/2$ , tako da je

$$V(r, h) = \frac{Ar}{2} - \frac{\pi r^3}{2}. \quad (3.18)$$

Pogoj za ekstrem je  $dV/dr = A/2 - 3\pi r^2/2 = 0$  ali  $r = \sqrt{A/3\pi}$ . Največja prostornina lonca je torej

$$V_{\max} = \frac{A^{3/2}}{\sqrt{27\pi}}. \quad (3.19)$$

Funkcija, ki jo minimiziramo, je v mehaniki pogosto energija: tako poiščemo ravnovesno lego kakega telesa. Poglejmo si ravnovesje uteži z maso  $m$ , ki je obešena na vzmet, pritrjeno na strop. Ta problem znamo obravnavati s silami. Utež navzdol vleče sila teže, navzgor sila vzmeti. Dovolj je, da obravnavamo navpično komponento obeh sil, ki sta edini različni od 0;

os  $z$  usmerimo navzgor in koordinatno izhodišče postavimo v spodnji konec neraztegnjene vzmeti. V ravnovesju sila je vzmeti enaka sili teže ali

$$-kz - mg = 0, \quad (3.20)$$

kjer je  $k$  koeficient vzmeti. Odtod sledi

$$z = -\frac{mg}{k}. \quad (3.21)$$

Isti primer lahko rešimo tudi z energijo, ki sestoji iz prožnostne in iz potencialne energije:

$$E(z) = \frac{kz^2}{2} + mgz + konst. \quad (3.22)$$

(Aditivna konstanta je odvisna od tega, od kod štejemo potencialno energijo, a v celoti seveda ni pomembna.) Minimum skupne energije, ki predstavlja ravnovesje, poiščemo z odvodom:

$$\frac{d}{dz}E(z) = kz + mg = 0. \quad (3.23)$$

Rešitev te enačbe je enaka tisti, ki smo jo dobili z ravnovesjem sil [enačba (3.21)]. Kasneje bomo ugotovili, da smo z odvajanjem energije po  $z$  pravzaprav izračunali  $-F_z$ . A pristop z energijami je tehnično prikladnejši, saj problem nastavimo tako, da zapišemo skalaro funkcijo namesto sil, ki so vektorji.

### 3.2 Parcialni odvod in totalni diferencial

Doslej smo govorili o odvodu funkcij ene spremenljivke, a često imam opravka s takimi, ki so odvisne od več spremenljivk — nekako tako kot relief pokrajine. Pri funkciji  $f(x, y)$  lahko definiramo parcialni odvod po  $x$  pri konstantnem  $y$  ter parcialni odvod po  $y$  pri konstantnem  $x$ :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad \text{oziroma} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x. \quad (3.24)$$

Podobno vpeljemo višje parcialne odvode. Pomembna lastnost večine funkcij, ki so za fiziko zanimive, je to, da vrstni red parcialnih odvodov ni pomemben, da je torej

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x. \quad (3.25)$$



Podobno kot smo prej zapisali diferencial funkcije ene spremenljivke  $df(x) = f'(x)dx$  lahko zdaj vpeljemo totalni diferencial funkcije dveh (ali več) spremenljivk:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy. \quad (3.26)$$

Lep zgled za rabo totalnega diferenciala je enačba stanja v termodinamiki, ki povezuje tri termodinamične spremenljivke, npr.  $p, V$  in  $T$ . Najbolj znana je enačba stanja idealnega plina

$$\frac{pV}{T} = \frac{mR}{M}, \quad (3.27)$$

obstajajo pa tudi številne druge. Pomembnejša od konkretnega izraza je enačba stanja kot koncept, ki omogoča, da izbrano termodinamično spremenljivko izrazimo s preostalima dvema, npr.  $V = V(T, p)$ . Totalni diferencial prostornine je enak

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp. \quad (3.28)$$

Še prikladneje je to enačbo deliti z  $V$ , da imamo na levi relativno spremembo prostornine, ki ni odvisna od množine snovi:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp \\ &= \beta dT - \chi_T dp. \end{aligned} \quad (3.29)$$

V drugi vrstici smo z oba parcialna odvoda nadomestili s temperaturnim koeficientom prostorninskega raztezka  $\beta$  oziroma izotermno stisljivostjo  $\chi_T$ ; pri idealnem plinu ta znašata  $1/T$  oziroma  $1/p$ . Iz te diferencialne oblike enačbe stanja razberemo, kolikšno relativno spremembo prostornine povzročita majhni spremembi temperature in tlaka. Še več: omogoča tudi, da ugotovimo, za koliko se spremeni tlak snovi, če pri konstantni prostornini spremenimo temperaturo. Tedaj je  $dV = 0$ , tako da velja

$$\beta dT - \chi_T dp = 0 \quad (3.30)$$

ter

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\chi_T}. \quad (3.31)$$

Spomnimo se, kako sta definirana  $\beta$  in  $\chi_T$ , pa uvidimo, da je

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{(\partial V/\partial T)_p}{(\partial V/\partial p)_T} \quad (3.32)$$

ali v mnemonično morda prikladnejši obliki

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -1. \quad (3.33)$$

(Seveda to velja za katere koli 3 spremenljivke, od katerih je ena odvisna od drugih dveh, ne le za enačbo stanja v termodinamiki.) Enačba (3.32) je primer implicitnega odvoda. Ta prijem je nadvse uporaben. Tudi notranja energija  $U$ , entalpija  $H$  in entropija  $S$  ter sploh vsi termodinamični potenciali so odvisni od para termodinamičnih spremenljivk. Če za ta par izberemo  $T$  in  $p$  kot v enačbi (3.28), lahko npr. totalni diferencial entalpije zapišemo kot

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp, \quad (3.34)$$

odkoder bomo nekoč izluščili t.i. Joule-Kelvinov koeficient, ki pove, kako se pri prehajanju iz komore z višjim tlakom v drugo z nižjim spremeni temperatura plina. Enačbo adiabate, vzdolž katere je entropija konstantna, pa bi dobili tako, da bi totalni  $dS$  izrazili z odvodi po izbranem paru spremenljivk, ga postavili na 0 in tako povezali ti spremenljivki.

### Ohranitveni zakoni

Izvrsten primer za rabo večine gornjih pojmov so ohranitveni zakoni, ki povedo, da se kaka količina s časom ne spreminja in je zato t.i. konstanta gibanja. Pri katerem koli gibanju brez trenja je konstanta gibanja skupna energija. Pri premem gibanju v vodoravni smeri, kjer na telo razen sile teže in sile podlage ne deluje nobena druga sila, pa se poleg energije ne spreminja niti hitrost oziroma gibalna količina — tudi ti dve sta konstanti gibanja.

Konstanto gibanja ponavadi najdemo tako, da upoštevamo kako simetrijo izbranega problema. Tu bomo postopali v obratni smeri. Obravnajmo ravninsko gibanje točkastega telesa, ki ga na koordinatno izhodišče veže centralna sila, torej taka sila, ki kaže v smeri krajevnega vektorja. V ravnini  $xy$  opiše tir telesa krivulja  $y(x)$  in v dani točki je oddaljenost telesa od izhodišča

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.35)$$

polarni kot pa

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}, \quad (3.36)$$

kar razberemo s sl. 3.4. Ko se telo premakne vzdolž tira za  $dx$  v smeri osi  $x$

Slika 3.4: Ravninsko gibanje v polju centralne sile. [Menzel str. 30.](#)

in za  $dy$  v smeri osi  $y$ , se  $\phi$  spremeni za

$$d\phi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}. \quad (3.37)$$

(Tudi to je totalni diferencial.) Uporabili smo pravilo za odvajanje funkcije  $\arctan x$ , ki je  $1/(1+x^2)$ , ter posredno odvajali najprej po  $y$  in nato še po  $x$ . Na sl. 3.4 vidimo, da je ploščina trikotnika, ki ga je ob premiku pričaral krajevni vektor, enaka

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\phi = \frac{1}{2}(xdy - ydx). \quad (3.38)$$

Premik se je zgodil v času  $dt$  in če  $2dA/dt$  pomnožimo z maso delca  $m$ , dobimo ravno produkt vztrajnostnega momenta točkastega delca  $mr^2$  in kotne hitrosti  $\omega = d\phi/dt$ , torej vrtilno količino:

$$L = mr^2\omega = m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \quad (3.39)$$

Zdaj si oglejmo časovni odvod  $L$ :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \quad (3.40)$$

Vsakega od členov odvajamo kot produkt:

$$\frac{dL}{dt} = m \left( \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + x \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = m \left( x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right). \quad (3.41)$$

Oba druga odvoda predstavljata komponenti pospeška telesa vzdolž smeri  $x$  in  $y$ , ki ju lahko izrazimo s komponentama sile:  $F_x = md^2x/dt^2$  in  $F_y = md^2y/dt^2$ . Sledi

$$\frac{dL}{dt} = xF_y - yF_x = M_z; \quad (3.42)$$

v izrazu na desni smo prepoznali komponento navora vzdolž osi  $z$ . Zdaj smo prišli do ključnega spoznanja: ker je centralna sila  $\mathbf{F}$  vzporedna s krajevnim vektorjem  $r$  ali

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{x}{y}, \quad (3.43)$$

je

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad (3.44)$$

ne glede na to, kako se sila spreminja z razdaljo. Spoznali smo, da je pri gibanju v polju centralne sile vrtilna količina  $L$  vselej konstanta gibanja. V gornjem računu smo ugotovili še, da je  $L$  sorazmerna z  $dA/dt$  in da je tak vzdolž tira tako ohranja tudi ploščina trikotnika, ki ga pobriše krajevni vektor. To poznamo kot 2. Keplerjev zakon.

### 3.3 Nabla in gradient

Skalarno funkcijo prostorskih koordinat  $f(x, y, z)$ , kakršen je npr. gravitacijski potencial, lahko odvajamo po vseh treh koordinatah in iz odvodov sestavimo vektor, ki mu pravimo gradient:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f. \quad (3.45)$$

Tu smo vpeljali vektorski operator nabla

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.46)$$

Uporabimo ta operator za izračun gradienta funkcije  $f(r)$ , ki je odvisna le od oddaljenosti od izhodišča  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; taka funkcija je recimo gravitacijska potencialna energija. Najbolje bo, da se držimo definicije (3.46)

$$\nabla f(r) = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.47)$$

in vsakega od odvodov izračunamo posredno:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = f' \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f' \frac{x}{r} \quad (3.48)$$

in podobno za  $\partial f/\partial y$  in  $\partial f/\partial z$ . (Pri odvodu  $f$  po edini spremenljivki, od katere je odvisna, uporabljamo  $d$ , pri parcialnih odvodih  $r$  po  $x, y$  in  $z$  pa  $\partial$ .) Uvidimo, da je

$$\nabla f(r) = f' \cdot \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = f' \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.49)$$

Gradient funkcije, odvisne le od oddaljenosti od izhodišča, kaže torej v radialni smeri.

S tem zgledom smo že nekaj izvedeli o tem, kaj je gradient. Še natančnejšo sliko dobimo, če z gradientom izrazimo totalni diferencial skalarne funkcije  $\varphi(\mathbf{r})$ . Vektor premika v prostoru je  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz = (dx, dy, dz)$ , tako da je skalarni produkt  $\nabla f$  in  $d\mathbf{r}$  enak

$$\nabla f \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df. \quad (3.50)$$

Kaj ta rezultat pove, najlažje ugotovimo, če si izberemo taki točki v prostoru, da je v obeh vrednost  $f$  enaka. Razdalja med njima naj bo  $d\mathbf{r}$ . Tedaj mora biti

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (3.51)$$

tako da sta  $\nabla f$  in izbrani  $d\mathbf{r}$  pravokotna. Vidimo, da kaže  $\nabla f$  pravokotno na ploskev, na kateri je  $f = konst$ . Iz skalarnega produkta  $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$  nadalje razberemo, da je pri vektorju  $d\mathbf{r}$  z izbrano dolžino  $df$  največji, če kaže vzdolž  $\nabla f$ , tako je  $\nabla f$  zasukan v smeri, v kateri se  $f$  najhitreje spreminja.

Pomen gradienta si nemara najlažje predstavljamo na primeru gravitacijskega polja na hribovitem terenu. Skalarne funkcije  $f$  je tu seveda potencialna energija. Če se po pobočju gibljemo tako, da ostajamo na konstantni višini, torej vzdolž izohipse, je  $d\mathbf{r}$  pri vsakem koraku pravokoten na smer, v kateri bi se v dolino odvalil kamen. Najtežje se je vzpenjati prav v smeri, saj se pri tem pri vsakem koraku naša gravitacijska potencialna energija poveča za največ, za kolikor se pri enem koraku lahko. Vzpenjanje v serpentinah pa je manj naporno.

Pri gravitacijskem potencialu predstavlja totalni diferencial  $dE_{pot} = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$  spremembo gravitacijske potencialne energije. Ta je enaka delu sile, ki je povzročila premik, ta pa je nasprotno enaka sili teže. Tako sklepamo, da je

$$\mathbf{F}_g = -\nabla E_{pot} \quad (3.52)$$

prav sila teže, kar smo omenili v zgledu v razdelku 3.1; zapomnimo si negativni predznak. Podobno je sila električnega polja nasprotno enaka gradient elektrostatičnega potenciala. V tem primeru pravimo izohipsi ekvipotencialna ploskev. Poseben primer sfero simetrične funkcije  $f$  z začetka tega razdelka je recimo električni potencial točkastega naboja; tu so ekvipotencialne ploskve koncentrične sfere.

Ni težko videti, kaj je gradient produkta dveh funkcij  $f$  in  $g$ . Izračunajmo najprej komponento v smeri osi  $x$ :  $\partial(fg)/\partial x = f(\partial g/\partial x) + g(\partial f/\partial x)$ . Prvi

člen vsebuje komponento vektorja  $\nabla g$  v smeri osi  $x$  in komponento vektorja  $\nabla f$  v smeri osi  $x$ , tako da sklepamo, da mora biti

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f; \quad (3.53)$$

podobno kot pri običajnem odvodu produkta.

### 3.4 Divergenca

Odvajamo seveda lahko tudi vektorske funkcije več spremenljivk, ne le skalarnih. Odvod vektorske funkcije ene spremenljivke poznamo že dolgo: hitrost točkastega telesa je npr. odvod lege po času

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3.54)$$

in pospešek je odvod hitrosti po času

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (3.55)$$

Zdaj namesto enega točkastega telesa obravnavajmo gibanje tekočine kot kontinuuma. Zamislimo si stacionarni tok, torej takega, pri katerem se hitrost v vsaki točki s časom ne spreminja, se pa spreminja od točke do točke kot npr. pri izlivu potoka v reko. Prva operacija odvajanja, ki jo lahko uvedemo nad vektorskim poljem, je divergenca, definirana kot skalarni produkt vektorja  $\nabla$  in danega polja  $\mathbf{u}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u_x, u_y, u_z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (3.56)$$

Divergenca vektorja je skalarna količina in funkcija koordinat, kakor je tudi vektorsko polje, katerega divergenco računamo. Kar takoj izpostavimo, da je divergenca konstantnega vektorskega polja enaka 0.

Nekaj občutka za pomen divergence dobimo, če si pogledamo, kako je pri radialnem polju, torej takem z  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r = f(r)(x, y, z)/r = f(r)(x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Najprej izračunajmo  $\partial u_x / \partial x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f \frac{x}{r} &= \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + f \frac{1}{r} - f \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{df}{dr} \frac{x^2}{r^2} + f \frac{1}{r} - f \frac{x^2}{r^3} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Upoštevali smo, da je  $\partial r / \partial x = x / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x/r$ . Ker v oddaljenosti od izhodišča  $r$  vse tri koordinate nastopajo enakovredno, sklepamo, da je

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{e}_r] = \frac{df}{dr} + \frac{2f}{r}. \quad (3.58)$$

V posebnem primeru, ko je  $f(r) = r$ , tako da je  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x, y, z)$ , dobimo  $\nabla \cdot (x, y, z) = 3$ , kar lahko preverimo s kratkim računom.

Rezultat (3.58) vključuje naslednje posebne primere:

- če je  $f(r) = r$ , je  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 3/r$ , kar lahko preverimo s kratkim računom, saj je tedaj  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x, y, z)$ ;
- če je  $f(r) = 1$ , je  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 2/r$ ;
- če je  $f(r) = 1/r^2$ , je  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0$ ; in
- če je  $f(r) = -1$ , je  $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = -2/r$ .

V prvih treh primerih kaže  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  navzven, v zadnjem navznoter. Tretji primer bo pomemben npr. pri električnem polju točkastega naboja, kjer pozitivni in negativni naboj predstavljata izvor oziroma ponor polja. Poglejmo si pretok takega polja skozi lupino s polmeroma  $r_1$  in  $r_2 > r_1$ . Normala notranje sferične mejne ploskve kaže natanko v nasprotni smeri kot polje  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , normala zunanje v isti smeri kot  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Zato je pretok skozi notranjo ploskev  $\Phi_1 = \mathbf{u}(\mathbf{r}; r = r_1) \times (-4\pi r_1^2 \mathbf{e}_r) = -(1/r_1^2)4\pi r_1^2 = -4\pi$ . Pretok skozi zunanjo ploskev pa znaša  $\Phi_2 = \mathbf{u}(\mathbf{r}; r = r_2) \times (4\pi r_2^2 \mathbf{e}_r) = (1/r_2^2)4\pi r_2^2 = 4\pi$ , tako da je skupni pretok skozi lupino enak 0. Zato je povsod v prostoru enaka 0 tudi divergenca. — Vektorskemu polju, katerega divergenca je povsod enaka 0, pravimo *solenoidalno*.

V primeru  $f(r) = 1$  pa za pretok skozi prvo in drugo ploskev dobimo  $-4\pi r_1^2$  oziroma  $4\pi r_2^2$ . Skupni pretok je tedaj  $4\pi(r_2^2 - r_1^2)$  in če se  $r_1$  in  $r_2$  razlikujeta le za majhen  $dr$ , lahko to zapišemo kot  $\approx 4\pi \times 2r dr = 2/r \times 4\pi r^2 dr$ , v čemer prepoznamo produkt vrednosti divergence polja in prostornine lupine, skozi katero smo izračunali pretok. Ta rezultat je poseben primer izreka Gauss-Ostrogradskega

$$\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (3.59)$$

Integral na levi gre po sklenjeni ploskvi, ki ograjuje dano območje, integral na desni po prostornini slednjega;  $d\mathbf{A}$  in  $dV$  sta diferenciala površine oziroma prostornine.

### Izrek o ohranitvi mase

Eden najpreprostejših in hkrati najvažnejših zgledeov za divergenco opisuje prav tekočine. Oglejmo si t.i. majhno kontrolno prostornino v obliki kvadra, katerega stranice so zasukane vzdolž osi  $x$ ,  $y$  in  $z$  in merijo  $dx$ ,  $dy$  oziroma  $dz$ ; koordinatno izhodišče postavimo v oglišče z najmanjšimi  $x$ ,  $y$ , in  $z$  (sl. 3.5). K masnemu toku skozi stranice kontrolne prostornine prispeva 6 členov, od katerih vsak ustreza eni od mejnih ploskev. Vsak člen je enak skalarnemu produktu (i) vektorja površine  $d\mathbf{A}$ , katerega velikost je enak ploščini ploskvice, smer pa kaže pravokotno nanjo in ven iz kontrolne prostornine, ter (ii) vektorja gostote toka  $\mathbf{j}$ , ki pove, kolikšna masa tekočine steče v časovni enoti skozi enoto površine. Gostota toka je enaka  $\rho\mathbf{v}$ , kjer sta  $\rho$  in  $\mathbf{v}$  gostota oziroma hitrost tekočine na danem mestu.

Slika 3.5: K izpeljavi izreka o ohranitvi mase pri toku tekočine. **AW sl. 1.19.**

K toku skozi stranici, pravokotni na os  $x$ , prispevata dva člena: tisti skozi ploskvico pri  $x = 0$  in tisti skozi ploskvico pri  $x = dx$ . Masni tok skozi prvo je  $-j_x(x = 0)dydz$ , saj je ploskvica usmerjena vzdolž  $-\mathbf{e}_x$ , masni tok skozi drugo pa  $j_x(x = dx)dydz$ . Neto prispevek obeh členov je

$$[j_x(x = dx) - j_x(x = 0)] dydz = \frac{j_x(x = dx) - j_x(x = 0)}{dx} dx dy dz. \quad (3.60)$$

Če je  $dx$  zelo majhen, je prvi faktor enak  $\partial j_x / \partial x$ . Enako obravnavamo še tok skozi preostala para ploskvic in uvidimo, da lahko celoten masni tok skozi kontrolno prostornino zapišemo kot

$$\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (3.61)$$

Tu smo z  $dV$  označili  $dx dy dz$ . Na račun masnega toka se mora spremeniti masa tekočine znotraj kontrolne prostornine, ki znaša  $\rho dV$ , tako da velja

$$\frac{d(\rho dV)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (3.62)$$



Ker to velja za poljubno izbrano kontrolno prostornino, lahko enačbo delimo z  $dV$  in dobimo kontinuitetno enačbo

$$\frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (3.63)$$

ki jo z upoštevanjem  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$  prepisemo v končno obliko:

$$\frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \rho\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho. \quad (3.64)$$

Zadnji korak zahteva kanec pozornosti. Oglejmo so komponento  $\rho\mathbf{v}$  v smeri osi  $x$  in izračunajmo odvod po  $x$ , ki znaša  $\rho(\partial v_x/\partial x) + v_x(\partial\rho/\partial x)$ . Podobno napravimo za komponenti  $\rho\mathbf{v}$  v smeri osi  $y$  in  $z$ , pa vidimo, da da vseh šest členov ravno desno stran enačbe (3.64). — Spotoma smo torej ugotovili, da je

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad (3.65)$$

kjer sta  $f$  in  $\mathbf{u}$  poljubna skalarna oziroma vektorska funkcija.

Poglejmo si še divergenco vektorskega produkta  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ . Podobno kot pri običajnem odvodu produkta skalarnih funkcij tu nabla deluje enkrat na  $\mathbf{u}$ , drugič na  $\mathbf{v}$ . Spomnimo se enačbe (2.45) in uvidimo, da lahko s ciklično permutacijo faktorjev ta izraz preoblikujemo v  $\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ , s čimer smo dobili prvi del rezultata; z anticiklično permutacijo pa v  $-\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$ , s čimer smo dobili drugega. Skupaj imamo torej

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (3.66)$$

### 3.5 Rotor

Kakor lahko dva vektorja zmnožimo tudi vektorsko in ne le skalarno, lahko izračunamo tudi vektorski in ne le skalarni produkt nable in vektorskega polja  $\mathbf{u}$ . Pri tem uporabimo pravilo (2.37), ki da

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.67)$$

Gornji izraz je rotor polja  $\mathbf{u}$ .

Zopet skušajmo s preprostimi zgledi razviti občutek za to, kaj je rotor vektorskega polja. Najprej poiščimo rotor radialnega polja, ki ga lahko zapišemo bodisi kot  $g(r)\mathbf{e}_r = g(r)\mathbf{r}/r$  bodisi kot  $f(r)\mathbf{r}$ , kjer je  $f(r) = g(r)/r$

— druga možnost je prikladnejša. Izračuna  $\nabla \times f(r)\mathbf{r}$  se lotimo po komponentah:

$$\begin{aligned} [\nabla \times f(r)\mathbf{r}]_x &= \frac{\partial(fz)}{\partial y} - \frac{\partial(fy)}{\partial z} \\ &= f \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Prvi člen na desni je enak 0, pri izračunu drugega in tretjega pa upoštevamo, da je  $\partial f/\partial y = df/dr \times \partial r/\partial y$ , kjer je  $\partial r/\partial y = y/r$ . Tako uvidimo, da sta drugi in tretji člen nasprotno enaka, tako da je naposled  $\nabla \times f(r)\mathbf{r} = 0$ .

Poglejmo si zdaj vektorsko polje s cilindrično simetrijo, torej tako, ki se vzdolž osi  $z$  ne spreminja, ima v ravnini  $xy$  azimutalno smer in je odvisno le od oddaljenosti od osi  $x$ , torej od  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Za tako polje velja

$$\mathbf{u}(r) = (-y, x, 0)f \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right). \quad (3.69)$$

Primer takega polja je magnetno polje ravnega vodnika s tokom. Podobno kot prej se lotimo komponente  $\nabla \times \mathbf{u}$  v smeri osi  $x$ , ki je enaka  $-\partial(fx)/\partial z = 0$ . Tudi komponenta v smeri osi  $y$   $\partial(-fy)/\partial z$  je 0, komponenta v smeri osi  $z$  pa je

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} f'. \quad (3.70)$$

Tako polje imam neničelni rotor.

Še natančnejšo sliko dobimo, če izračunamo cirkulacijo vektorskega polja okoli pravokotne zanke, katere segmenti so usmerjeni vzdolž osi koordinatnega sistema in merijo  $dx$  in  $dy$ ; levo spodnje oglišče naj bo v izhodišču (sl. 3.6). K cirkulaciji prispeva vsaka od stranic zanke posebej in sicer pri

Slika 3.6: Ilustracija pomena rotorja vektorskega polja: cirkulacija  $\mathbf{u}$  vzdolž pravokotne zanke. **AW sl. 1.20.**

vsaki le komponenta  $\mathbf{u}$  vzdolž stranice, torej  $u_x$  na spodnji in na zgornji stranici ter  $u_y$  na levi in na desni. A posamezni prispevek ni odvisen le od

velikosti  $\mathbf{u}$  na danem mestu, temveč tudi od smeri stranice, tako da ga lahko razumemo kot skalarni produkt  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ , kjer je  $d\mathbf{l}$  vektor vzdolž stranice. Za zanko v pozitivni smeri (t.j. v nasprotni smeri urnega kazalca) imamo

$$\begin{aligned} \Gamma &= u_x \left( \frac{dx}{2}, 0 \right) dx + u_y \left( dx, \frac{dy}{2} \right) dy \\ &\quad + u_x \left( \frac{dx}{2}, dy \right) (-dx) + u_y \left( 0, \frac{dy}{2} \right) (-dy). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Prispevke smo zapisali po vrsti. Zdaj seštejemo tista v smeri osi  $x$  in tista v smeri osi  $y$  ter upoštevamo, da je  $u_x(dx/2, dy) \approx u_x(dx/2, 0) + (\partial u_x/\partial y) dy$  in  $u_y(dx, dy/2) \approx u_y(0, dy/2) + (\partial u_y/\partial x) dx$ . Tako uvidimo, da je

$$\Gamma = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.72)$$

V  $dx dy$  prepoznamo ploščino, ki jo objema zanka, zato z limito  $dx dy \rightarrow 0$  rotorju vektorskega polja pripišemo cirkulacijo na površinsko enoto zanke. Vektorskemu polju, pri katerem je rotor v vsaki točki enak 0, pravimo *irrotacionalno*. Zgoraj smo že ugotovili, da vsa radialno usmerjena polja, npr. električno polje točkastega naboja, zagotovo irrotacionalna.

Poiščimo še rotor produkta skalarnega in vektorskega polja  $f$  oziroma  $\mathbf{u}$  in s tem posplošimo gornji račun rotorja radialnega polja. Kot na koncu razdelka o divergenci izračunajmo eno od komponent, recimo tisto vzdolž osi  $x$ :

$$\begin{aligned} [\nabla \times (f\mathbf{u})]_x &= \frac{\partial(fu_z)}{\partial y} - \frac{\partial(fu_y)}{\partial z} \\ &= f \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + u_z \frac{\partial f}{\partial y} - u_y \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

V prvem členu na desni prepoznamo komponento  $f\nabla \times \mathbf{u}$  v smeri osi  $x$ , v drugem in v tretjem pa komponento  $(\nabla f) \times \mathbf{u}$ . Torej velja

$$\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}. \quad (3.74)$$

S tem, kar smo se naučili o vektorjih in posebej o vektorskem produktu, lahko izračunamo tudi  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ , ki na prvi pogled nima dosti skupnega z rotorjem. Spomnimo se trojnega vektorskega produkta [enačba (2.50)] in v izrazu  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v})$  nablo obravnavajmo kot vektor, a ne pozabimo, da postane vektor šele, ko deluje kot gradient na kako skalarno količino ali kot rotor na kako vektorsko količino; da je torej vektorski operator. Tako velja

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \quad (3.75)$$

če le ne pozabimo, da tudi v prvem izrazu na desni nabra deluje le na  $\mathbf{v}$  — enako kot na levi in v drugem izrazu na desni, kjer je to očitno. Zato smo  $\mathbf{v}$  povsod začasno podčrtali. Zdaj na levi in na desni zamenjamo  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{u}}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\underline{\mathbf{u}}, \quad (3.76)$$

kjer nabra povsod zopet deluje le na  $\mathbf{u}$ . Ker je skalarni produkt komutativen, lahko prvi člen na desni zapišemo kot  $\nabla(\underline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v})$ . Seštejemo levi in desni strani ter upoštevamo, da je  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \underline{\mathbf{v}}) + \nabla(\underline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}) = \nabla(\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}})$ ; zdaj izpustimo počrtaj, ker ni več potreben. Preuredimo in dobimo

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (3.77)$$

Ta rezultat seveda lahko dobimo tudi z uporabo definicij gradienta in rotorja. Pokaže se, da je isti izraz enak tudi

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \times \nabla) \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \times \nabla) \times \mathbf{v}. \quad (3.78)$$

V enačbah (3.75)-(3.77) nastopajo izrazi vrste  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ , ki jih doslej še nismo srečali. Če želimo razumeti, kaj pomenijo, je najbolje izpisati operator v oklepaju:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla &= (u_x, u_y, u_z) \cdot (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \\ &= u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ta operator predstavlja uteženo vsoto odvodov v smereh  $x$ ,  $y$  in  $z$ , uteži pa so komponente vektorja  $\mathbf{u}$ . Vidimo, da je

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \left( u_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \right. \\ &\quad \left. u_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \right. \\ &\quad \left. u_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

## Poglavje 4

# Koordinatni sistemi

Doslej smo navedli že nekaj zgledov, kjer se je kak koordinatni sistem izkazal kot posebej primeren za opis dogajanja: pri obravnavi gibanja po klanecu (2. poglavje) je naravno os  $x$  zasukati vzdolž klanca in ne vodoravno ter pri zapisu radialnega in azimutalnega v 3. poglavju bi bilo namesto kartezičnega koordinatnega sistema prikladneje in naravneje uporabiti sferični oziroma cilindrični krivočrtni koordinatni sistem. Vsakdanje življenje na površju Zemlje je za večino namenov primerneje obravnavati v vrtečem se koordinatnem sistemu. Posvetimo zdaj tem vprašanjem nekaj več pozornosti.

### 4.1 Inercialni in neinercialni sistemi

Oglejmo si opis gibanja v dveh koordinatnih sistemih, od katerih prvi miruje, drugi pa se giblje premo glede na prvega (sl. 4.1). Prvega označimo s  $S$ , drugega s  $S'$ ; krajevni vektor točke v prvem naj bo  $\mathbf{r}$  in tisti v drugem  $\mathbf{r}'$ . Tedaj velja

Slika 4.1: Koordinatna sistema  $S$  in  $S'$ : drugi se giblje glede na prvega, ki je inercialen.

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t), \quad (4.1)$$

kjer je  $\mathbf{R}(t)$  krajevni vektor izhodišča sistema  $S'$  v sistemu  $S$ . Poudarili smo, da so vsi trije vektorji odvisni od časa.

Prva količina, ki nas pri taki transformaciji zanima, je hitrost  $\mathbf{v}'(t) = d\mathbf{r}'/dt$ , ki je enaka

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{V}(t). \quad (4.2)$$

S to preprosto transformacijo se srečamo, ko na letališču stopimo na tekočo klančino. Če hodimo po klančini v smeri gibanja slednje, je naša hitrost glede na letališče (torej  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}_k$ , kjer je  $\mathbf{V}_k$  hitrost klančine in s tem hitrost sistema  $S'$ ) večja od hitrosti klančine, a če hodimo v nasprotni smeri, lahko dosežemo, da je enaka 0. Podobno je pri tekočih stopnicah.

Zanima nas, kako povežemo zapisa enačbe gibanja v obeh koordinatnih sistemih. Za to moramo izračunati pospešek  $\mathbf{a}'$ , ki je seveda enak

$$\mathbf{a}'(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{A}(t), \quad (4.3)$$

kjer je  $\mathbf{a}'(t) = d^2\mathbf{r}'/dt^2$  ter podobno za  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{A}$ . Predpostavimo, da v sistemu  $S$  gibanje telesa opiše Newtonov zakon  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . To pomeni, da je

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{A}). \quad (4.4)$$

Pomen izraza na desni uvidimo, če si zamislimo telo v dvigalu, ki prosto pada. Edina sila na telo je tedaj sila teže  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ . A ker ne pada le telo, temveč tudi dvigalo, je tudi  $\mathbf{A} = \mathbf{g}$  in produkt  $m\mathbf{a}'$ , ki predstavlja silo na telo v sistemu  $S'$ , je tako enak 0. To se zgodi npr. pri letu v t.i. "zero-g" letalu. Izrazu  $-m\mathbf{A}$  pravimo *sistemska sila*  $\mathbf{F}_s$  in seveda ne predstavlja prave sile, marveč le koncept, ki ga vpeljemo zato, da enačbo gibanja tudi v gibajočem se koordinatnem sistemu zapišemo v enaki obliki kot v mirujočem. To je prikladno iz praktičnih razlogov. V gornjem primeru bi npr. imeli

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s = m\mathbf{g} - m\mathbf{g} = 0. \quad (4.5)$$

(Tu tudi vidimo, da je izraz "zero-g" varljiv. Na telo v takem letalu seveda deluje sila teže, a če opazujemo, kako se giblje glede na letalo, se zdi, da teže ni, ker je pač nasprotno enaka sistemski sili.)

Še preprostejši primer je gibanje v premo enakomerno gibajočem se sistemu, npr. na vlaku. Tu je sistemska sila enaka 0 in se enačbi gibanja v sistemih  $S$  in  $S'$  v ničemer ne razlikujeta.

Precej drugače je, če se sistem  $S'$  vrti glede na referenčni mirujoči sistem  $S$ . Tu moramo pri izračunu hitrosti in pospeška upoštevati, da se s časom

ne spreminjajo le koordinate telesa v sistemu  $S'$ , temveč tudi orientacija koordinatnih osi tega sistema. Ta primer je zelo pomemben v praksi, ker živimo na površju Zemlje, ki se vrti. Za vsakdanjo rabo je to enostavneje upoštevati tako, da uvedemo primerno sistemsko silo — in gibanje opišemo z II. Newtonovim zakonom, ki sicer velja le v inercialnih opazovalnih sistemih.

V vrtečem se sistemu zapišemo neko vektorsko količino enako kot v mirujočem

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z, \quad (4.6)$$

le da so zdaj od časa odvisne tako komponente vektorja  $A_x, A_y$  in  $A_z$  kakor tudi bazni vektorji  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  in  $\mathbf{e}_z$ . Odvod tega vektorja po času je tako enak

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{e}_z + A_x \frac{d\mathbf{e}_x}{dt} + A_y \frac{d\mathbf{e}_y}{dt} + A_z \frac{d\mathbf{e}_z}{dt}. \quad (4.7)$$

Da bomo ločili med časovnim odvodom komponent vektorja  $\mathbf{A}$  in celotnim odvodom, prvega označimo z  $\delta\mathbf{A}/\delta t$ . Odvod baznih vektorjev mora biti pravokoten nanje, ker so enotski in ker sem jim ob vrtenju koordinatnega sistema dolžina ne spreminja. To pomeni, da mora biti

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x \quad (4.8)$$

in podobno za  $\mathbf{e}_y$  in  $\mathbf{e}_z$ ; tu je  $\boldsymbol{\omega}$  vektor, katerega smer sovпада z osjo vrtenja, velikost pa s kotno hitrostjo. (Do istega sklepa pridemo tudi geometrijsko, kot kaže sl. 4.2). Tako uvidimo, da je

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \quad (4.9)$$

Slika 4.2: Vrtenje baznih vektorjev koordinatnega sistema.

Za nas je seveda zanimiv drugi odvod krajevnega vektorja  $\mathbf{r}'$  v vrtečem

se sistemu  $S'$ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) \\ &= \frac{\delta^2\mathbf{r}'}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \mathbf{r}'.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Velja  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ , kjer sta  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{R}$  krajevna vektorja točke in koordinatnega izhodišča vrtečega se sistema v inercialnem sistemu  $S$ ;  $\mathbf{R}$  je pri obravnavi golega vrtenja sicer enak 0, a smo ga dodali, da v isti sapi zajamemo vrtenje in translacijsko gibanje koordinatnega sistema. Zato je

$$\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\quad (4.11)$$

in za prvi člen na desni velja II. Newtonov zakon  $m d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{F}$ . V sistemu  $S'$  je potem gibalna enačba oblike

$$m \frac{\delta^2\mathbf{r}'}{\delta t^2} = \mathbf{F} - m \left[ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t} + \frac{\delta\boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \mathbf{r}' + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right].\quad (4.12)$$

Členi v oklepaju na desni po vrsti predstavljajo centrifugalno, Coriolisovo, azimutalno (imenovano tudi Eulerjeva) in translacijsko silo; znova poudarimo, da so to sistemske in ne fizične sile. Poglejmo si jih malce podrobneje:

- **Centrifugalna sila**

$$\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\quad (4.13)$$

je pravokotna na os vrtenja, saj jo dobimo z vektorskim produktom z  $\boldsymbol{\omega}$ , tako da je  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{F}_{\text{centr}} = 0$ . S konstrukcijo (sl. 4.3) uvidimo, da kaže vektor  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  v azimutalni smeri in je zato vektor  $-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$  pravokoten na os vrtenja in usmerjen navzven, kar je v skladu z vsakdanjim pojmovanjem centrifugalne sile. Centrifugalna sila je prisotna, čeprav telo v sistemu  $S'$  miruje.

- **Coriolisova sila**

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{r}'}{\delta t} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'\quad (4.14)$$

se pojavi le, če se telo v sistemu  $S'$  giblje, in je pravokotna tako na  $\boldsymbol{\omega}$  kot na  $\mathbf{v}'$ .



Slika 4.3: Smer centrifugalne sile.

- **Azimutalna (Eulerjeva) sila**

$$\mathbf{F}_{azi} = -m \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \mathbf{r}' \quad (4.15)$$

nastopi le, če se  $\boldsymbol{\omega}$  spreminja s časom.

- **Translacijska sila**

$$\mathbf{F}_{trans} = -m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \quad (4.16)$$

je poleg centrifugalne nemara najbolj domača in smo jo srečali že na začetku poglavja.

### Gibanje na površju Zemlje

Tu težišči sistemov  $S$  in  $S'$  sovpadata in je  $\mathbf{R} = 0$ ; obenem je tudi kotna hitrost vrtenja Zemlje konstantna in je zato azimutalna sila enaka 0. Gibalna enačba se torej glasi

$$m \frac{\delta^2 \mathbf{r}'}{\delta t^2} = \mathbf{F} - m [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'] . \quad (4.17)$$

Velikost centrifugalnega člena ocenimo tako, da vzamemo, da je  $\mathbf{r}'$  kar približno enak krajevnemu vektorju na površju Zemlje  $\mathbf{R}_z$ , saj se telesa navadno le malo oddaljijo od površja. Skupno silo na telo razdelimo na zunanjo silo  $\mathbf{F}'$  in na silo teže, ki kaže proti središču Zemlje. Za mirujoče telo tedaj velja

$$\mathbf{F}' = -m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{cent} = -m \underbrace{[\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_z)]}_{\mathbf{g}_{ef}} . \quad (4.18)$$

V izrazu v oklepaju prepoznamo efektivni težni pospešek  $\mathbf{g}_{ef}$ , ki zaradi centrifugalnega člena ni usmerjen več natanko proti središču Zemlje. Velikost centrifugalnega člena je enaka  $\omega^2 R_z \sin \theta$ , kjer je  $\theta$  polarni kot točke na

površju Zemlje; ker je  $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  in  $R_z = 6400 \text{ km}$ , je relativna velikost centrifugalnega člena glede na težni pospešek enaka  $\omega^2 R_z / g = 0.00345$ . Za toliko je efektivni težni pospešek, kakršnega izmerimo npr. z matematičnim nihalom, na polih večji kot na ekvatorju.

Coriolisovo silo obravnavamo tako, da lokalni koordinatni sistem usmerimo tako, da kaže os  $\mathbf{e}'_z$  v nasprotni smeri efektivnega težnega pospeška (za opazovalca na površju Zemlje torej "navzgor"), os  $\mathbf{e}'_y$  pa pravokotno na  $\mathbf{e}'_z$  proti polu. Tedaj je

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin \theta \mathbf{e}'_y + \omega \cos \theta \mathbf{e}'_z, \quad (4.19)$$

kar da ob  $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$

$$\mathbf{F}_{\text{Cor}} = 2m\omega (v'_y \cos \theta - v'_z \sin \theta, -v'_x \cos \theta, v'_x \sin \theta). \quad (4.20)$$

Na severni polobli je  $\theta$  med 0 in  $\pi/2$  in s tem lahko raziščemo smer Coriolisove sile glede na smer gibanja telesa (tabela 4.1). Če smer gibanja nima vertikalne komponente ( $v'_z = 0$ ), Coriolisova sila na severni polobli trajektorijo vselej zasuje v desno (sl. 4.4). Na južni polobli je vzorec obrnjen.

smeri hitrosti	smer Coriolisove sile in odklona
sever ( $v'_y > 0$ )	vzhod
jug ( $v'_y < 0$ )	zahod
vzhod ( $v'_x > 0$ )	jug in gor
zahod ( $v'_x < 0$ )	sever in dol
gor ( $v'_z > 0$ )	zahod
dol ( $v'_z < 0$ )	vzhod

Slika 4.4: Smer Coriolisove sile na severni polobli.

Coriolisova sila vpliva na gibanje zračnih mas in je pomembna pri pasatih. To so vetrovi, ki nastanejo, ko se topel zrak ob ekvatorju dviga, hladnejši zrak iz večjih oziroma manjših zemljepisnih širin pa ga izpodriva in se tako

na severni polobli giblje na jug, na južni pa na sever. Coriolisova sila ta zrak na severni in na južni polobli suče v desno oziroma na levo, torej v obeh primerih na zahod. To ustvari tipičen vzorec vetra (sl. 4.5). Coriolisova sila tiči tudi za smerjo kroženja zraka v ciklonih. Tu se zrak v radialni smeri navznoter giblje proti območju, kjer je tlak nižji, a zaradi Coriolisove sile, ki ga na severni polobli odklanja v desno, zaokroži okoli središča ciklona v nasprotni smeri urinega kazalca. Na južni polobli je obratno.

Slika 4.5: Pasatni vetrovi.

Še ena znana manifestacija Coriolisove sile je gibanje Foucaultovega nihala. To je dolgo nihalo z majhnim dušenjem, ki dolgo niha z nezmanjšano amplitudo. Pri vsakem nihaju ga Coriolisova sila malce zasuka v desno, tako da opazovalec vidi, da se ravnina nihanja vrti okoli navpične osi. En obhod napravi v času  $1 \text{ dan} / \cos \theta$  — na polih torej točno v enem dnevu, na ekvatorju pa pojava ni.

### Poševni met

Obravnavajmo popravek pristanka telesa pri poševnem metu zaradi Coriolisove sile. Če slednje ne bi bilo, bi se enačba gibanja glasila

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g}, \quad (4.21)$$

tako da bi bila hitrost in lega telesa enaki

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}t + \mathbf{v} \quad (4.22)$$

oziroma

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}t, \quad (4.23)$$

kjer je  $\mathbf{v}$  začetna hitrost telesa. Če telo vržemo s površja Zemlje in če pade na tla na enaki nadmorski višini (tako je recimo pri streljanju z ladje na cilj

na morski gladini), je nadalje  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{g} = 0$ , saj kaže pot  $\mathbf{s} = \mathbf{r}(t_0)$  pravokotno na težni pospešek;  $t_0$  je čas leta. Tedaj je

$$\frac{1}{2}gt_0^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}t_0 = 0 \quad (4.24)$$

in čas leta znaša

$$t_0 = -\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}}{g^2}. \quad (4.25)$$

To je znani rezultat. Preverimo: pri navpičnem metu s hitrostjo  $v$  kaže  $\mathbf{v}$  v nasprotni smeri kot  $\mathbf{g}$ , med metom pa se velikost hitrosti najprej zmanjša na 0 (let navzgor) v času  $v/g$  ter nato zopet poveča na  $v$  (let navzdol), tako da znaša v celoti  $2v/g$ . To se ujema z gornjo enačbo.

Tu nismo ločevali med sistemoma  $S$  in  $S'$ ; zdaj pa upoštevajmo Coriolisovo silo. Ker je popravek majhen, lahko v gibalni enačbi (4.17), v kateri smo centrifugalni člen že absorbirali v efektivnem težnem pospešku, pri oceni hitrosti Coriolisov člen zanemarimo in je približno

$$m \frac{\delta^2 \mathbf{r}'}{\delta t^2} \approx m\mathbf{g}, \quad (4.26)$$

tako da je hitrost telesa v ničtem redu enaka

$$\mathbf{v}'_0(t) = \frac{\delta \mathbf{r}'}{\delta t} \approx \mathbf{g}t + \mathbf{v}. \quad (4.27)$$

To vstavimo v Coriolisov člen v enačbi (4.17):

$$\frac{\delta^2 \mathbf{r}'}{\delta t^2} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{g}t + \mathbf{v}) \quad (4.28)$$

in integriramo po času, da dobimo hitrost in lego telesa v prvem redu

$$\mathbf{v}'_1(t) = \mathbf{g}t + \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}t^2 - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}t \quad (4.29)$$

oziroma

$$\mathbf{r}'_1(t) = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}t - \frac{1}{3}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}t^3 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}t^2. \quad (4.30)$$

Vidimo, da se tir telesa razlikuje od tistega, ki bi ga dobili brez Coriolisove sile (4.23). To pomeni, da izstrelak ne pade na površje na mestu  $\mathbf{s}$ , temveč nekaj stran, npr. na mestu  $\mathbf{r}'_1(t_1) = \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}$ . Še vedno pa velja, da pristane na površju, tako da je  $(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) \cdot \mathbf{g} = 0$  in je torej

$$\frac{1}{2}gt_1^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}t_1 - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}t_1^2 = 0. \quad (4.31)$$

Čas leta  $t$  je tako enak

$$t_1 = -\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}}{g^2 - 2\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}} \approx t_0 \left( 1 + \frac{2\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}{g^2} \right). \quad (4.32)$$

Drugi člen v oklepaju predstavlja relativni popravek časa leta zaradi Coriolisove sile.

Poiščimo še  $\Delta \mathbf{s}$  v najnižjem redu v  $\omega$ ! V enačbi (4.33) v prvem in v drugem členu vstavimo  $t_1$  iz enačbe (4.32), v tretjem in četrtem, ki sta linearna v  $\boldsymbol{\omega}$ , pa lahko  $t_1$  ocenimo kar s  $t_0$ . Dobimo

$$\mathbf{s} + \Delta \mathbf{s} \approx \frac{1}{2} \mathbf{g} t_0^2 \left( 1 + \frac{4\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}{g^2} \right) + \mathbf{v} t_0 \left( 1 + \frac{2\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}{g^2} \right) - \frac{1}{3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} t_0^3 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} t_0^2. \quad (4.33)$$

Upoštevamo, da je  $\mathbf{s} = \mathbf{g} t_0^2 / 2 + \mathbf{v} t_0$  in da je  $t_0 = -2\mathbf{v} \cdot \mathbf{g} / g^2$ , in dobimo

$$\Delta \mathbf{s} \approx \frac{2t_0}{g^2} (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})(\mathbf{g} t_0 + \mathbf{v}) - \frac{1}{3} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} t_0^3 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} t_0^2. \quad (4.34)$$

Izkaže se, da je popravek pri topovskih izstrelkih lahko reda velikosti 10 m, torej primerljiv z velikostjo tipičnega cilja. Ocenimo ga s podatki za velik ladijski top:  $v = 800$  m/s in  $t_0 = 1$  min (kar ustreza dometu okoli 40 km);  $\omega$  pa je  $2\pi/1$  dan =  $7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Prvi člen je velikosti  $t_0^2 \omega v$  oziroma  $t_0 \omega v^2 / g$ , drugi  $\omega g t_0^3$  in tretji  $\omega v t_0^2$  oziroma po vrsti približno 209 m, 279 m, 157 m in 209 m. Tu seveda nismo upoštevali kotov med vektorji niti tega, da členi v enačbi (4.34) nimajo iste smeri ter da se hitrost granate med letom zmanjšuje.

## 4.2 Krivočrtni koordinatni sistemi

V številnih fizikalnih problemih ima skalarno ali vektorsko polje, ki nas zanima, kako simetrijo. V teh primerih je za opis polja udobneje namesto kartezičnega koordinatnega sistema izbrati tak sistem, ki odraža to simetrijo. Za opis elektrostatične sile med nabitima delcema je najlažje vzeti sferični koordinatni sistem in enega od delcev postaviti v izhodišče. Podobno je pri magnetnem polju ravnega vodnika s tokom, kjer je najprikladnejši cilindrični koordinatni sistem.

Cilindrični in sferični koordinatni sistem nista edina zanimiva ortogonalna krivočrtna sistema, sta pa poleg kartezičnega daleč najbolj v uporabi, zato si ju tu podrobneje oglejmo.

### Cilindrične koordinate

V cilindričnem koordinatnem sistemu kažeta bazna vektorja  $\mathbf{e}_r$  in  $\mathbf{e}_\phi$  v radialni oziroma v azimutalni smeri, bazni vektor  $\mathbf{e}_z$  pa vzdolž vzdolžne osi. Lego točke podamo z oddaljenostjo od osi  $z$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.35)$$

s kotom med krajevnim vektorjem in osjo  $x$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (4.36)$$

ter koordinato vzdolž osi

$$z = z. \quad (4.37)$$

Tako definirana  $\rho$  in  $z$  zavzameta vse vrednosti od  $-\infty$  do  $+\infty$ ,  $\phi$  pa je omejen na interval  $[0, 2\pi]$ . Ni težko uvideti, da dobimo kartezične koordinate iz cilindričnih  $z$  zvezami

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ker se bazna vektorja v radialni smeri  $\mathbf{e}_r$  in  $\mathbf{e}_\phi$  od točke do točke spreminjata, je  $\rho$  in  $\phi$  boljše imeti za parametra in ne za koordinati, saj se ne seštevata kot v kartezičnem koordinatnem sistemu. Najbolj enostaven protiprimer sta nasprotna vektorja, npr. tak  $z \rho, \phi = 0, z = 0$  ter drugi  $z \rho, \phi = \pi, z = 0$ . Če bi  $\rho$  in  $\phi$  kar sešteli, bi dobili vektor  $2\rho, \phi = \pi, z = 0$ , kar je narobe — vsota omenjenih vektorjev je seveda 0.

Preskusimo se v pretvarjanju baznih vektorjev. Narišemo skico v ravnini  $xy$ , pa uvidimo, da sta bazna vektorja  $\mathbf{e}_\rho$  in  $\mathbf{e}_\phi$  zasukana le okoli osi  $z$  glede na  $\mathbf{e}_x$  in  $\mathbf{e}_y$ . Torej velja

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi, \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Obratna transformacija je

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_\rho \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi, \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_\rho \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.40)$$

### Sferične koordinate

Tudi tu so bazni vektorji pravokotni drug na drugega:  $\mathbf{e}_r$  je usmerjen v radialni smeri,  $\mathbf{e}_\theta$  v polarni smeri od severnega proti južnemu tečaju,  $\mathbf{e}_\phi$  pa v azimutalni smeri. Lego točke podamo z oddaljenostjo od izhodišča

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (4.41)$$

polarnim kotom

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.42)$$

in azimutalnim kotom

$$\phi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (4.43)$$

Kartezične koordinate pa dobimo iz sferičnih z

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Tudi tu zapišimo, kako se bazni vektorji sferičnega sistema izražajo s kartezičnimi:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \theta, \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \sin \theta, \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Obratna transformacija se glasi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_r \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi, \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_r \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi, \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.46)$$

## 4.3 Odvod v krivočrtnih koordinatah

Izpeljimo zdaj izraze za gradient, divergenco in rotor v cilindričnih in sferičnih koordinatah. Pri tem se ne bomo oprli na splošno teorijo, s katero zajamemo vse krivočrtne ortogonalne sisteme v eni sapi, temveč se bomo lotili računa na manj formalen, a nemara nazornejši način.

### Gradient

Spomnimo se, kako smo prišli do gradienta v kartezičnih koordinatah: v enačbi (3.50) smo pogledali, za koliko se spremeni skalarno polje  $f$  pri premiku za  $d\mathbf{r}$ . V kartezičnih koordinatah je ta premik enak  $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ , tako da je  $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ . V tem lahko vidimo definicijo gradienta, iz katere bomo zdaj izpeljali izraz za gradient v cilindričnih in v sferičnih koordinatah.

V cilindričnih koordinatah je diferencial premika

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz, \quad (4.47)$$

tako da je

$$\nabla f = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} = \left( \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (4.48)$$

Če zdaj izračunamo skalarni produkt  $\nabla f \cdot d\mathbf{r}$ , izvemo, za koliko se spremeni  $f$  ob spremembi vseh treh koordinat:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad (4.49)$$

kar je v skladu z  $df$  v kartezičnih koordinatah, enakem  $df = (\partial f / \partial \rho) d\rho + (\partial f / \partial \phi) d\phi + (\partial f / \partial z) dz$ .

Zdaj lahko za vajo izrazimo odvode po kartezičnih koordinatah z odvodi po cilindričnih koordinatah. V izraz (4.48) vstavimo bazne vektorje cilindričnega sistema, izražene s  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  in  $\mathbf{e}_z$  (4.40). Dobimo

$$\begin{aligned} \nabla f &= (\mathbf{e}_x \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \phi) \frac{\partial f}{\partial \rho} + (-\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y) \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \mathbf{e}_x \left( \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \mathbf{e}_y \left( \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Torej je

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \phi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \phi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.52)$$



Slika 4.6: Vektor premika v sferičnem koordinatnem sistemu.

Na povsem analogen način kot v cilindričnih koordinatah pristopimo k izračunu gradienta v sferičnih koordinatah. Kot kaže sl. 4.6, je tu

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi. \quad (4.53)$$

Sklepamo, da mora biti

$$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \quad (4.54)$$

tako da je zopet  $df = (\partial f / \partial r) dr + (\partial f / \partial \theta) d\theta + (\partial f / \partial \phi) d\phi$ .

## Divergenca

Izraz za divergenco v cilindričnih in sferičnih koordinatah bomo izračunali kar z Gaussovimi izreki:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \lim_{dV \rightarrow 0} dV^{-1} \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}. \quad (4.55)$$

Tu je  $dV$  prostornina majhnega prostorninskega elementa in  $d\mathbf{A}$  površinski element površine tega elementa; integral na desni gre preko vse površine.

Kot je v kartezičnem koordinatnem sistemu stranice kvadrastega prostorninskega elementa vzporedne s koordinatnimi osmi, so tudi v cilindričnem koordinatnem sistemu vzporedne z  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  in  $\mathbf{e}_z$  (slika 4.7), merijo pa  $d\rho$ ,  $\rho d\phi$  oziroma  $dz$ . Razlog za tak izbor prostorninskega elementa je preprost: ta orientacija namreč zagotavlja, da prispeva k pretoku skozi vsako od stranic le ena od komponent vektorskega polja, kar olajša račun. Po drugi strani pa bomo videli, da v krivočrtnih koordinatnih sistemih nimajo vsi pari nasprotnih stranic enake površine, kar privede do značilnih izrazov za divergenco, ki se razlikujejo od tistih v kartezičnem sistemu. Podobno velja za rotor, le da tam pride do izraza neenakost dolžin nasprotnih robov ploskvic.

Slika 4.7: K izračunu divergence v cilindričnem koordinatnem sistemu.

Prostornina tega elementa znaša

$$dV = \rho d\rho d\phi dz. \quad (4.56)$$

Vidimo, da je površina notranje ploskvice z normalo v smeri  $-\mathbf{e}_\rho$  enaka  $\rho d\phi dz$ , površina zunanje ploskvice z normalo v smeri  $\mathbf{e}_\rho$  pa  $(\rho + d\rho)d\phi dz$ . K pretoku vektorskega polja v izrazu (4.55) v smeri  $\mathbf{e}_\rho$  prispevata dva člena:

$$\begin{aligned} & -u_\rho(\rho)\rho d\phi dz + u_\rho(\rho + d\rho)(\rho + d\rho)d\phi dz \\ &= [-u_\rho(\rho)\rho + u_\rho(\rho + d\rho)(\rho + d\rho)] d\phi dz \\ &\approx \left\{ -u_\rho(\rho)\rho + \left[ u_\rho(\rho) + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} d\rho \right] (\rho + d\rho) \right\} d\phi dz \\ &\approx \left[ -u_\rho(\rho)\rho + u_\rho(\rho)\rho + u_\rho(\rho)d\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \rho d\rho \right] d\phi dz. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Točni izraz v prvi vrstici smo najprej poenostavili tako, da smo  $u_\rho(\rho + d\rho)$  zapisali z  $u_\rho(\rho)$  in diferencialom, nato pa v zavitem oklepaju obdržali le člene prvega reda v  $d\rho$ . Zdaj vidimo, da se prva člena v oklepaju pokrajšata; rezultat še polepšamo, tako da izpostavimo  $dV = \rho d\rho d\phi dz$ : dobimo

$$\left( \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\phi dz = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) \rho d\rho d\phi dz. \quad (4.58)$$

Prispevek k integralu v izrazu (4.55) skozi ploskvi z normalama v smeri  $\mathbf{e}_\phi$  oziroma v nasprotni smeri je manj zapleten, saj sta velikosti teh ploskvic enaki in znašata  $d\rho dz$ : dobimo

$$\begin{aligned} & -u_\phi(\phi)d\rho dz + u_\phi(\phi + d\phi)d\rho dz \\ &\approx \left\{ -u_\phi(\phi) + \left[ u_\phi(\phi) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} d\phi \right] \right\} d\rho dz \\ &\approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \rho d\rho d\phi dz. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Slika 4.8: Diferencial prostornine v sferičnem koordinatnem sistemu.

Na domala enak način izračunamo še prispevek k integralu skozi preostali ploskvici v smeri  $\mathbf{e}_z$ , katerih velikost je  $\rho d\rho d\phi$ :

$$\begin{aligned} & -u_z(z)\rho d\rho d\phi + u_z(z+dz)\rho d\rho d\phi \\ & \approx \left\{ -u_z(z) + \left[ u_z(z) + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right] \right\} \rho d\rho d\phi \\ & \approx \frac{\partial u_z}{\partial z} \rho d\rho d\phi dz. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Zdaj izraze (4.58)-(4.60) seštejemo, vstavimo v definicijo (4.55) in upoštevamo, da je  $dV = \rho d\rho d\phi dz$ . Dobimo

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4.61)$$

V sferičnih koordinatah postopamo povsem analogno. Najprej si narišemo diferencial prostornine s stranicami, zasukanimi vzdolž baznih vektorjev (sl. 4.8). Vidimo, da je prostornina tega telesa enaka

$$dV = dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.62)$$

Spet začnemo s prispevkoma pretoka vektorskega polja skozi ploskvici z normalama v radialni smeri, ki imata površini  $rd\theta r \sin \theta d\phi = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  oziroma  $(r+dr)^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Ta prispevka skupaj znašata

$$\begin{aligned} & -u_r(r)r^2 \sin \theta d\theta d\phi + u_r(r+dr)(r+dr)^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ & = [-u_r(r)r^2 + u_r(r+dr)(r+dr)^2] \sin \theta d\theta d\phi \\ & \approx \left\{ -u_r(r)r^2 + \left[ u_r(r) + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \right] (r+dr)^2 \right\} \sin \theta d\theta d\phi \\ & \approx \left[ -u_r(r)r^2 + u_r(r)r^2 + 2u_r(r)r dr + \frac{\partial u_r}{\partial r} r^2 dr \right] \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (4.63)$$

V zadnji vrstici smo v izrazu  $(r+dr)^2 = r^2 + 2rdr + (dr)^2$  zadnji člen izpustili, ker je v limiti  $dr \rightarrow 0$  mnogo manjši od drugega, ki je prvi netrivialen. Omenjena prispevka sta torej enaka

$$\left(\frac{2u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \quad (4.64)$$

Tudi pri prispevkih s ploskvicama vzdolž  $\mathbf{e}_\theta$  moramo paziti na to, da ploskvici nista enako veliki, saj sta stranici vzdolž  $\mathbf{e}_\phi$  tiste pri manjšem  $\theta$  približno enaki  $r \sin \theta d\phi$ , tiste pri večjem  $\theta + d\theta$  pa merita  $r \sin \theta d\phi + r \cos \theta d\theta d\phi$ ; vse stranice vzdolž  $\mathbf{e}_r$  merijo  $dr$ . Če to upoštevamo, ugotovimo, da omenjena prispevka skupaj dasta

$$\begin{aligned} & -u_\theta(\theta) r \sin \theta d\phi dr + u_\theta(\theta + d\theta) r (\sin \theta + \cos \theta d\theta) d\phi dr \\ & = [-u_\theta(\theta) \sin \theta + u_\theta(\theta + d\theta) (\sin \theta + \cos \theta d\theta)] r dr d\phi \\ & \approx \left\{ -u_\theta(\theta) \sin \theta + \left[ u_\theta(\theta) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta \right] (\sin \theta + \cos \theta d\theta) \right\} r dr d\phi \\ & \approx \left[ -u_\theta(\theta) \sin \theta + u_\theta(\theta) \sin \theta + u_\theta \cos \theta d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \sin \theta d\theta \right] r dr d\phi. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Kot v cilindričnih koordinatah se prva člena v oklepaju pokrajšata in ostane

$$\begin{aligned} & \left( u_\theta \cos \theta d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \sin \theta d\theta \right) r dr d\phi = \frac{1}{r} \left( u_\theta \cot \theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ & = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ostala sta še prispevka ploskvic z normalama vzdolž  $\mathbf{e}_\phi$ . V nasprotju s prejšnjima paroma ti imata enaki površini  $dr \times rd\theta = r dr d\theta$ , tako da skupaj dasta

$$\begin{aligned} & -u_\phi(\phi) r dr d\theta + u_\phi(\phi + d\phi) r dr d\theta \\ & \approx \left\{ -u_\phi(\phi) + \left[ u_\phi(\phi) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} d\phi \right] \right\} r dr d\theta \\ & \approx \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} r dr d\theta d\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Izraze (4.64), (4.66) in (4.67) seštejemo ter delimo z  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ , pa dobimo končni rezultat

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}. \quad (4.68)$$

Ta izraz je precej bolj zapleten od tistega v kartezičnih koordinatah, a če sledimo izpeljavi, lažje razumemo, zakaj je ravno tak.

### Rotor

Pri izračunu rotorja postopamo podobno, le da ne izhajamo iz Gaussovega izreka, temveč iz Stokesovega:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \lim_{dA \rightarrow 0} dA^{-1} \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.69)$$

kjer je  $dA$  ploščina znotraj zanke, po kateri teče integral na desni. Ker ima rotor 3 komponente, potrebujemo seveda 3 zanke, ki jih izberemo tako, da so njihove normale vzdolž baznih vektorjev.

V cilindričnem koordinatnem sistemu najprej izračunajmo komponento rotorja v smeri  $\mathbf{e}_\rho$ . Zanka ima 2 stranici vzdolž  $\mathbf{e}_\phi$  z dolžino  $\rho d\phi$  in 2 vzdolž  $\mathbf{e}_z$  z dolžino  $dz$ . Upoštevamo, da kaže normala ploskvice stran od osi  $z$ , tako da je cirkulacija enaka

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho &= u_\phi(\phi + d\phi/2, z)\rho d\phi + u_z(\phi + d\phi, z + dz/2)dz \\ &\quad - u_\phi(\phi + d\phi/2, z + dz)\rho d\phi - u_z(\phi, z + dz/2)dz \\ &\approx u_\phi(\phi + d\phi/2, z)\rho d\phi + \left[ u_z(\phi, z + dz/2) + \frac{\partial u_z}{\partial \phi} d\phi \right] dz \\ &\quad - \left[ u_\phi(\phi + d\phi/2, z) + \frac{\partial u_\phi}{\partial z} dz \right] \rho d\phi - u_z(\phi, z + dz/2) dz \\ &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) \rho d\phi dz. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ker je površina te ploskvice enaka  $\rho d\phi dz$ , je  $(\nabla \times \mathbf{u})_\rho = \rho^{-1} \partial u_z / \partial \phi - \partial u_\phi / \partial z$ .

Pri komponenti rotorja v smeri  $\mathbf{e}_\phi$  imamo zanko s stranicami  $dz$  in  $d\rho$ . Zopet pazimo na smer zanke:

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &= -u_\rho(\rho + d\rho/2, z)d\rho + u_z(\rho, z + dz/2)dz \\ &\quad + u_\rho(\rho + d\rho/2, z + dz)d\rho - u_z(\rho + d\rho, z + dz/2)dz \\ &= -u_\rho(\rho + d\rho/2, z)d\rho + u_z(\rho, z + dz/2)dz \\ &\quad + \left[ u_\rho(\rho + d\rho/2, z) + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} dz \right] d\rho - \left[ u_z(\rho, z + dz/2) + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} d\rho \right] dz \\ &= \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) d\rho dz. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Vidimo, da je torej  $(\nabla \times \mathbf{u})_\phi = \partial u_\rho / \partial z - \partial u_z / \partial \rho$ .

Poiščimo še  $(\nabla \times \mathbf{u})_z$ ! Tu imamo zanko, katere dve stranici merita  $d\rho$ ,

dve pa  $\rho d\phi$  oziroma  $(\rho + d\rho)d\phi$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_z &= -u_\phi(\rho, \phi + d\phi/2)\rho d\phi + u_\rho(\rho + d\rho/2, \phi)d\rho \\
&\quad + u_\phi(\rho + d\rho, \phi + d\phi/2)(\rho + d\rho)d\phi - u_\rho(\rho + d\rho/2, \phi + d\phi)d\rho \\
&\approx -u_\phi(\rho, \phi + d\phi/2)\rho d\phi + u_\rho(\rho + d\rho/2, \phi)d\rho \\
&\quad + \left[ u_\phi(\rho, \phi + d\phi/2) + \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} d\rho \right] \rho d\phi + u_\phi(\rho, \phi + d\phi/2)d\rho d\phi \\
&\quad - \left[ u_\rho(\rho + d\rho/2, \phi) + \frac{\partial u_\rho}{\partial \phi} d\phi \right] d\rho \\
&= \left( \frac{u_\phi}{\rho} + \frac{\partial u_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \phi} \right) \rho d\rho d\phi, \tag{4.72}
\end{aligned}$$

tako da je  $(\nabla \times \mathbf{u})_z = \rho^{-1} [\partial(\rho u_\phi)/\partial \rho - \partial u_\rho/\partial \phi]$ . V celoti torej v cilindričnih koordinatah velja

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho u_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial u_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_z. \tag{4.73}$$

Na povsem analogen način ugotovimo, da je v sferičnih koordinatah

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{u} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta u_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r u_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi. \tag{4.74}
\end{aligned}$$

S temi rezultati nismo le izpeljali zelo koristnih izrazov, temveč tudi utrdili razumevanje vektorskega računa ter Gaussovega in Stokesovega izreka. Z večkratno uporabo gornjih operatorjev lahko hitro izračunamo tudi višje odvode, npr.  $\nabla^2 f$  v cilindričnih koordinatah. Zvezi (4.48) in (4.61) dasta

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{4.75}$$

## Poglavje 5

# Integral

Odvod pove, kolikšen je naklon krivulje  $y(x)$  v dani točki, s katero lahko izrazimo spremembo funkcijske vrednosti  $dy = y'dx$ . Po drugi strani predstavlja produkt  $y(x)$  in diferenciala  $dx$  ploščino ozkega traku med krivuljo in absciso (slika 5.1). Če tovrstne prispevke vzdolž krivulje seštejemo, dobimo določni integral

$$Y(b) - Y(a) = \int_a^b y(x)dx. \quad (5.1)$$

Tu smo z  $a$  in  $b$  označili spodnjo in zgornjo mejo integracije. Integral lahko vpeljemo tudi kot operacijo, inverzno odvajanju: če je  $Y(x)$  taka neznana funkcija, da je njen odvod enak znani  $y(x)$

$$\frac{dY(x)}{dx} = y(x), \quad (5.2)$$

potem je  $Y(x)$  nedoločni integral  $y(x)$ :

$$Y(x) = \int y(x)dx \quad (5.3)$$

Slika 5.1: Integral kot ploščina pod krivuljo.

V tej definiciji je nekaj svobode, saj sta odvoda funkcij  $Y(x)$  in  $Y(x) + konst.$  enaka. Zato je nedoločni integral tudi definiran do aditivne konstante:

$$Y(x) = \int y(x)dx + konst. \quad (5.4)$$

Zdaj tudi vidimo, zakaj smo določni integral v enačbi (5.1) zapisali kot razliko  $Y(b) - Y(a)$ : če sta gornja in spodnja meja integracije skoraj enaki in je  $b = a + dx$ , je ploščina pod krivuljo približno enaka  $y(x)dx$  in imamo

$$Y(b + dx) - Y(b) \approx y(x)dx \quad (5.5)$$

ali

$$y(x) = \frac{Y(b + dx) - Y(b)}{dx}. \quad (5.6)$$

To se ujema z definicijo odvoda pri  $x = b$ , če je  $dx$  majhen, in z definicijo integrala (5.2). Da je funkcija  $Y(x)$  sama nedoločena do aditivne konstante, ne moti, saj se ta konstanta v razliki  $Y(b) - Y(a)$  v enačbi (5.1) odšteje.

Na podlagi odvodov elementarnih funkcij (3.13) že lahko zapišemo nekaj integralov:

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + konst. && (\text{za } n \neq -1) \\ \int \exp(x) dx &= \exp(x) + konst. \\ \int \cos(x) dx &= \sin(x) + konst. \\ \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + konst. \\ \int x^{-1} dx &= \ln(x) + konst. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Naštejmo nekaj koristnih lastnosti integralov:

- Če zamenjamo meji, se znak spremeni:

$$\int_b^a y(x)dx = - \int_a^b y(x)dx. \quad (5.8)$$

To sledi neposredno iz enačbe (5.1).

- Če leži  $c$  med  $a$  in  $b$ ,  $a < c < b$ , je

$$\int_a^b y(x)dx = \int_a^c y(x)dx + \int_c^b y(x)dx, \quad (5.9)$$

kar prav tako sledi iz enačbe (5.1).



- Oglejmo si integral vsote dveh funkcij:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad (5.10)$$

zopet na podlagi enačbe (5.1). Enako uvidimo, da je

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \quad (5.11)$$

kjer je  $\lambda$  konstanta

- Še ena interpretacija ploščine pod krivuljo je tale

$$\int_b^0 f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx. \quad (5.12)$$

To pokažemo z vpeljavo nove spremenljivke  $u = b - x$ , tako da je  $x = b - u$  in  $dx = -du$ . S temi zamenjavami levo stran prepisemo v  $-\int_b^0 f(b-u)du$ , kjer smo upoštevali, da sta se spremenili tudi obe meji. Zamenjamo meji in takoj dobimo končni rezultat.

## Metode za izračun integralov

Najenostavnejše metode za izračun integralov vključujejo prevedbo na enega ali več elementarnih integralov z i) vpeljavo nove spremenljivke, ii) integracijo po delih (*per partes*) ali iii) uporabo redukcijske formule, kjer integral s kakim parametrom (npr potenco) izrazimo s integralom z manjšo vrednostjo parametra, naposled pa z elementarnim integralom. Pogosto pride prav, če prepoznamo kako simetrijo integranda in integracijskega območja, če ta seveda obstaja — integral

$$\int_{-a}^a x dx \quad (5.13)$$

je npr. enak 0 zato, ker je integracijski interval simetričen, integrand pa lih in sta tako prispevka v intervalih med  $-a$  in 0 ter med 0 in  $a$  nasprotno enaka.

Lep zgled za uporabo redukcijske formule in metode *per partes* je integral

$$\int x^n \exp(x)dx, \quad (5.14)$$

v katerem z integracijo *per partes*  $\int u dv = uv - \int v du$  znižamo potenco  $n$ :

$$\int x^n \exp(x)dx = x^n \exp(x) - n \int x^{n-1} \exp(x)dx. \quad (5.15)$$

Če prvotni integral označimo z  $\mathcal{I}_n$ , torej velja

$$\mathcal{I}_n = x^n \exp(x) - n\mathcal{I}_{n-1}. \quad (5.16)$$

Ker je  $\mathcal{I}_0$  elementarni integral  $\exp(x)$ , je recimo

$$\mathcal{I}_1 = \int x \exp(x) dx = x \exp(x) - \exp(x) = (x - 1) \exp(x) \quad (5.17)$$

in

$$\mathcal{I}_2 = \int x^2 \exp(x) dx = x^2 \exp(x) - 2\mathcal{I}_1 = (x^2 - 2x - 2) \exp(x) \quad (5.18)$$

itd.

Če v gornjem zgledu  $\exp(x)$  nadomestimo z  $\exp(-x)$  in integriramo od 0 do  $\infty$ , dobimo definicijo funkcije gama:

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^\infty x^n \exp(-x) dx. \quad (5.19)$$

Podobno kot zgoraj je  $\Gamma(n + 1) = -x^n \exp(-x)|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} \exp(-x) dx$ , kjer je prvi člen na desni enak 0, tako da je

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n). \quad (5.20)$$

Očitno je  $\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \dots \Gamma(1)$  in ker je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-x) dx = 1, \quad (5.21)$$

za celoštevilске  $n$  velja  $\Gamma(n + 1) = n!$ .

### Vrste integralov

Integrand je lahko skalarna količina kot v gornjem zgledu ali vektorska količina kot v Stokesovem izreku v poglavju 4. Tam smo se spotoma naučili, da integral vektorske količine izračunamo za vsako komponento posebej, kot bi bila skalarna količina. Rezultat integracije je prav tako lahko bodisi skalar bodisi vektor, kar ilustrirajo tri vrste integralov po izbrani poti v trirazsežnem prostoru, katere diferencial je enak

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz. \quad (5.22)$$

Slika 5.2: Vrednost integrala je odvisna od izbire poti: vzdolž premice  $y = x$  dobimo drugačno vrednost kot vzdolž četrтинke krožnice.

Obliko poti podaja zveza med  $dx$ ,  $dy$  in  $dz$ . Če vzdolž poti integriramo skalarno količino, je rezultat vektor

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x \int_c f(\mathbf{r}) dx + \mathbf{e}_y \int_c f(\mathbf{r}) dy + \mathbf{e}_z \int_c f(\mathbf{r}) dz = \text{vektor.} \quad (5.23)$$

Če integriramo komponento vektorskega polja vzdolž konture, je rezultat skalar:

$$\int_c \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_c v_x(\mathbf{r}) dx + \int_c v_y(\mathbf{r}) dy + \int_c v_z(\mathbf{r}) dz = \text{skalar.} \quad (5.24)$$

Tretja vrsta integrala po poti je

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{l} &= \mathbf{e}_x \int_c [v_y(\mathbf{r}) dz - v_z(\mathbf{r}) dy] + \mathbf{e}_y \int_c [v_z(\mathbf{r}) dx - v_x(\mathbf{r}) dz] \\ &\quad + \mathbf{e}_z \int_c [v_x(\mathbf{r}) dy - v_y(\mathbf{r}) dx] = \text{vektor.} \end{aligned} \quad (5.25)$$

## Integral je odvisen od poti

Integral po poti je odvisen od poti in v splošnem ni enak za dve poti s skupno začetno in končno točko. To si ponazorimo z zgledom, kjer primerjamo vrednosti integrala  $x^2 + y^2$  od točke  $x = 0, y = 0$  do točke  $x = 1, y = 1$  vzdolž dveh poti na sl. 5.2. Če integriramo vzdolž premice  $y = x$ , je rezultat enak

$$I_1 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}. \quad (5.26)$$

Vzdolž krožnega loka  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  dobimo

$$I_2 = \int_0^1 [x^2 + 1 - (x - 1)^2] dx = \int_0^1 2x dx = 1. \quad (5.27)$$

Integracijsko območje je lahko eno- ali večrazsežno; če se nanaša na fizični prostor, govorimo o linijskih, ploskovnih ali prostorninskih integralih.

## 5.1 Integral v geometriji, mehaniki in termodinamiki

Oglejmo si nekaj primerov uporabe integrala. Najprej izračunajmo prostornino elipsoida s polosmi  $a, b$  in  $c$ , podanega z enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5.28)$$

odkoder lahko npr. izrazimo  $z = z(x, y)$ . Takoj uvidimo, da so delne prostornine v posameznem oktantu vse enake, tako da je dovolj integrirati po  $x$  od 0 do  $a$ , po  $y$  od 0 do  $b$  in po  $z$  od 0 do  $c$  ter rezultat pomnožiti z 8:

$$V = 8V_0 = 8 \int z(x, y) dx dy. \quad (5.29)$$

Lahko pa postopamo tudi drugače in telo razdelimo na rezine debeline  $dz$  (sl. 5.3) ter seštejemo prispevke teh rezin:

$$V = 8V_0 = 8 \int A(z) dz. \quad (5.30)$$

Slika 5.3: K izračunu prostornine elipsoida.

Tu je  $A(z)$  ploščina rezine osminke elipsoida na višini  $z$ . Označimo z  $u = a\sqrt{1 - z^2/c^2}$  in  $v = b\sqrt{1 - z^2/c^2}$  polosi te rezine; potem je

$$A(z) = \int_0^u v \sqrt{1 - x^2/u^2} dx. \quad (5.31)$$

Vpeljemo novo spremenljivko  $x = u \cos w$ , da je  $dx = -u \sin w dw$ . Spodnji meji  $x = 0$  ustreza  $w = \pi/2$ , zgornji  $x = u$  pa  $w = 0$ . Sledi

$$A(z) = - \int_{\pi/2}^0 uv \sin^2 w dw = \int_0^{\pi/2} uv \sin^2 w dw. \quad (5.32)$$

### 5.1. INTEGRAL V GEOMETRIJI, MEHANIKI IN TERMODINAMIKI 69

Ni težko videti, da je integral  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 w dw$  ravno polovica širine integracijskega območja, torej  $\pi/4$  — če bi namreč namesto  $\sin^2 w$  integrirali  $\cos^2 w$ , bi morali dobiti isto, saj se ti funkciji v omenjenem intervalu razlikujeta le za fazo. Skupaj pa po Pitagorovem izreku dasta 1.

Zdaj v rezultat  $V = 8V_0 = 8 \int A(z) dz = 8 \int \frac{\pi}{4} u v dz$  vstavimo odvisnost  $u(z)$  in  $v(z)$ :

$$V = 8V_0 = 8 \int A(z) dz = 2\pi \int_0^c ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz, \quad (5.33)$$

integriramo oba člena in imamo

$$V = \frac{4\pi abc}{3}. \quad (5.34)$$

Če so polosi enake  $R$ , dobimo znani rezultat za kroglo:  $V = 4\pi R^3/3$ .

Tole je bil bolj geometrijski zgled za prostorninski integral, kjer smo integrirali trivialni integrand 1 po ne čisto trivialnem integracijskem območju — poskusimo zdaj nekaj fizikalnega. Ob enačbi (2.52) smo se naučili, da je vztrajnostni moment točkastega telesa enak  $mr^2$ ; tu sta  $m$  in  $r$  masa oziroma oddaljenost telesa od osi vrtenja. Na osnovi tega rezultata lahko izračunamo vztrajnostne momente teles različnih oblik, najlažje seveda za telesa, ki imajo sama kako simetrijo.

Začnimo s tankim obročem, ki se vrtili okoli osi skozi središče, pravokotne na ravnino obroča. (Izraz "tanek obroč" pomeni, da je debelina obroča mnogo manjša od polmera.) V tem primeru ima obroč enak vztrajnostni moment kot točkasto telo. To uvidimo, če ga v mislih razsekamo na drobne segmente, ki tvorijo s točko v osi kot  $d\phi$ . Ker je polmer obroča  $R$ , je dolžina vsakega od teh segmentov  $Rd\phi$ , masa pa  $dm = \rho A R d\phi$ ; tu sta  $\rho$  in  $A$  gostota oziroma ploščina preseka obroča (sl. 5.4a). Vztrajnostni moment je vsota prispevkov vsakega od teh segmentov

$$J = \int r^2 dm = R^2 \int dm. \quad (5.35)$$

Zdaj uvidimo, da smo se zgoraj pri izpisovanju  $dm$  po nepotrebem malo zaleтели, saj je oddaljenost posameznega segmenta  $r$  za vse segmente enaka  $R$ , tako da jo lahko izpostavimo — potem pa je rezultat na dlani:

$$J = R^2 \int dm = mR^2. \quad (5.36)$$

Poglejmo zdaj, kako je, če os vrtenja leži v ravnini obroča. Tu zopet integriramo po zgoraj definiranih segmentih, a njihova oddaljenost od osi ni

Slika 5.4: Obroč, vrteča se okoli simetrijske osi (a) oziroma okoli osi v ravnini obroča, ki gre skozi središče (b), razdelimo pri izračunu vztrajnostnega momenta na enak način.

za vse enaka. Če štejemo kot  $\phi$  tako, da je vzdolž osi in v nasprotni smeri 0 oziroma  $\pi$ , je  $r = R \sin \phi$  in je

$$J = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2 \phi \rho A R d\phi = \pi \rho A R^3. \quad (5.37)$$

Kot pri izračunu prostornine elipsoida smo upoštevali, da je  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \pi$ . Ker je masa obroča enaka  $m = \rho V = \rho 2\pi R A$ , je torej

$$J = \frac{m R^2}{2}. \quad (5.38)$$

Pri tanki palici z dolžino  $l$ , ki se vrtili okoli prečne osi skozi središče, je naravno izbrati kartezični koordinatni sistem z izhodiščem v osi, da je  $r = |x|$  in  $dm = \rho A dx$ . Tedaj je

$$J = \int r^2 dm = \int_{l/2}^{l/2} x^2 \rho A dx = \rho A \frac{l^3}{12} = \frac{m l^2}{12}. \quad (5.39)$$

Zopet smo upoštevali, da je  $m = \rho A l$ .

Izračunajmo še vztrajnostni moment krogelne lupine. Tu je najbolje izbrati sferične koordinate in lupino razrezati na obroč, pravokotne na os. Kot pri obroču integral parametriziramo s polarnim kotom  $\theta$ , da je  $dm = \rho \times h \times 2\pi r \times R d\theta$  z  $r = R \sin \theta$ ; tu je  $h$  debelina lupine (sl. 5.5). Dobimo

$$J = \int r^2 dm = \int_0^\pi R^2 \sin^2 \theta 2\pi \rho h R^2 \sin \theta d\theta. \quad (5.40)$$

(Faktor  $\sin^2 \theta$  odraža to, da se polmer obročev spreminja s polarnim kotom, faktor  $\sin \theta$  pa to, da isto velja tudi za obseg in s tem za maso obroča.) Ta integral uženemo tako, da uvidimo, da je  $\sin \theta d\theta = -d(\cos \theta)$ . Ker lahko

Slika 5.5: K izračunu vztrajnostnega momenta krogelne lupine.

nadalje  $\sin^2 \theta$  zapišemo kot  $1 - \cos^2 \theta$ , je smiselna uvedba nove spremenljivke  $w = \cos \theta$ , da se integral glasi

$$J = 2\pi\rho hR^4 \int_{-1}^1 (1 - w^2)dw. \quad (5.41)$$

Spodnja in zgornja meja za  $\theta$  sta 0 in  $\pi$ , čemur pri  $w$  ustrežata 1 oziroma  $-1$ ; a meji smo zamenjali in se s tem znebili minusa v  $\sin \theta d\theta = -d(\cos \theta)$ . Končni rezultat je

$$J = \frac{8\pi}{3}\rho hR^4 = \frac{2mR^2}{3}. \quad (5.42)$$

Na koncu smo upoštevali, da je  $4\pi R^2 h$  prostornina krogelne lupine, tako da  $4\pi R^2 h \rho$  predstavlja maso slednje.

Pri vseh računih vztrajnostnega momenta smo imeli opravka s telesi s homogeno gostoto, tako da je bil rezultat odvisen le od oblike in od orientacije telesa. Če bi se gostota spreminjala od točke do točke, bi bil rezultat seveda drugačen.

Lep zgled za rabo integralov je delo pri termodinamiki, ki ga dobimo z linijskim integralom v prostoru stanj v ravnini  $pV$ . Kakor je delo sile, ki premika točkasto telo, enako  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , kjer je  $\mathbf{F}$  sila in  $d\mathbf{r}$  premik, je delo, ki ga plin odda ali prejme pri razpenjanju oziroma stiskanju, podano z

$$dW = -pdV. \quad (5.43)$$

Če se torej prostornina plina poveča in je  $dV > 0$ , plin opravi delo, na kar opozarja negativni predznak; če se prostornina plina zmanjša in je  $dV < 0$ , plin prejme delo.

Oglejmo si delo, ki ga konstantna masa idealnega plina izmenja z okolico pri krožni termodinamični spremembi, ki jo tvorijo izobara, izohora in izoterma (sl. 5.6)! Plin z začetno temperaturo  $T'$  pri stalnem tlaku najprej ohladimo, da se mu prostornina prepolovi, nato ga pri stalni prostornini

Slika 5.6: Krožna sprememba, ki jo tvorijo izobara, izohora in izoterma.

segrejemo na začetno temperaturo in naposled ga pri stalni temperaturi razpnemo do začetne prostornine  $V'$ .

Vsako od stopenj problema obravnavamo posebej in poleg dela izračunajmo še toploto, ki jo plin izmenja z okolico. Vzdolž izobare je delo enako

$$W_1 = - \int p dV = -p' \left( \frac{V'}{2} - V' \right) = \frac{p'V'}{2}, \quad (5.44)$$

kjer je  $p'$  začetni tlak plina. V  $pV$  diagramu to delo predstavlja ploščina pravokotnika med izobaro in abscisno osjo.

Temperatura se je pri tem stiskanju spremenila z začetne  $T'$  na končno  $T$ , ki jo dobimo z Gay-Lussacovim zakonom:

$$T = T' \frac{V}{V'} = \frac{T'}{2}. \quad (5.45)$$

To pomeni, da je plin pri tem z okolico izmenjal toploto

$$Q_1 = mc_p \Delta T = mc_p (T - T') = -\frac{mc_p T'}{2}. \quad (5.46)$$

(Plin je to toploto oddal.)

V izohorni stopnji cikla dela ni, ker se prostornina plina ne spremeni:

$$W_2 = 0. \quad (5.47)$$

A pri zviševanju tlaka se poveča tudi temperatura in sicer s  $T'/2$  na začetno  $T'$ , za kar je treba plinu dovesti toploto

$$Q_2 = mc_V \Delta T = mc_V (T' - T) = \frac{mc_V T'}{2}. \quad (5.48)$$

V zadnji stopnji plin odda delo. Ob izotermnem razpenjanju tlak pada, kakor pove Boylov zakon:  $p(V) = p(V'/2, T')V'/2V$ . Tu smo že upoštevali,



### 5.1. INTEGRAL V GEOMETRIJI, MEHANIKI IN TERMODINAMIKI 73

da je začetna prostornina v tej stopnji enaka  $V'/2$ . dobimo

$$\begin{aligned} W_3 &= - \int p dV = - \frac{p(V'/2, T')V'}{2} \int \frac{dV}{V} = - \frac{p(V'/2, T')V'}{2} \ln \frac{V'}{V'/2} \\ &= - \frac{p(V'/2, T')V'}{2} \ln 2. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Ta rezultat še nekoliko poenostavimo, če upoštevamo, da je tlak  $p(V'/2, T')$  z Boylovim zakonom povezan z začetnim tlakom  $p'$  in velja  $p(V'/2, T')V'/2 = p'V'$ . Torej je

$$W_3 = -p'V' \ln 2. \quad (5.50)$$

Ker se temperatura plina ne spremeni, je v tej fazi sprememba notranje energije  $\Delta U$  enaka 0, saj je notranja energija idealnega plina odvisna le od temperature. Energijski zakon tedaj pove, da je v tej stopnji toplota nasprotno enaka delu:

$$Q_3 = -W_3 = p'V' \ln 2. \quad (5.51)$$

Delo  $W_3$  je ploščina pod izotermo med prostorninama  $V'/2$  in  $V'$ ; ta je pozitivnega predznaka, ker je zgornja meja integrala višja od spodnje, in očitno večja od dela v izobarni stopnji  $W_1$ . Skupno delo je enako

$$W = W_1 + W_3 = \frac{p'V'}{2} - p'V' \ln 2 = -p'V' \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right). \quad (5.52)$$

(Izraz smo zapisali tako, da izpostavimo, da je v celoti plin delo oddal.) Vidimo, da je celotno oddano delo po velikosti enako ploščini, ki jo v  $pV$  diagramu objame zanka, predstavljajoča cikel. Obenem spoznamo, da je smer intergracije pomembna: če bi cikel tekel v obratni smeri urinega kazalca namesto v smeri urinega kazalca, bi plin delo prejel in ne oddal ter bi imeli toplotno črpalko namesto toplotnega stroja.

Seštejmo še vse tri prispevke k izmenjani toploti:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = -\frac{mc_p T'}{2} + \frac{mc_v T'}{2} + p'V' \ln 2 \\ &= -\frac{mRT'}{2M} + p'V' \ln 2 = -\frac{p'V'}{2} + p'V' \ln 2 \\ &= p'V' \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Vidimo, da je skupna izmenjana toplota ravno nasprotno enaka skupnemu delu, kot je prav, saj mora biti ob koncu cikla notranja energija enaka

začetni. — Poiščimo zdaj izkoristek, ki je definiran kot razmerje opravljene-  
nega dela in dovedene toplote  $\eta = |W|/Q_{\text{dov}} = |W|/(Q_2 + Q_3)$ :

$$\eta = \frac{p'V'(\ln 2 - 1/2)}{mc_V T'/2 + p'V' \ln 2}. \quad (5.54)$$

Tu je prikladno  $c_V$  povezati z razliko specifičnih toplot  $c_p - c_V = R/M$  in  
razmerjem specifičnih toplot  $\kappa = c_p/c_V$ :  $c_V = (R/M)/(\kappa - 1)$ . Teda-  
lahko gornji izraz prepisemo v

$$\eta = \frac{\ln 2 - 1/2}{\ln 2 + 1/[2(\kappa - 1)]}. \quad (5.55)$$

Pri enoatomnem plinu je  $\kappa = 5/3$  in je  $\eta = 0.1338\dots$

## 5.2 Nepravi integrali

Doslej smo potihem privzeli, da obravnavani integral obstaja in je torej re-  
zultat integracije končen. To je res, če je integrand znotraj integracijskega  
območja končen in če je to območje samo končno. Če ta pogoja nista izpol-  
njena, se lahko zgodi, da integral ne obstaja. Poglejmo si posebej primera,  
ko integrand divergira in ko je integracijsko območje neskončno, obakrat s  
po dvema primeroma.

Funkcija  $y(x) = 1/x$  ima pri  $x = 0$  pol in njen integral

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \ln x \Big|_{x=0}^{x=1} \rightarrow \infty \quad (5.56)$$

divergira na spodnji meji. Tudi funkcija  $y(x) = 1/\sqrt{x}$  ima pri  $x = 0$  pol, a  
njen integral od 0 do poljubne končne zgornje meje (npr. 1) je končen. To  
uvidimo s temle razmislekom:

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^1 = 2, \quad (5.57)$$

saj je  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\epsilon} = 0$ .

Integral

$$\int_1^{\infty} x^{-n} dx \quad (5.58)$$

z  $n > 1$  tudi zapišemo kot limito:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-n} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-n+1} \left( \frac{1}{b^{n-1}} - 1 \right). \quad (5.59)$$

Vrednost integrala na zgornji meji limitira proti 0, če je le  $n > 1$ , in tedaj je rezultat  $1/(n - 1)$ .

Za konvergenco integrala po neomejenem območju je torej ključno, da integrand dovolj hitro pada proti 0. To ne velja za integral

$$\int_0^{\infty} \cos(x) dx, \quad (5.60)$$

ki ga tudi lahko predstavimo kot limito

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin(b), \quad (5.61)$$

le da ta limita ne obstaja.

Včasih je obstoj ali neobstoj integrala manj očiten. Če ne bi poznali obnašanja funkcije  $\sin(x)/x$  pri  $x = 0$ , bi na prvi pogled nemara mislili, da integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (5.62)$$

prav tako divergira na spodnji meji in morda dodatno tudi zato, ker je zgornja meja v neskončnosti. A ni tako: na spodnji meji integrand limitira proti 1, zato tam ne divergira, in niti zgornja meja ne povzroči divergence. (Izkaže se, da je vrednost tega integrala  $\pi/2$ .)

Zelo važen integral po neskončnem območju je integral Gaussove funkcije

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx. \quad (5.63)$$

Ta funkcija pogosto nastopa v fiziki, npr. v statistični mehaniki, in v statistiki. Integral lahko uženemo tako, da si ogledamo njegov kvadrat

$$\mathcal{I}^2 = \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx \times \int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy. \quad (5.64)$$

Nemo spremenljivko v drugem integralu smo preimenovali, tako da lahko izraz razumemo kot integral po prvem kvadrantu ravnine  $xy$ :

$$\mathcal{I}^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy = \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr \int_0^{\pi/2} d\phi. \quad (5.65)$$

V zadnjem koraku smo kartezični koordinati nadomestili s polarnimi. Integral po kotu do  $\pi/2$ , integral po  $r$  pa je elementaren in znaša  $1/2$ . Sledi

$$\mathcal{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.66)$$

Hitro sprevidimo, da mora biti  $\int_0^\infty \exp(-a^2x^2)dx = \sqrt{\pi}/(2a)$  in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}. \quad (5.67)$$

Gaussovo funkcijo srečamo npr. v normalni (Gaussovi) verjetnostni porazdelitvi, ki mora biti normirana, tako da je njen integral od  $-\infty$  do  $\infty$  enak 1. Standardni zapis normalne verjetnostne gostote vsebuje namesto gornjega  $a$   $1/(\sqrt{2}\sigma)$  in je pomnožen z  $1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$ , da je

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1. \quad (5.68)$$

Tu je  $\sigma$  širina porazdelitve.

### 5.3 Odvod po zgornji ali spodnji meji

Integral

$$\int_a^b y(x)dx = Y(b) - Y(a) \quad (5.69)$$

je odvisen od spodnje in od zgornje meje ter ga lahko vidimo kot funkcijo vsake od meja. Iz definicije

$$\frac{dY}{dx} = y(x) \quad (5.70)$$

vidimo, da je

$$\frac{d}{db} \int_a^b y(x)dx = \frac{d}{db} [Y(b) - Y(a)] = y(b) \quad (5.71)$$

in

$$\frac{d}{da} \int_a^b y(x)dx = \frac{d}{da} [Y(b) - Y(a)] = -y(a). \quad (5.72)$$

Ta dva rezultata imata enostavni geometrijski interpretaciji (sl. 5.7). Pri prvi se sprašujemo, za koliko se poveča vrednost integrala, če zgornjo mejo premaknemo za  $db > 0$ , in odgovor je

$$dY(b) = \frac{dY}{db} db = y(b)db. \quad (5.73)$$

Pri drugi je podobno, le da se ploščina pod krivuljo zaradi premika spodnje meje za  $da$  zmanjša za

$$dY(a) = \frac{dY}{da} da = -y(a)da. \quad (5.74)$$

Slika 5.7: Geometrijska ilustracija odvoda integrala po spodnji in zgornji meji.

Zopet smo privzeli, da je  $da > 0$ .

Ponazorimo to pravilo z enostavnim zgledom, kjer obravnavamo prostornino krožne lupine s polmeroma  $R_1$  in  $R_2 > R_1$ . Prostornino izračunamo tako, da integriramo prispevke tankih koncentričnih lupin med mejama

$$V = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3). \quad (5.75)$$

Odvod prostornine lupine po zgornji meji je po pravilu (5.73) enak  $4\pi R_2^2$  in enak rezultat dobimo, če desno stran enačbe (5.75) odvajamo po  $R_2$ . Podobno je odvod po spodnji meji na oba načina enak  $-4\pi R_1^2$ .

## 5.4 Odvod po parametru

Integrand je lahko odvisen tudi od kakega parametra  $a$ , ne le od integracijske spremenljivke  $x$ . Če nas zanima odvod integrala  $Y(x, \alpha) = \int y(x, \alpha) dx$  po tem parametru  $\partial Y(x, \alpha) / \partial \alpha$ , je koristno vedeti, da je

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial \alpha} = \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha \partial x} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad (5.76)$$

saj je

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = y. \quad (5.77)$$

Če zdaj integriramo levo in desno stran enačbe (5.76) po  $x$ , dobimo

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Y(x, \alpha) = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) dx. \quad (5.78)$$

S tem pravilom lahko recimo hitro izračunamo integral  $\int x \exp(\alpha x) dx$ , ki ga je seveda mogoče ovrednotiti tudi npr. z integracijo *per partes* ali z redukcijo

kot na začetku tega poglavja. Začnemo z

$$\int \exp(\alpha x) dx = \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha} \quad (5.79)$$

in odvajamo obe strani po  $\alpha$ :

$$\int x \exp(\alpha x) dx = \frac{\alpha x - 1}{\alpha^2} \exp(\alpha x). \quad (5.80)$$

## 5.5 Linijski integrali

Ena od zelo osnovnih rab integrala v fiziki je izračun dela

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (5.81)$$

ki je matematično gledano integral skalarne količine — projekcije sile na pot  $F \cos \theta$  — vzdolž krivulje z ločnim elementom  $d\mathbf{l}$ .

Često nas poleg ploščine pod krivuljo  $y(x)$  zanima dolžina slednje. To dobimo tako, da najprej poiščemo dolžino ločnega elementa krivulje  $d\mathbf{l}$ . Pitagorov izrek (sl. 5.8) pove, da je

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \quad (5.82)$$

Ker je  $y$  funkcija  $x$ , je nadalje  $dy = y' dx$ , kar da

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (5.83)$$

Slika 5.8: Dolžino ločnega elementa krivulje izračunamo s Pitagorovim izrekom.

Tedaj je dolžina krivulje med  $x = a$  in  $x = b$  enaka

$$l = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (5.84)$$

Izračunajmo za zgled obseg krožnice. V prvem kvadrantu se enačba krožnice glasi

$$y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad (5.85)$$

tako da je

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \quad (5.86)$$

Celoten obseg krožnice je

$$p = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2/r^2}}. \quad (5.87)$$

Kot pri izračunu prostornine elipsoida vpeljemo novo spremenljivko, da je  $x/r = \cos u$  in torej  $dx = -r \sin u du$ . To da

$$p = 4 \int_0^{\pi/2} r du = 2\pi r. \quad (5.88)$$

Zadnji korak nas opominja, da bi obseg seveda naravneje poiskali v polarnem koordinatnem sistemu, kjer je  $dl = r d\phi$ , in integrirati po  $\phi$  od 0 do  $2\pi$ , pa bi imeli znani rezultat na dlani takoj.

Povsem podobno postopamo pri trirazsežnih krivuljah, le da je tu

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (5.89)$$

Običajno podamo prostorsko krivuljo tako, da navedemo  $x$ ,  $y$  in  $z$  kot funkcije primerne parametra. Če je parameter  $t$  in odvode koordinat po  $t$  označimo s piko ( $dx/dt = \dot{x}$  itd.), je

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (5.90)$$

Uporabimo to za izračun dolžine vijačnice, podane z

$$\begin{aligned} x(\phi) &= r \cos \phi, \\ y(\phi) &= r \sin \phi, \\ z(\phi) &= c\phi. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Tu kaže os vzdolž  $\mathbf{e}_z$ ;  $r$  je polmer,  $2\pi c$  pa korak vijačnice. Dolžina ločnega elementa je

$$dl = \sqrt{r^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi + c^2} d\phi = \sqrt{r^2 + c^2} d\phi \quad (5.92)$$

in integral je trivialen — dolžina enega zasuka vijačnice je

$$p = 2\pi\sqrt{r^2 + c^2}. \quad (5.93)$$

Če postavimo  $c = 0$ , dobimo obseg krožnice; z  $r = 0$  pa dobimo dolžino ravne črte, kakor je tudi prav. Pri vijačnici je račun preprost, pri kaki bolj komplicirani krivulji ne.

V splošnem je linijski integral odvisen od poti, a včasih se zgodi, da ni. Dvorazsežni primer za to je delo sile  $\mathbf{F} = \alpha(y, x)$ , kjer je  $\alpha$  konstanta:

$$W = \int_A^B \alpha(y, x) \cdot dx, dy = \int_A^B \alpha(ydx + xdy). \quad (5.94)$$

V izrazu v oklepaju prepoznamo totalni diferencial  $d(xy)$ , tako da rezultat znaša

$$W = \alpha xy|_A^B = \alpha(x_B y_B - x_A y_A). \quad (5.95)$$

Če v kakem integralu prepoznamo totalni diferencial, se to izplača izkoristiti, preden se lotimo računanja. Najbolj znan fizikalni primer, kjer se to zgodi, je delo sile  $\mathbf{F}$ , ki jo lahko zapišemo kot gradient kakega skalarnege polja. Dokaz je preprost: iz

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi = -(d\Phi/dx, d\Phi/dy, d\Phi/dz) \quad (5.96)$$

sledi

$$dW = -\frac{d\Phi}{dx}dx - \frac{d\Phi}{dy}dy - \frac{d\Phi}{dz}dz = -d\Phi. \quad (5.97)$$

Integral  $dW$  je torej enak razliki  $-(\Phi_B - \Phi_A)$ . Pogost primer te vrste je delo sile teže  $-mg\mathbf{e}_z$ , ki jo lahko zapišemo kot gradient potencialne energije  $mgz$ . Delo sile teže je tako razlika potencialne energije v obeh točkah

$$W = mg(z_B - z_A). \quad (5.98)$$

Sili, ki jo lahko zapišemo kot gradient potenciala, pravimo konservativna, ker je delo vzdolž poljubne sklenjene zanke enako 0. To namreč pomeni, da se ustrezna energija ohranja; v gornjem primeru gravitacijska potencialna energija. Pri dvigu bremena zunanja sila opravi delo proti sili teže, pri spustu na začetno višino nasprotno enako delo dobi in skupna sprememba potencialne energije je enaka 0. Od pogosto rabljenih vrst mehaničnih sil sta konservativni sila teže in sila vzmeti, sila trenja pa ne; konservativna je tudi elektrostatična sila.



## Poglavje 6

# Diferencialne enačbe

Mnogo fizikalnih procesov povezuje časovni ali krajevni odvod izbrane količine s to količino samo, s krajevnim odvodom po drugih koordinatah ali z zunanjo silo, ki je lahko odvisna od časa in od kraja. V drugem Newtonovem zakonu npr. nastopa drugi odvod lege po času, ki je sorazmeren s silo na telo, ta pa je lahko odvisna od kraja — pri vzmetnem nihalu recimo preko Hookovega zakona

$$m\ddot{x} = F(x) = -Kx, \quad (6.1)$$

kjer je

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (6.2)$$

Tu smo se omejili na premo gibanje;  $m$  je masa telesa in  $K$  s koeficient vzmeti.

Matematična vzeto je ta zveza diferencialna enačba in sicer

- navadna, ker vsebuje le odvod po eni spremenljivki, torej po času,
- 2. reda, ker vsebuje drugi odvod po času,
- linearna, ker časovni odvod koordinate in koordinata sama nastopata kot linearna člena, in
- homogena, ker v enačbi ni nobenega člena, ki ne bi vseboval  $x$ .

Bolj zapletena diferencialna enačba je recimo Gaussov zakon kot primer Poissonove enačbe

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (6.3)$$

ki skupaj s primernimi robnimi pogoji določa krajevno odvisnost električnega potenciala  $\Phi$ , izhajajočega iz dane prostorske gostote električnega naboja  $\rho$ .

(Gaussov zakon enakovredno zapišemo z jakostjo električnega polja  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , saj je  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ .) Še malo kompleksnejša je Navier-Stokesova enačba

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (6.4)$$

Ta opisuje časovno in krajevno spreminjanje hitrosti tekočine z gostoto  $\rho$  in dinamično viskoznostjo  $\eta$ ;  $p$  je tu hidrostatični tlak. Navier-Stokesova enačba je nelinearna in nehomogena parcialna diferencialna enačba za vektorsko polje. Kasneje bomo videli, da se za zapleteno obliko skriva le drugi Newtonov zakon.

Raznolikost diferencialnih enačb bomo spoznali postopoma ter sproti opisali nekaj načinov za njihovo reševanje — najprej si bomo pogledali preproste navadne, nato še parcialne.

## 6.1 Navadne diferencialne enačbe 1. reda

Na to vrsto diferencialnih enačb naletimo v primerih, kjer je hitrost spreminjanja (najpogosteje časovni odvod) kake spremenljivke funkcija te spremenljivke. Lep primer je radioaktivni razpad, pri katerem je število atomov, ki se v časovni enoti pretvorijo v drug element, sorazmerno s skupnim številom radioaktivnih atomov  $N$ :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (6.5)$$

$\lambda$  je tu razpadna konstanta. Tako diferencialno enačbo rešimo s separacijo spremenljivk: preoblikujemo jo v

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \quad (6.6)$$

kjer je leva stran enačbe odvisna le od  $N$ , desna le od  $t$ . Rešitev je odvisna od začetnega števila atomov  $N_0$  ob času  $t = 0$ . Levo stran integriramo od  $N_0$  do končnega števila  $N$ , desno od časa 0 do končnega časa  $t$  ter dobljeno zvezo antilogaritmiramo, pa imamo

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t). \quad (6.7)$$

Ta rezultat često zapišemo s t.i. razpolovnim časom  $t_{1/2}$ , definiranim z

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}, \quad (6.8)$$

kar ustreza  $t_{1/2} = \lambda^{-1} \ln 2$ , tako da je

$$N(t) = N_0 2^{-t/t_{1/2}}. \quad (6.9)$$

Razpadni produkti često razpadajo tudi sami. V nizu, ki ga tvorita le dve vrsti nuklidov, imamo tako dve enačbi:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad (6.10)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = +\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2. \quad (6.11)$$

Prvo že znamo rešiti, v drugi pa prvi člen predstavlja prirastek nuklidov vrste 2 zaradi razpada nuklidov vrste 1. Ta člen imamo lahko za izvir in je neodvisen od števila nuklidov vrste 2.

Enačba (6.11) je primer nehomogene navadne diferencialne enačbe 1. reda s konstantnimi koeficienti; slednje se nanaša na to, da sta oba člena z  $dN_2/dt$  in  $N_2$  pomnožena s konstantami in ne s funkcijami časa. Enačba je nehomogena, ker določa časovno odvisnost  $N_2$ , a vsebuje poleg pravkar omenjenih členov tudi člen  $\lambda_1 N_1$ .

Nehomogeno navadno diferencialno enačbo 1. reda v splošnem zapišemo takole

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x). \quad (6.12)$$

Rešitev te enačbe tvorita dva člena. Prvi je splošna rešitev homogene inačice enačbe, kjer je  $q(x) = 0$ . Ta je, kakor smo že videli, oblike

$$y_1(x) = C \exp\left(-\int^x p(x)dx\right). \quad (6.13)$$

Konstanta  $C$  je odvisna od začetnih pogojev in odraža dejstvo, da je enačba linearna.

Drugi člen upošteva prisotnost izvira  $q(x)$  in je enak

$$y_2(x) = \exp\left(-\int^x p(x)dx\right) \times \int^x \exp\left(\int^t p(s)ds\right) q(t)dt. \quad (6.14)$$

Do tega rezultata (t.i. partikularne rešitve) se dokopljemo z uvedbo integracijskega faktorja. Preverimo, ali  $y_2$  res reši nehomogeno enačbo in najprej izračunajmo odvod  $dy_2/dx$ . Ta je enak

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= -p(x) \times \exp\left(-\int^x p(x)dx\right) \times \int^x \exp\left(\int^t p(s)ds\right) q(t)dt \\ &\quad + \exp\left(-\int^x p(x)dx\right) \times \exp\left(\int^x p(s)ds\right) q(x) \\ &= -p(x)y_2(x) + q(x), \end{aligned} \quad (6.15)$$

kakor smo želeli.

Uporabimo ta nastavek zdaj za enačbo (6.11). Tu je  $p(x) = \lambda_2$  in  $q(x) = \lambda_1 N_0 \exp(-\lambda_1 x)$ , kjer je  $N_0$  začetno število nuklidov vrste 1. Tedaj je splošna rešitev enaka

$${}_1N_2(t) = C \exp(-\lambda_2 t). \quad (6.16)$$

Partikularna rešitev je oblike

$${}_2N_2(t) = \exp\left(-\int^t \lambda_2 dx\right) \times \int^t \exp\left(\int^x \lambda_2 ds\right) \lambda_1 N_0 \exp(-\lambda_1 x) dx. \quad (6.17)$$

(Tu smo pazili, da neme spremenljivke, po kateri integriramo, nismo označili z enakim simbolom kot zgornjo mejo integrala.) Integralov ni težko izračunati in rezultat je

$$\begin{aligned} {}_2N_2(t) &= N_0 \lambda_1 \exp(-\lambda_2 t) \times \int^t \exp(\lambda_2 x) \exp(-\lambda_1 x) dx \\ &= N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

V celoti torej imamo

$$N_2(t) = C \exp(-\lambda_2 t) + N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t). \quad (6.19)$$

Konstanto  $C$  določimo z začetnim pogojem: denimo, da ob  $t = 0$  nuklidov vrste 2 ni. Tedaj je

$$C = -N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (6.20)$$

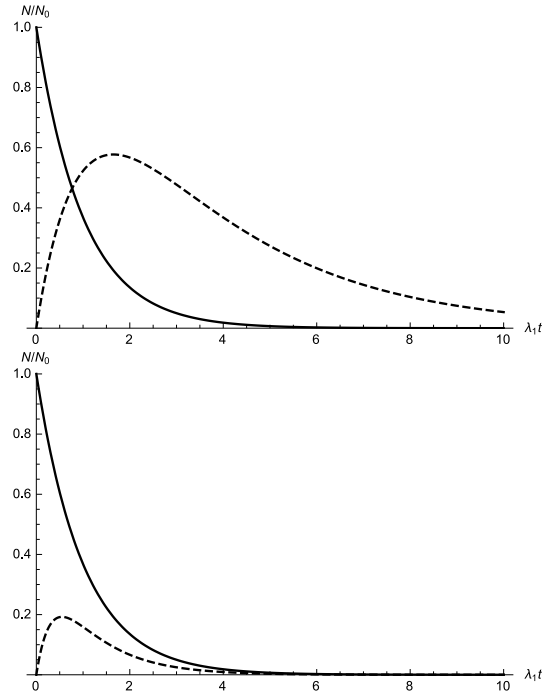
in

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]. \quad (6.21)$$

Značilno obnašanje, kjer doseže število nuklidov vrste 2 vrh ob času, ko je nuklidov vrste 1 že dokaj malo, je prikazano na sl. 6.1a. Zakasnitev je seveda tem izrazitejša, čim počasnejši je razpad nuklidov vrste 2. Če je razpad nuklidov vrste 1 počasnejši od razpada nuklidov vrste 2, pa je število slednjih po dovolj dolgem času sorazmerno številu prvih, saj značilni čas razpada zopet narekuje počasnejši proces.

To sta bila primera eksponentnega razpada. V kakem drugem primeru, npr. pri rasti populacije z delitvijo, naletimo v preprostem modelu na eksponentno rast, kjer je prirastek populacije sorazmeren s populacijo samo:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (6.22)$$



Slika 6.1: Časovna odvisnost števila radioaktivnih nuklidov dveh vrst, od katerih prva (polna črta) razpada v drugo (prekinjena črta), druga nato v neradioaktivni nuklid. Za nuklide prve vrste je značilen eksponentni razpad, za nuklide druge vrste pa dvoeksponentni. Na zgornji sliki je  $\lambda_2 = \lambda_1/3$ , na spodnji  $\lambda_2 = 3\lambda_1$ .

Tu  $\lambda > 0$  predstavlja razliko med hitrostjo delitve in smrti bakterij. V bolj realističnem modelu je rast populacije omejena, saj so omejene tudi zaloge hrane. To bi lahko zajeli z enačbo oblike

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(N_0 - N), \quad (6.23)$$

kjer je  $dN/dt = 0$ , čim  $N$  doseže  $N_0$ . Ta diferencialna enačba ni več linearna, a jo lahko rešimo s separacijo spremenljivk:

$$\frac{dN}{N(N_0 - N)} = \lambda dt. \quad (6.24)$$

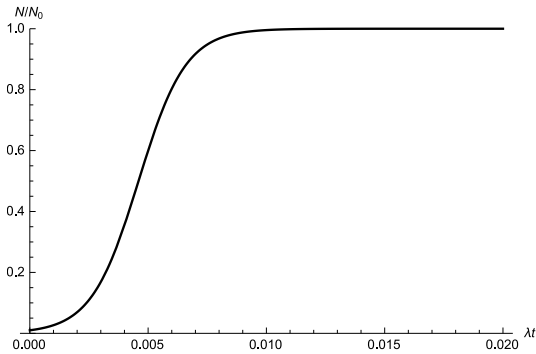
To da

$$\frac{1}{N_0} \ln \frac{N_0/N_1 - 1}{N_0/N(t) - 1} = \lambda t, \quad (6.25)$$

kjer je  $N_1$  število bakterij ob času 0. Odtod sledi

$$N(t) = \frac{N_0}{1 + (N_0/N_1 - 1) \exp(-N_0\lambda t)}, \quad (6.26)$$

Primer omejene rasti populacije je prikazan na sl. 6.2, kjer je lepo viden začetni eksponentni del in poznejše zasičenje, ki da krivulji značilno sigmoidno obliko.



Slika 6.2: Omejena rast populacije, kakršno napoveduje enačba (6.23). Tu smo vzeli, da je  $N_1/N_0 = 0.01$ .

### Električna vezja

Podobne navadne diferencialne enačbe imamo v elektrotehniki, npr. pri praznjenju nabitega kondenzatorja skozi upornik. V  $RC$  členu, ki vsebuje upornik in kondenzator, je vsota napetosti enaka 0 (II. Kirchhoffov zakon), tako da je

$$RI + \frac{q}{C} = 0. \quad (6.27)$$

Tu je  $R$  upor upornika,  $I$  je jakost električnega toka,  $q$  naboj na kondenzatorju ter  $C$  kapaciteta slednjega. Električni tok in naboj sta seveda povezana,  $I = dq/dt$ , tako da z odvajanjem gornje enačbe po času dobimo

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (6.28)$$

oziroma

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I. \quad (6.29)$$

Ta enačba je formalno enaka enačbi (6.5), zato je tudi tu rešitev eksponentno pojemanje:  $I(t) = I_0 \exp(-t/RC)$ . Časovna konstanta je očitno enaka  $RC$ .

V  $RL$  členu imamo upornik in tuljavo z induktivnostjo  $L$ ; magnetni pretok v tuljavi je enak  $\Phi = LI$  in napetost na njej je  $U = LdI/dt$ . Tudi tu je enačba, ki določa časovno odvisnost toka v členu, II. Kirchhoffov zakon:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U(t). \quad (6.30)$$

Na desni smo dodali gonilno napetost. Najenostavnejši primer te vrste je tisti s konstantno gonilno napetostjo  $U \neq U(t)$ . Za ta primer je rešitev homogene enačbe enaka  $I(t) = a \exp(-Rt/L)$  — časovna konstanta je torej  $L/R$  —, celotna rešitev pa se za primer  $I(t=0) = 0$  glasi

$$I(t) = \frac{U}{R} [1 - \exp(-Rt/L)]. \quad (6.31)$$

Do te rešitve pridemo enako kot pri enačbi (6.11).

### Kemijska kinetika

Široko področje uporabe diferencialnih enačb 1. reda je kemijska kinetika, kjer nas zanima časovna odvisnost koncentracije reaktantov in produktov. Pri **enačbah ničtega reda** hitrost reakcije ni odvisna od koncentracije reaktantov  $[A]$ . To se običajno zgodi v primerih, ko je za reakcijo potreben katalizator zasičen ali ko reakcija vključuje počasen proces, ki ni odvisen od izbranega reagenta. (Primer za slednje je jodiranje acetona  $\text{MeCOMe} + \text{J}_2 \rightarrow \text{MeCOCH}_2\text{J} + \text{HJ}$ , ki je ničelnega reda v koncentraciji joda [7].) Tedaj je

$$\frac{d[A]}{dt} = -k, \quad (6.32)$$

kjer je  $k > 0$  konstanta hitrosti. Z negativnim znakom smo upoštevali, da se koncentracija reaktanta s časom zmanjšuje. **Enačbe prvega reda** opisujejo razpad kake spojine na dve, npr.  $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + (1/2)\text{O}_2$ . Tu je

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]; \quad (6.33)$$

ta enačba je enakovredna enačbi (6.5). V **enačbah drugega reda** je hitrost reakcije sorazmerna s kvadratom koncentracije reagenta, kar se zgodi npr. pri reakcijah v plinih, ki se zgodijo ob trku dveh molekul, recimo pri  $2\text{NO} \rightarrow 2\text{NO} + \text{O}_2$ . Tak proces opišemo z

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2. \quad (6.34)$$

Gornje enačbe lahko posplošimo, da zajamejo več zaporednih reakcij, v katerih produkti izbrane reakcije nastopajo kot reagenti naslednje, ter za opis kemijskega ravnovesja, kjer obojesmerna reakcija poteka tako, da sta hitrost nastajanja produktov in reaktantov enaki.

### Električno polje

Na nelinearno diferencialno enačbo 1. reda naletimo tudi pri iskanju odgovora na vprašanje, kakšna mora biti krajevna odvisnost kakega vektorskega polja, da bosta njegova divergenca ali rotor enaka 0. Nemara najpopularnejša primera polja z divergenco 0 sta električna poljska jakost v prostoru brez izvorov ter hitrostno polje nestisljive tekočine. Za prvo velja Gaussov zakon v obliki

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (6.35)$$

V sferični geometriji je smiselno predpostaviti, da ima  $\mathbf{E}$  le radialno komponento  $E_r$  in da je ta odvisna le od oddaljenosti od izhodišča  $r$ . Tedaj imamo v izrazu za divergenco (4.68) le prvi člen in Gaussov zakon (6.3) za  $\mathbf{E}$  se glasi

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \quad (6.36)$$

ali

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r} E_r = 0. \quad (6.37)$$

Ta diferencialna enačba je še vedno linearna, vendar drugače kot enačba (6.5) nima konstantnih koeficientov. Podobno kot večino doslej omenjenih primerov jo lahko rešimo s separacijo spremenljivk:

$$\frac{dE_r}{E_r} = -\frac{2dr}{r}. \quad (6.38)$$

To da Coulombov zakon

$$E_r = \frac{C}{r^2}. \quad (6.39)$$

Integracijska konstanta  $C$  je odvisna od velikosti naboja v izhodišču; velja  $4\pi C = q/\epsilon_0$ .

Na ena način ugotovimo, kakšna je radialna odvisnost jakosti električnega polja enakomerno nabite neskočne žice. Ta primer ima cilindrično simetrijo in kot prej predpostavimo, da ima  $\mathbf{E}$  le radialno komponento. Iz enačbe (4.61) sledi

$$\frac{dE_\rho}{E_\rho} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (6.40)$$



ter

$$E_\rho = \frac{C}{\rho}. \quad (6.41)$$

## 6.2 Navadne diferencialne enačbe višjega reda

Začnimo z enačbo s konstantnimi koeficienti, ki izgleda takole:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0. \quad (6.42)$$

Rešimo jo z nastavkom

$$y = \exp(kx), \quad (6.43)$$

ki pripelje do algebrajske enačbe za  $k$ :

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (6.44)$$

Ta ima  $n$  korenov  $k_i$ , ki so v splošnem kompleksni, tako da je rešitev linearna kombinacija

$$y(x) = A_1 \exp(k_1 x) + A_2 \exp(k_2 x) + \dots + A_n \exp(k_n x). \quad (6.45)$$

[V posebnem primeru, ko sta dva korena enačbe (6.44) enaka, imamo namesto dveh členov te vrste  $(A_1 + A_2 x) \exp(kx)$ .]

### Matematično nihalo

Za fiziko nemara najpomembnejši zgled za tako enačbo je nihalo. Pri vzmetnem nihalu, pri katerem povezuje silo in raztezek Hookov zakon  $F = Kx$ , je gibalna enačba oblike

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx, \quad (6.46)$$

pri matematičnem nihalu pa imamo

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta. \quad (6.47)$$

Tu je  $\theta$  kot, ki ga nihalo oklepa z navpičnico; desna stran predstavlja dinamično komponento sile teže (sl. 6.3). Če je  $\theta \ll 1$ , lahko  $\sin \theta$  nadomestimo s  $\theta$ ; nadalje je tedaj gibanje v dobrem približku premo in velja  $x = l\theta$ . Gibalna enačba se v tem primeru glasi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x. \quad (6.48)$$

Slika 6.3: Matematično nihalo.

Enačbi (6.46) in (6.48) sta iste vrste in imata karakteristični enačbi

$$k^2 + \frac{K}{m} = 0 \quad \text{oziroma} \quad k^2 + \frac{g}{l} = 0 \quad (6.49)$$

z rešitvama

$$k_{1,2} = \pm i\omega, \quad (6.50)$$

kjer sta

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{oziroma} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6.51)$$

krožni frekvenci nihal. Časovni potek odmika je v obeh primerih enak

$$x(t) = A_1 \exp(-i\omega t) + A_2 \exp(i\omega t). \quad (6.52)$$

Tu sta koeficienta  $A_1$  in  $A_2$  v splošnem kompleksna in določena z začetnima pogojeva, torej z odkikom in hitrostjo nihala ob  $t = 0$ . Ne pozabimo, da je odkik realna količina — to še bolj eksplicitno upoštevamo z zapisom, kjer  $\exp(i\omega t)$  zamenjamo z  $\cos \omega t + i \sin \omega t$ :

$$x(t) = A'_1 \cos \omega t + A'_2 \sin \omega t. \quad (6.53)$$

Koeficienta  $A'_1$  in  $A'_2$  sta zdaj realna.

Nihajni čas teh nihal

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.54)$$

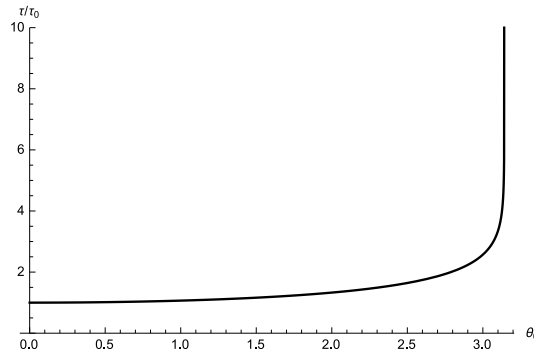
ni odvisen od amplitude nihanja, dokler je ta dovolj majhna, da velja Hookov zakon oziroma da lahko  $\sin \theta$  nadomestimo s  $\theta$ . V tem primeru je gibalna enačba linearna, kar pomeni, da je poljuben večkratnik dane rešitve  $x(t)$  tudi rešitev; “poljuben” seveda le do te mere, da odkik ostane majhen. Pri večjih odkikih je nihajni čas daljši: brez izpeljave navedimo, da velja

$$\tau = \tau_0 \frac{2}{\pi} K(\sin(\theta_0/2)). \quad (6.55)$$

Tu je  $\theta_0$  amplituda nihanja in  $K(k)$  popolni eliptični integral I. vrste

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (6.56)$$

Ko  $\theta_0$  doseže  $\pi$ , nihajni čas divergira (sl. 6.4), pri majhnih amplitudah pa narašča le počasi. Izkaže se, da je relativno odstopanje nihajnega časa od  $\tau_0$  še pri amplitudi  $20^\circ$  komaj 0.8%.



Slika 6.4: Odvisnost nihajnega časa matematičnega nihala od amplitude nihanja  $\theta_0$ .

## Dušeno nihalo

Pri dušenem matematičnem nihalu je drugi Newtonov zakon oblike

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x - \gamma \frac{dx}{dt}. \quad (6.57)$$

Tu predstavljata člena na desni dinamično komponento sile teže, ki kaže proti ravnovesni legi v koordinatnem izhodišču, in silo dušenja, ki je sorazmerna s hitrostjo in kaže v nasprotni smeri kot hitrost;  $\gamma$  je koeficient dušenja. (Podobno enačbo dobimo za dušeno vzmetno nihalo.) Karakteristična enačba je oblike

$$mk^2 + \gamma k + \frac{mg}{l} = 0 \quad (6.58)$$

in ima korena

$$k_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}}. \quad (6.59)$$

Z  $g/l = \omega_0^2$  lahko rezultat (6.59) zapišemo kot

$$k_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (6.60)$$

To enačbo seveda lahko rešimo analitično za vsako kombinacijo  $\gamma, m$  in  $\omega_0$ , a je poučneje pogledati oba skrajna primera, ko je dušenje zelo šibko ali zelo močno. Prvi primer se nanaša na  $\gamma/(2m) \ll \omega_0$  in lahko pišemo

$$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = i\omega, \quad (6.61)$$

kjer je frekvenca nihala  $\omega$  zdaj zaradi dušenja manjša od tiste pri nedušenem nihalu:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2m\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2m\omega_0}\right)^2\right]. \quad (6.62)$$

V tem režimu gibanje nihala opiše

$$x(t) = [A_1 \exp(i\omega t) + A_2 \exp(-i\omega t)] \exp(-\gamma t/2m), \quad (6.63)$$

oziroma

$$x(t) = [B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)] \exp(-\gamma t/2m). \quad (6.64)$$

Nihajni čas

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.65)$$

je daljši kot pri nedušenem nihalu, amplituda vsakega nihaja je za faktor

$$\exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2m}\right) \approx \exp\left(-\frac{\pi\gamma l}{mg}\right) \quad (6.66)$$

manjša kot pri prejšnjem nihaju. (V zadnjem koraku smo  $\tau$  nadomestili s  $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ .) Značilni relaksacijski čas dušenja je

$$\tau_r = \frac{2m}{\gamma}. \quad (6.67)$$

Če je  $\gamma/(2m) \gg \omega_0$ , je

$$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \approx \frac{\gamma}{2m} \left(1 - \frac{2\omega_0^2 m^2}{\gamma^2}\right) \quad (6.68)$$

in rešitev gibalne enačbe je

$$x(t) = B_1 \exp(-\omega_0^2 m t / \gamma) + B_2 \exp(-\gamma t / m). \quad (6.69)$$

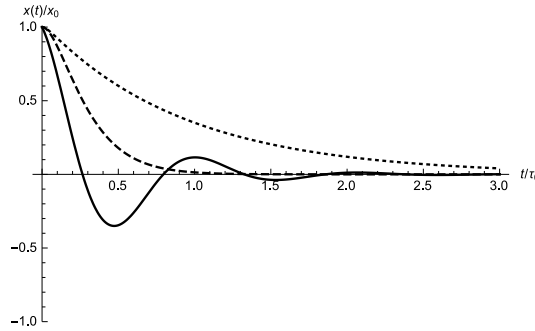
Drugi člen zamre prej kot prvi, ki torej določa, kako hitro se nihalo približuje ravnovesju. Relaksacijski čas je tu

$$\tau_r = \frac{\gamma}{\omega_0^2 m} = \frac{\gamma l}{mg}. \quad (6.70)$$

Oba režima, oscilirajočega in nadkritično dušenega, prikazuje sl. 6.5. Narisali smo, kako se ravnovesni legi približujejo nihala z različnimi vrednostmi brezdimenzijskega koeficienta dušenja

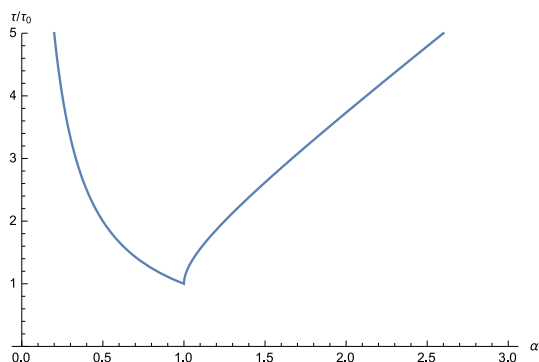
$$\alpha = \frac{\gamma}{2m\omega_0}. \quad (6.71)$$

Koeficienta v enačbah (6.64) in (6.69) smo izbrali tako, da je odmik nihala ob  $t = 0$  enak  $x_0$ , hitrost  $dx/dt$  pa 0. Če je  $\alpha < 1$ , nihalo zaniha z eksponentno pojemajočo amplitudo; če je  $\alpha > 1$ , pa brez oscilacij. Pri  $\alpha = 1$  je nihalo kritično dušeno in se najhitreje umiri.



Slika 6.5: Odmik dušenega nihala, ki smo ga ob  $t = 0$  izmaknili iz ravnovesne lege, v odvisnosti od brezdimenzijskega časa  $t/\tau_0$ . Polna črta ustreza  $\alpha = 1/3$  in prikazuje podkritični režim, pikčasta  $\alpha = 3$  in ilustrira nadkritični režim. Prekinjena črta predstavlja kritično dušenje z  $\alpha = 1$ .

Odvisnost relaksacijskega časa od koeficienta dušenja si velja pogledati nekaj bolj podrobno. Primerjava obeh limitnih izrazov [enačbi (6.67) in (6.70)] pokaže, da je relaksacijski čas pri zelo šibkem in pri zelo močnem dušenju dolg, čeprav iz različnih razlogov. Slika 6.6 prikazuje točno odvisnost relaksacijskega časa, ki ga definiramo z recipročno vrednostjo realnega dela  $k_1$  oziroma  $k_2$ ; od obeh možnosti vzamemo večjo, saj ta določa, kako počasi se nihalo ustavlja. S slike znova razberemo, da se nihalo najhitreje približa ravnovesni legi pri kritičnem dušenju, kjer je brezdimenzijski koeficient dušenja  $\alpha$  natanko 1; kritični koeficient dušenja tako znaša  $\gamma_c = 2m\sqrt{g/l}$ .



Slika 6.6: Odvisnost relaksacijskega časa dušenega nihala od brezdimenzijskega koeficienta dušenja  $\alpha = \gamma/(2m\omega_0)$ ;  $\tau_r$  smo podali v enotah  $\tau_0$ .

### Vsiljeno nihanje

Razširimo obravnavo zdaj na vsiljeno nihanje dušenega matematičnega nihala. V tem primeru obsega skupna sila na nihalo poleg dinamične komponente sile teže in viskozne sile še oscilirajočo zunanjo silo z amplitudo  $F$  in frekvenco  $\omega$ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x - \gamma \frac{dx}{dt} + F \exp(-i\omega t). \quad (6.72)$$

[Uporabili smo eksponentni zapis časovne odvisnosti zunanje sile; relevanten je seveda le realni del  $F \exp(-i\omega t)$ .]

Iz vsakdanjih izkušenj vemo, da tako nihalo niha s frekvenco zunanje sile, tako da se reševanja gibalne enačbe lotimo z nastavkom

$$x(t) = x_0 \exp(-i\omega t). \quad (6.73)$$

$x_0$  je tu kompleksna amplituda nihanja; kompleksna zato, ker odmik v splošnem ni v fazi z zunanjo silo. Ta nastavek nesemo v gibalno enačbo in izrazimo  $x_0$

$$x_0(\omega) = \frac{F}{-m\omega^2 + i\gamma\omega + mg/l}. \quad (6.74)$$

Na levi smo izpostavili, da je amplituda odvisna od frekvence. Ta izraz je prikladno zapisati tako, da velikost amplitude ločimo od faze. Opravka imamo s kompleksnim izrazom oblike

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}. \quad (6.75)$$

Velikost tega izraza je enaka  $\sqrt{a^2 + b^2}/(a^2 + b^2) = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ , faza pa  $\delta = \arctan b/a$ . Če obenem  $g/l$  nadomestimo z  $\omega_0^2$  in  $\gamma$  zapišemo z brezdimenzijskim koeficientom dušenja  $\alpha$  [enačba (6.71)], dobimo

$$x_0(\omega) = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega_0\omega)^2}} \exp\left(i \arctan \frac{2\alpha\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (6.76)$$

Prvi faktor predstavlja velikost odmika. Vidimo, da je pri  $\omega \rightarrow 0$  enak  $F/(m\omega_0^2)$ ; fazni kot je tedaj 0. Ta izraz predstavlja naravno enoto za odmik, ki jo označimo z  $\tilde{x}$ , tako da je prikladna končna oblika  $x(\omega)$

$$x_0(\omega) = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (2\alpha\omega/\omega_0)^2}} \exp\left(i \arctan \frac{2\alpha\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}\right). \quad (6.77)$$

Na sl. 6.7 sta prikazani brezdimenzijska velikost odmika  $|x(\omega)|/\tilde{x}$  in faza

$$\delta(\omega) = \arctan \frac{2\alpha\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}. \quad (6.78)$$

Pri majhnem koeficientu dušenja ima odmik maksimum malce pod  $\omega_0$ ; maksimum se pojavi pri  $\alpha$  pod približno 0.7. Maksimum je znak resonance, pojava, kjer je amplituda nihanja pri frekvenci blizu  $\omega_0$  znatno večja kot pri nekaj nižjih in nekaj višjih frekvencah. Resonanca je tem bolj izrazita, čim manjše je dušenje, in je pri močno dušenem nihalu ne opazimo. Na sl. 6.7 je tudi faza nihala, za katero je značilno, da je pri  $\omega = 0$  enaka 0, pri zelo visokih frekvencah pa doseže  $\pi$ ; pri  $\omega = \omega_0$  pa je ravno  $\pi/2$ .

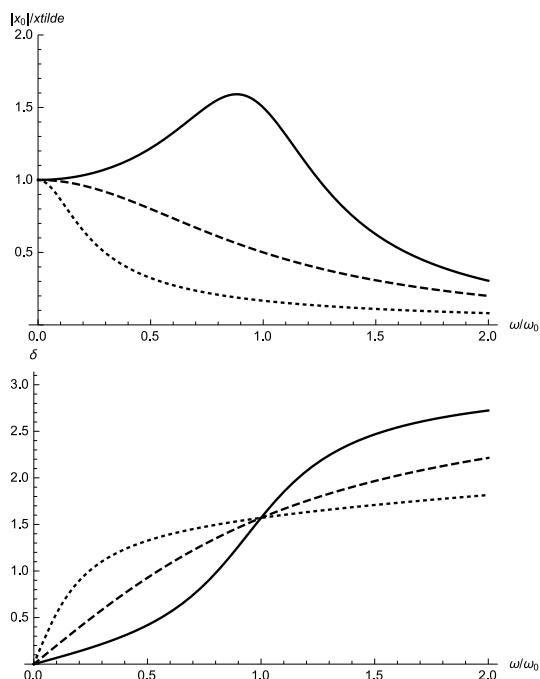
Matematično nihalo je zelo pomemben model, saj povzema bistvo vseh oscilatorjev. Vsi vidiki obnašanja matematičnega nihala, ki smo jih izpostavili zgoraj, se nanašajo tudi na druge, nemehanične oscilatorje. To hitro uvidimo na primeru električnega nihajnega kroga, sestavljenega iz tuljave, upornika, in kondenzatorja. Podobno kot v razdelku 6.1 zapišemo vsoto napetosti v takem krogu, ki je enaka

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = U(t); \quad (6.79)$$

$U(t)$  je zunanja napetost, s katero ženemo krog. To enačbo odvajamo po času in dobimo

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dU(t)}{dt}, \quad (6.80)$$

ki je formalno enaka enačbi (6.72).



Slika 6.7: Amplituda vsiljenega nihanja dušenega nihala (zgoraj) in faza (spodaj) v odvisnosti od brezdimenzijske frekvence  $\omega/\omega_0$ . Polna, prekinjena in pikčasta črta ustrezajo  $\alpha = 1/3, 1$  oziroma  $3$ .

### Dušeno premo gibanje: Greenova funkcija

Na primeru dušenega premega gibanja točkastega telesa, ki ga povzroča časovno odvisna zunanja sila, si lahko ogledamo še en način reševanja diferencialnih enačb. Drugi Newtonov zakon je tu oblike

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (6.81)$$

ter je torej nekoliko podoben enačbi (6.72), le da ne vsebuje dinamične komponente sile teže in da ima sila zaenkrat splošno odvisnost od časa. Do koncepta Greenove funkcije pridemo, če si predstavljamo zunanjo silo  $F(t)$  razdeljeno na zaporedje sunkov z različnimi amplitudami (sl. 6.8):

$$F(t) = \int F(t_0) \delta(t_0 - t) dt_0. \quad (6.82)$$



Slika 6.8: H Greenovi funkciji: poljubno silo lahko predstavimo kot zaporedje sunkov.

### Diracova funkcija $\delta$

V tem izrazu smo uporabili Diracovo funkcijo  $\delta$ , ki si jo lahko predstavljamo kot škatlasto funkcijo zelo majhne širine in take višine, da velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (6.83)$$

Pri škatlasti upodobitvi torej vzamemo

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 1/\epsilon & \text{za } -\epsilon/2 < t < \epsilon/2 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}. \quad (6.84)$$

(Ta upodobitev predstavlja funkcijo  $\delta$  v izhodišču;  $\delta(t - t_0)$  je funkcija  $\delta$ , centrirana okoli  $t_0$ .) Vpeljemo lahko še druge upodobitve funkcije  $\delta$ , ki se razlikujejo po obliki sunka, a zaenkrat ta zadošča.

Pomembna lastnost funkcije  $\delta$  je tale:

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{če je } \tau > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}. \quad (6.85)$$

Če pri integraciji “povozimo” funkcijo  $\delta$ , je vrednost integrala enaka 1, sicer pa 0.

Greenovo funkcijo  $G(t, t_0)$  sedaj definiramo kot rešitev nehomogene enačbe (6.81), kjer je zunanja sila enaka funkciji  $\delta$ :

$$m\ddot{G}(t, t_0) + \gamma\dot{G}(t, t_0) = \delta(t - t_0). \quad (6.86)$$

(Tu smo zaradi preglednosti odvode po času označili s piko, torej  $dA/dt = \dot{A}$ , kot je često v navadi.) Če v izvirno enačbo (6.81) vstavimo

$$x(t) = \int_0^t G(t, t_0) F(t_0) dt_0 \quad (6.87)$$

in enačbo (6.82), vidimo, da smo jo rešili. Prednost tega pristopa je, da z Greenovo funkcijo za dano enačbo z enim samim integralom dobimo rešitev diferencialne enačbe za poljubno časovno odvisnost člena, ki povzroča nehomogenost. To je razumljivo, če v enačbi (6.81) vidimo fizikalno vsebino. Greenova funkcija pove, kako se telo premakne zaradi sunkovite zunanje sile, ki nanj deluje ob času  $t_0$ , in tako podaja odziv sistema. Integral v enačbi (6.87) gre do  $t_0 = t$ , kakor zahteva kavzalnost: na odziv ob času  $t$  lahko vpliva le sila, ki je na telo delovala do tega časa.

V našem primeru Greenove funkcije ni težko poiskati. Ker je Greenova funkcija odvisna od začetnih pogojev, izberimo še te, npr.  $x(t = 0) = 0$  in  $v(t = 0) = dx/dt = 0$ . Na podlagi vsega, kar smo se naučili o diferencialnih enačbah 1. in 2. reda, vidimo, da je splošna rešitev oblike  $x(t) = A \exp(-\gamma t/m) + B$ . A ker se telo na delovanje zunanje sile ob  $t = t_0$  odzove šele ob čase  $t > t_0$ , ločimo dva režima:

$$G(t < t_0, t_0) = A_{<} \exp(-\gamma t/m) + B_{<} \quad (6.88)$$

in

$$G(t > t_0, t_0) = A_{>} \exp(-\gamma t/m) + B_{>}. \quad (6.89)$$

Konstanti  $A_{<}$  in  $B_{<}$  določimo z upoštevanjem začetnih pogojev, ki dasta  $A_{<} = B_{<} = 0$ . Do konstant  $A_{>}$  in  $B_{>}$  pridemo tako, da diferencialno enačbo (6.86) integriramo po ozkem intervalu okoli  $t = t_0$ , denimo od  $t_0 - \epsilon/2$  od  $t_0 + \epsilon/2$ . Zapišimo, kaj želimo izračunati:

$$m \int_{t_0 - \epsilon/2}^{t_0 + \epsilon/2} \ddot{G}(t, t_0) dt + \gamma \int_{t_0 - \epsilon/2}^{t_0 + \epsilon/2} \dot{G}(t, t_0) dt = \int_{t_0 - \epsilon/2}^{t_0 + \epsilon/2} \delta(t - t_0) dt. \quad (6.90)$$

Ker je integral drugega odvoda funkcije prvi odvod, predstavlja prvi člen na levi razliko odvodov  $G$  pri  $t_0 + \epsilon/2$  in  $t_0 - \epsilon/2$ :

$$m \int_{t_0 - \epsilon/2}^{t_0 + \epsilon/2} \ddot{G}(t, t_0) dt = m \dot{G}(t, t_0) \Big|_{t=t_0 - \epsilon/2}^{t=t_0 + \epsilon/2}. \quad (6.91)$$

Podobno je drugi člen enak razliki funkcij samih, člen na desni pa je enak 1. Dobimo

$$m \dot{G}(t, t_0) \Big|_{t=t_0 - \epsilon/2}^{t=t_0 + \epsilon/2} + \gamma G(t, t_0) \Big|_{t=t_0 - \epsilon/2}^{t=t_0 + \epsilon/2} = 1. \quad (6.92)$$

Zdaj pošljemo  $\epsilon$  proti 0 in uvidimo, da ta enačba povezuje skok odvoda Greenove funkcije pri  $t = t_0$  s skokom funkcije same — in se poenostavi, čim izvemo malo več o zveznosti  $G(t, t_0)$  pri  $t_0$ . Kar nam manjka, izvemo tako, da enačbo (6.86) dvakrat integriramo po času znotraj ozkega intervala; prvi člen na levi je torej

$$m \int_{t_0-\epsilon/2}^{t_0+\epsilon/2} dt \int_{t_0-\epsilon/2}^t dt' \ddot{G}(t', t_0) dt'. \quad (6.93)$$

Ta izraz izračunamo postopoma: integral po  $t'$  da kot prej

$$\begin{aligned} & m \int_{t_0-\epsilon/2}^{t_0+\epsilon/2} dt \left[ \dot{G}(t, t_0) - \dot{G}(t_0 - \epsilon/2, t_0) \right] \\ & = m [G(t_0 + \epsilon/2, t_0) - G(t_0 - \epsilon/2, t_0)] - \dot{G}(t_0 - \epsilon/2, t_0)\epsilon. \end{aligned} \quad (6.94)$$

V limiti  $\epsilon \rightarrow 0$  drugi člen na desni odpade. Dvakratni integral drugega člena v enačbi (6.86) je

$$\begin{aligned} & \gamma \int_{t_0-\epsilon/2}^{t_0+\epsilon/2} dt \int_{t_0-\epsilon/2}^t dt' \dot{G}(t', t_0) dt' \\ & = \gamma \int_{t_0-\epsilon/2}^{t_0+\epsilon/2} dt [G(t, t_0) - G(t_0 - \epsilon/2, t_0)] \\ & = \gamma [G(\tilde{t}, t_0) - G(t_0 - \epsilon/2, t_0)] \epsilon. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Tu je  $G(\tilde{t}, t_0)$  povprečna vrednost  $G(t, t_0)$  v obravnavanem ozkem intervalu okoli  $t = t_0$ ; v limiti  $\epsilon \rightarrow 0$  je ta integral v celoti enak 0. Isto velja tudi za integral desne strani, kjer tehnično gledano ločimo dva primera. Integral po  $t'$  je zaradi lastnosti funkcije  $\delta$  enak 0, če je  $t < 0$ , in 1, če je  $t > 0$ . V prvem primeru je

$$\int_{t_0-\epsilon/2}^{t_0+\epsilon/2} dt \int_{t_0-\epsilon/2}^{t<0} dt' \delta(t - t_0) = 0, \quad (6.96)$$

v drugem

$$\int_{t_0-\epsilon/2}^{t_0+\epsilon/2} dt \int_{t_0-\epsilon/2}^{t>0} dt' \delta(t - t_0) = \epsilon, \quad (6.97)$$

kar da v limiti  $\epsilon \rightarrow 0$  zopet 0. Od dvakratnega integrala enačbe (6.86) torej ostane le

$$G(t_0 + \epsilon/2, t_0) - G(t_0 - \epsilon/2, t_0) = 0, \quad (6.98)$$

kar pomeni, da mora biti Greenova funkcija pri  $t = t_0$  zvezna. To obenem pomeni, da se enačba (6.99) poenostavi v

$$m \left[ \dot{G}(t_0 + \epsilon/2, t_0) - \dot{G}(t_0 - \epsilon/2, t_0) \right] = 1. \quad (6.99)$$

Z besedami: odvod Greenove funkcije po  $t$  ima pri  $t = t_0$  skok, ki znaša  $1/m$ . (Tehnično zelo podoben račun napravimo pri obravnavi vezanih stanj kvantnomehničnega delca v privlačnem potencialu v obliki funkcije  $\delta$  kot poenostavitvi za elektrostatični privlak med jedrom in elektronom, ki lepo ilustrira razcep stanj v molekulah, nastanek energijskih pasov v kristalih in še kaj.)

Ta pogoja dasta koeficienta  $A_>$  in  $B_>$ . Ker velja  $A_< = B_< = 0$ , zveznost Greenove funkcije pomeni, da je

$$A_> \exp(-\gamma t_0/m) = -B_>, \quad (6.100)$$

nezveznost odvoda pa, da je

$$-\gamma A_> \exp(-\gamma t_0/m) = 1. \quad (6.101)$$

Torej je

$$A_> = -\frac{\exp(\gamma t_0/m)}{\gamma} \quad \text{in} \quad B_> = \frac{1}{\gamma}, \quad (6.102)$$

tako da je Greenova funkcija enaka

$$G(t, t_0) = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma(t-t_0)}{m}\right) \right]. \quad (6.103)$$

seveda le pri  $t > t_0$ .

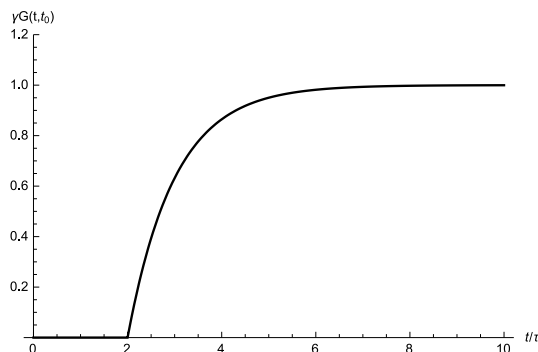
V tej funkciji prepoznamo zakasneni eksponentni odziv na silo ob  $t = t_0$  (sl. 6.9) z relaksacijskim časom

$$\tau = \frac{m}{\gamma}. \quad (6.104)$$

Amplitudo odziva določa koeficient dušenja.

Rezultat (6.103) zdaj uporabimo za nekaj zanimivih primerov. Najprej pogledjmo, kakšna je trajektorija, če na telo ob  $t = 0$  začne delovati konstantna sila  $F$ , tako da je

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < 0 \\ F & \text{za } t > 0 \end{cases}. \quad (6.105)$$

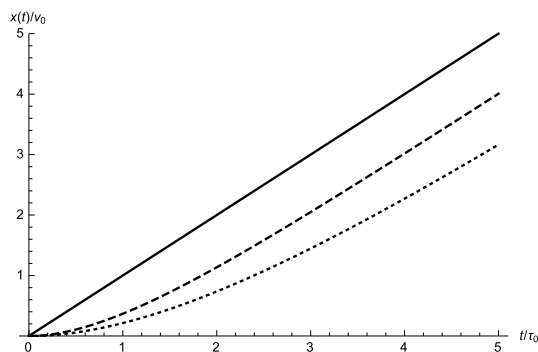


Slika 6.9: Greenova funkcija za dušeno premo gibanje; do  $t = t_0$  je  $G(t, t_0) = 0$  in tu je  $t_0 = 2\tau$ .

Odmik telesa je tedaj

$$x(t) = \frac{F}{\gamma} \{t + \tau [\exp(-t/\tau) - 1]\}. \quad (6.106)$$

V členu  $Ft/\gamma$  prepoznamo odziv po dolgem času, ko se telo giblje brez pospeška in je sila dušenja enaka zunanji sili. Tedaj je hitrost telesa konstantna in enaka  $v_0 = F/\gamma$ , odmik pa linearno narašča s časom. Slika 6.10 prikazuje odmik v odvisnosti od časa pri treh različnih relaksacijskih časih. Krivulje lahko interpretiramo kot odmik treh teles z različnimi masami, a enakim koeficientom dušenja; v tem primeru večji relaksacijski čas ustreza večji masi, zaradi katere se telo kasneje približa limitnemu režimu.



Slika 6.10: Odmik telesa v odvisnosti od časa pri konstantni sili, ki začne delovati ob  $t = 0$ , za tri vrednosti relaksacijskega časa. Polna črta ustreza  $\tau = 0$ , prekinjena končnemu  $\tau = \tau_0$  in pikčasta  $\tau = 2\tau_0$ .

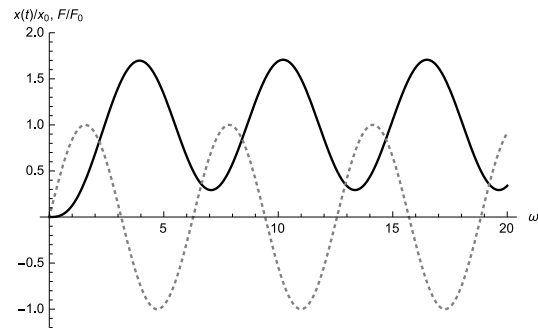
Podobno dobimo odmik pri oscilirajoči sili vrste  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ . Tu je

$$x(t) = \frac{x_0}{\omega\tau} \left\{ 1 - \cos(\omega t) - \frac{(\omega\tau)^2 [\exp(-t/\tau) - \cos(\omega t)] + \omega\tau \sin(\omega t)}{1 + (\omega\tau)^2} \right\}. \quad (6.107)$$

kjer je

$$x_0 = \frac{F_0\tau}{\gamma} \quad (6.108)$$

naravna amplituda odmika. Na sliki 6.11 vidimo potek odmika, ki niha z isto frekvenco kot sila, a s faznim zamikom. Ta primer lahko seveda še posplošimo na silo oblike  $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \delta)$ .



Slika 6.11: Odmik dušenega gibanja telesa s  $\tau = 1$  zaradi oscilirajoče sile; polna črta prikazuje odmik v naravnih enotah, siva pikčasta silo.

# Literatura

- [1] L. Weinstein in J. A. Adam, *Guesstimation* (Princeton University Press, Princeton, 2008).
- [2] I. Kuščer in A. Kodre, *Matematične metode v fiziki in tehniki* (DMFA-založništvo, Ljubljana, 2006).
- [3] G. B. Arfken in H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, 1995).
- [4] K. F. Riley in M. P. Hobson, *Student Solution Manual for Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [5] C. W. Wong, *Introduction to Mathematical Physics* (Oxford University Press, New York, 1991).
- [6] G. Stephenson, *Mathematical Methods for Science Students* (Longman, London, 1984).
- [7] M. Tišler, *Organska kemija* (Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1982).